యూక్లిడ్ (క్రీస్తు పూర్వము 325 - 265):

యూక్లిడ్‌ను యూక్లిడ్ ఆఫ్ అలెగ్జాండ్రియా అని కూడా పిలుస్తారు. హెలెనిస్టిక్ ఈజిప్టు, అలెగ్జాండ్రియాలో టోలోమి I పరిపాలించిన కాలములో నివసించిన యూక్లిడ్ గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త. ఈయనను జ్యామితి పితామహుడుగా కూడా పిలుస్తారు. ఆయన ప్రముఖ వ్యాసంగం “ఎలిమెంట్స్” గణితశాస్త్ర చరిత్రలో విజయవంతమైన పాఠ్య పుస్తకములలో ఒకటి. చిన్న స్వీకృతాల సమితి నుండి జ్యామితీయ ఉద్దేశముల ధర్మములు ఇందులో ఉన్నవి. దీని నుండి గణిత శాస్త్రము యొక్క స్వీకృతీయ పద్ధతిని కనుగొన్నారు.

యూక్లిడ్ శాంకవములు, గోళీయ జ్యామితి, వార్గిక తలములు (లేక శాంకవజములు) యిత్యాది పలు అంశముల గురించి వ్యాసములు వ్రాశారు. ఆయన జన్మించిన సంవత్సరము, జన్మస్థలము, మరణమునకు సంబంధించిన వివరాలు ఏమీ లభ్యం కాలేదు. “ఎలిమెంట్స్” లోని చాలా ఫలితాలు తనకంటే ముందు తరములోని గణిత శాస్త్రజ్ఞులచే కనుగొనబడినప్పటికి వాటిని ఒకటిగా హేతుబద్ధముగా నిర్మాణము చేయుటలో యూక్లిడ్ నైపుణ్యము కనబరిచారు. యూక్లిడ్ పుస్తకములో వీటితోపాటు అవసరమైన కొన్ని ఉపపత్తులు, సంఖ్యా శాస్త్రము మరియు త్రిపరిమాణ జ్యామితికి చెందిన కొన్ని భాగములు పొందుపరచడము జరిగింది. పుస్తకము IX, ప్రాతిపదిక 20లో ప్రధాన సంఖ్యల అనంతత్వమునకు యూక్లిడ్ ఉపపత్తి గురించి ముఖ్యముగా చెప్పబడినది.

“ఎలిమెంట్స్”లో వివరింపబడిన జ్యామితీయ వ్యవస్థ "The Geometry" గా పేర్కొనబడింది. 19వ శతాబ్దములో కనుగొనబడిన యూక్లిడియన్ కాని జ్యామితులుగా పిలువబడే జ్యామితీయ వ్యవస్థల నుండి వేరుచేసే విధముగా ఇప్పటికి యూక్లిడియన్ జ్యామితిగా సూచింపబడినది. గణిత శాస్త్రములో సర్వత్రా అత్యధికంగా అధ్యయనం చేయబడ్డ యూక్లిడ్ అయిదవ స్వీకృతము గురించి రెండు కోట్ల పైగా జరిపిన పరిశోధనల నుండి ఈ నూతన జ్యామితిలు ఉద్భవించాయి. ఈ పరిశోధనలలో చాలా వరకు మొదటి నాలుగు యూక్లిడ్ స్వీకృతాల నుండి ఊహకందని సంక్లిష్టమైన అయిదవ స్వీకృతం నిరూపించడానికే నిమగ్నమైనవి. ఈ ప్రయత్నం విజయవంతమైతే 5వ స్వీకృతం సిద్ధాంతంగా రూపొందేది.

పాఠము - 0

ప్రాథమికాంశములు

త్రిపరిమాణ జ్యామితి:

1. స్వీకృతాలు మరియు నిర్వచనములు:

యూక్లిడియన్ జ్యామితి సమితితో మొదలవుతుంది. దీనిని అంతరాళము అంటారు. ఈ సమితిలోని మూలకాలను బిందువులు అంటారు. అంతరాళములోని ప్రత్యేక ఉప సమితులు సరళరేఖలు, తలములు మొదలగునవి. P, Q లు బిందువులు, L, M లు సరళరేఖలు మరియు π ఒక తలము అయితే

(i) $P \in L$ అయితే P బిందువు L పై ఉండును లేక L రేఖ P గుండాపోవును.

(ii) $L \subset \pi$ బబావవవటబహగ అయితే L రేఖ π పై ఉండును లేక π తలము L ని కలిగియుండును.

(iii) P మరియు Q ల గుండా పోయే సరళరేఖ ఉన్నట్లయితే P, Q లు సరేఖీయములు.

(iv) L మరియు M లను కలిగియున్న తలము లేక L, M లకు సమాంతరముగా ఉన్న తలము ఉంటే L, M సరళరేఖలు సతలీయములు.

యూక్లిడియన్ జ్యామితి ఈ క్రింది స్వీకృతాల పై ఆధారపడి ఉండును.

స్వీకృతము 1 - రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా ఒకే ఒక సరళరేఖ పోవును.

స్వీకృతము 2 - మూడు అరేఖీయ బిందువుల గుండా పోయేటట్లుగా ఒకే ఒక తలము ఉండును.

స్వీకృతము 3 - ఒక తలములో రెండు విభిన్న బిందువులు P, Q లు ఉంటే P, Q లు సూచించే సరళరేఖ $\overleftrightarrow{PQ}$ ఆ తలములో ఉండును.

స్వీకృతము 4 - రెండు తలముల ఛేదనము శూన్యము లేక ఒక సరళరేఖ అగును.

స్వీకృతము 5 - ప్రతి సరళ రేఖలో కనీసం రెండు బిందువులు ఉండును మరియు ప్రతి తలములో కనీసం మూడు అరేఖీయ బిందువులు ఉండును.

స్వీకృతము 6 - అంతరాళములో కనీసం నాలుగు అతలీయ బిందువులు ఉండును.

స్వీకృతము 7 - S సమితిలోని ప్రతి బిందువుల జతకు చెంది P మరియు Q ల మధ్య దూరముగా పిలువబడే వాస్తవ సంఖ్య ఉండును మరియు దానిని $d(P, Q)$ గా సూచిస్తాము మరియు PQ గా చెప్తాము.

$S \times S$ పై నిర్వచింపబడిన దూర ప్రమేయము ఈ క్రింది నియమములను పాటించును.

(i) S లోని ప్రతి P, Q కి $d(P, Q) \in \mathbb{R}$ మరియు $d(P, Q) \geq 0$

(ii) $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

(iii) $d(P, Q) = d(Q, P)$

నిర్వచనము 8 - L ఒక సరళరేఖ మరియు $f : L \to \mathbb{R}$ ఒక అన్వేక ప్రమేయమైతే $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$ అనునది L పై దూర ప్రమేయాన్ని నిర్వచిస్తుంది మరియు దీనిని L పై నిరూపక వ్యవస్థ అంటారు. $x = f(P)$ ని f దృష్ట్యా P యొక్క నిరూపకము అంటారు.

స్వీకృతము 9 - ప్రతి సరళరేఖకు నిరూపక వ్యవస్థ ఉంటుంది. ఈ స్వీకృతమును రేఖా జన్య స్వీకృతము అంటారు.

ప్రతి సరళరేఖకు నిరూపక వ్యవస్థలు అనంతంగా ఉంటాయి. L రేఖ పై $P \neq Q$ అయ్యే ఏవైనా బిందువులకు అనుబంధముగా P యొక్క నిరూపకము సున్నా మరియు Q ధనాత్మకము అయ్యేటట్లుగా నిరూపక వ్యవస్థ ఉంటుంది.

నిర్వచనము 10 - ఒక తలములోని రెండు సరళ రేఖలు వియుక్తము లేక సమానము అయితే అవి సమాంతరములు. L_1, L_2 లు సమాంతరమైతే $L_1 \parallel L_2$ గా వ్రాస్తాము.

స్వీకృతము 11 - ఒక సరళరేఖకు ఒక బిందువు గుండా పోతూ దానికి సమాంతరముగా ఉండేటట్లుగా ఒకేఒక సరళరేఖ ఉంటుంది.

ఈ స్వీకృతాలు మరియు నిర్వచనములు మరియు మధ్యత్వము (betweeness) రేఖా ఖండము, రేఖా ఖండము యొక్క సమశేషకత, కుంభాకారత్వము, కిరణము, కోణము, కోణ పరిమాణ స్వీకృతము మొదలగు ఇతర నిర్వచనములు జ్యామితిని వేగముగా విస్తరింపచేసినవి. ఈ భావనలను నిరూపించకయే వాటి సామంజస్యమును తీసుకుంటాము.

2. ఆధారపూరిత ఫలితములు:

ఘన వైశ్లేషిక జ్యామితికి అవసరమయ్యే ఫలితాలను నిరూపణ లేకుండా ఇక్కడ ఇస్తున్నాము.

1. రెండు విభిన్న సరళ రేఖలు ఒక బిందువు కంటే ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించుకొనవు.
2. L ఒక సరళరేఖ మరియు π ఒక తలము అయితే $L \subseteq \pi$ లేక $L \cap \pi$ లో ఒకే ఒక బిందువు ఉండును.
3. ఒక సరళరేఖ మరియు దానిపై లేని ఒక బిందువు ఏకైక తలములో ఉండును.
4. రెండు ఖండన రేఖలు ఒకే తలములో ఉండును.

నిర్వచనము: L అనే సరళరేఖ E అనే తలమును P అనే బిందువు వద్ద ఖండించునని అనుకొందాము. E లో P గుండా పోయే ప్రతి రేఖకు L లంబముగా ఉంటే P వద్ద E కు L లంబముగా ఉన్నదని అంటాము మరియు P ని L యొక్క లంబ పాదము అంటారు. L ను P వద్ద E కు అభిలంబము అని కూడా అంటారు.

5. L సరళరేఖ PQ రేఖా ఖండము యొక్క మధ్య బిందువును కలిగి ఉండి L పైని ఏదైనా బిందువు P మరియు Qల నుండి సమాన దూరములో ఉంటే $L \perp PQ$.

6. L సరళరేఖ రెండు ఛేదన రేఖలకు ఖండన బిందువు వద్ద లంబముగా ఉంటే ఆ రేఖలను కలిగియున్న తలమునకు L లంబముగా ఉండును.

7. L ఒక సరళరేఖ మరియు L పై P ఒక బిందువు అయితే P వద్ద Lకు లంబముగా ఉండే తలము ఒకే ఒక్కటి ఉండును.

8. తలము యొక్క ఏ రెండు లంబములైనా సతలీయములు లేక సమాంతరములు.

9. π తలమునకు P బిందువు గుండా పోయే లంబము ఒకే ఒక్కటి ఉన్నది. M లంబపాదము అయితే PMను P నుండి πకు గల లంబ దూరము అంటారు.

10. ఒక సరళరేఖకు లంబముగా ఉండే ఏ రెండు తలములైనా సమాంతరములు. ఈ వరుసక్రమములో ఇక్కడ పొందుపరచని మరికొన్ని ఫలితములు ఉపయోగించడమైనది.

నిర్వచనము: రెండు సరళ రేఖలు L_1 మరియు L_2లు సమాంతరము కాని మరియు ఖండించుకొనని రేఖలయితే వాటిని అసొష్ఠవ రేఖలు అంటారు.

11. L_1 మరియు L_2లు అసొష్ఠవ రేఖలయితే L_1ను కలిగియుండి మరియు L_2కు సమాంతరముగా (L_2ను కలిగియుండి మరియు L_1కు సమాంతరముగా) ఒకే ఒక తలము వ్యవస్థితము.

12. ఒక తలము పై, L సరళ రేఖ పైని బిందువుల లంబ పాదములు సరళరేఖ ఏర్పరుచును.

13. రెండు అసొష్ఠవ రేఖలలో ప్రతి రేఖకు లంబముగా ఒకే ఒక సరళరేఖ ఉండును. లంబ పాదములను కలిపే సరళరేఖ పై రేఖా ఖండము పొడవును అసొష్ఠవ రేఖల మధ్య అల్పతమ దూరము అంటారు.

14. దత్త తలమునకు లంబముగా ఉంటూ రెండు విభిన్న బిందువులను కలిగియుండే ఏకైక తలము వ్యవస్థితము.

15. రెండు దత్త తలములకు లంబముగా ఉంటూ ఒక బిందువును కలిగియుండే ఏకైక తలము వ్యవస్థితము.

3. సదిశలు:

ద్విపరిమాణ జ్యామితిలోని కొన్ని క్లిష్ట సమస్యలను సదిశా పద్ధతుల ద్వారా నిర్వహించి, సాధించినట్లే త్రిపరిమాణాత్మక సమస్యల పై నిశిత దృష్టి సారించుటకు ఈ సదిశా పద్ధతులు ఉపయోగపడతాయి. అంతేకాక త్రిపరిమాణ నిరూపక జ్యామితిలోని సమస్యలను సాధించుటలో కూడా ఈ పద్ధతులు సహాయకరమవుతాయి. త్రిపరిమాణ యూక్లిడియన్ అంతరాళములో సదిశల గురించి క్లుప్తమైన నివేదిక ఇస్తాము. వాస్తవ సంఖ్యల క్రమత్రయమును త్రిపరిమాణ వాస్తవ సదిశ లేక సదిశ అంటారు. $P = (x, y, z)$ త్రిపరిమాణ వాస్తవ సదిశ. x, y, zలను వరుసగా ప్రథమ (లేక x), ద్వితీయ (లేక y) మరియు తృతీయ (లేక z) నిరూపకము అంటారు. సదిశను సాధారణముగా రెండు అక్షరములతో వాటి పై బారు (లేక బాణము) గుర్తు ఉండును. $(0, 0, 0)$ సదిశను శూన్యసదిశ

అంటారు మరియు దీనిని $\overline{0}$ తో సూచిస్తారు. రెండు సదిశలు సమానము కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము అనుబంధముగా నిరూపకములు సమానము. సదిశల సంకలనము, వ్యవకలనము, అదిశతో గుణకారము, బిందు లబ్ధము మరియు వక్ర లబ్ధము మొదలగు వాటిని సాధారణ పద్ధతిలో నిర్వచిస్తాము. (ద్వి పరిమాణ సందర్భములోవలెనె). యూనిట్ సదిశ అనగా ఒక యూనిట్ పొడవు ఉన్న సదిశ. శూన్యేతర సదిశలు $\overline{p}$ మరియు $\overline{q}$ ల మధ్య కోణములను క్రింది విధముగా నిర్వచిస్తాము.

$$\text{Cos}\ \theta = \pm \frac{\overline{p} \cdot \overline{q}}{\sqrt{\overline{p}\cdot\overline{p}}\ \sqrt{\overline{q}\cdot\overline{q}}}$$

$\overline{p} \cdot \overline{q} = 0$ అయితే $\overline{p}$ మరియు $\overline{q}$ లు లంబముగా ఉంటాయి.

$\left|\overline{p} \cdot \overline{q}\right| = \sqrt{\overline{p}\cdot\overline{p}}\ \sqrt{\overline{q}\cdot\overline{q}}$ అయితే $\overline{p}$ మరియు $\overline{q}$ లు సమాంతరములు లేక సరేఖీయములు.

$\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ ల అదిశా త్రిక లబ్ధమును $\left[\overline{p}\ \overline{q}\ \overline{r}\right]$ తో సూచిస్తాము.

$$\left[\overline{p}\ \overline{q}\ \overline{r}\right] = \overline{p} \cdot \left(\overline{q} \times \overline{r}\right)$$

$\overline{p} = (x_1, y_1, z_1),\ \ \overline{q} = (x_2, y_2, z_2),\ \ \overline{r} = (x_3, y_3, z_3)$ అయితే $\left[\overline{p}\ \overline{q}\ \overline{r}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

తరచుగా వాడుకలో ఉన్న భావనలను పైన పేర్కొన్నాము. మిగిలిన ఫలితాలను అవసరమైన సందర్భములో వాడతాము.

4. నిరూపక వ్యవస్థ:

త్రి పరిమాణ అంతరాళములో ఒక బిందువును ధృవీకరించి దానిని వ్యవస్థ యొక్క మూలబిందువు అంటాము. O తో సూచిస్తాము. O గుండా పరస్పరము లంబముగా ఉండే రెండు రేఖలు $X'OX$ మరియు $Y'OY$ లను స్థిరపరుస్తాము. ఈ రేఖలు XY తలమును నిర్ణయిస్తాయి. XY తలమునకు O వద్ద లంబముగా $Z'OZ$ ను తీసుకుంటాము. తలములు XOY, YOZ మరియు ZOX లను వరుసగా XY తలము, YZ తలము మరియు ZX తలము అంటాము. $OI = OJ = OK$ అయ్యేటట్లుగా $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ ల పై వరుసగా I, J, K బిందువులను స్థిపరుస్తాము. మూల బిందువు O మరియు ఈ బిందువులు I, J, K లు $OI = OJ = OK = 1$ అయ్యేటట్లుగా $X'OX, Y'OY, Z'OZ$ రేఖలపై వరుసగా నిరూపక వ్యవస్థలను నిర్ణయిఎస్తాయి. $X'OX$ పైని బిందువు యొక్క నిరూపకమును X నిరూపకము, $Y'OY$ పైని బిందువు యొక్క నిరూపకమును Y నిరూపకము మరియు $Z'OZ$ పైని బిందువు యొక్క నిరూపకమును Z నిరూపకము అంటారు. $\overline{XOX'}$ ను X అక్షము, $\overline{YOY'}$ ను Y అక్షము మరియు $\overline{ZOZ'}$ ను Z అక్షము అంటారు. XY, YZ, ZX తలములనునిరూపక తలములు మరియు X, Y, Z అక్షములను నిరూపకాక్షములు అంటారు. $OXYZ$ చ్రటమును సూచక చట్రము లేక నిరూపక వ్యవస్థ అంటారు.

అంతరాళములో P ఏదైనా బిందువు మరియు L, M, N లు వరుసగా X, Y, Z నిరూపకాక్షముల పై P యొక్క లంబపాదములు మరియు L యొక్క x నిరూపకము x, M యొక్క Y నిరూపకము y మరియు N యొక్క Z నిరూపకము z అయితే x, y, z లను వరుసగా P యొక్క x, y, z నిరూపకములు అని అంటాము మరియు $P = (x, y, z)$ అని వ్రాస్తాము. నిరూపక వ్యవస్థ OXYZ దృష్ట్యా అంతరాళములో ఏదైనా బిందువు P ను సంఖ్యల క్రమ త్రయము (x, y, z) తో ఏకైకముగా అనుసంధిస్తారు. విపర్యముగా దత్త సంఖ్యల క్రమత్రయము (x, y, z) కు $OL = x, OM = y, ON = z$ అయ్యేటట్లుగా నిరూపకాక్షముల పై L, M, N లను స్థిరీకరిస్తాము. L వద్ద X అక్షమునకు లంబముగా ఉండే తలము, M వద్ద Y అక్షమునకు లంబముగా ఉండే తలము, N వద్ద Z అక్షమునకు లంబముగా ఉండే తలము P అనే ఏకైక బిందువు వద్ద ఛేదించుకుంటాయి మరియు P యొక్క నిరూపకములు వరుసగా x, y, z. అందువలన $P = (x, y, z)$. వాస్తవ సంఖ్యల ప్రతి క్రమ త్రయము (x, y, z) కి అనుబంధముగా $P = (x, y, z)$ అయ్యేటట్లుగా అంతరాళములో P అనే ఏకైక బిందువు వ్యవస్థితము.

అంతరాళములో OXYZ నిరూపక వ్యవస్థ దృష్ట్యా ఒక బిందువు P యొక్క నిరూపకములు x, y, z అనుకొనుము. P గుండా పోతూ నిరూపక తలాలకు సమాంతరముగా ఉండే తలములతో దీర్ఘచతురస్ర సమాంతర ఫలకము ఏర్పడును. YZ తలమునకు $PM'LN'$ సమాంతరము కావున X అక్షమునకు లంబముగా ఉండును. X అక్షముపై P యొక్క లంబపాదము L.

$$OM = |x|$$

అదే విధముగా $OM = |y|$ మరియు $ON = |z|$

N' యొక్క నిరూపకములు (x, y, o)

$\overline{PN}' \perp \overline{XOY}$, $\overline{PN}' \perp N'L$ కాబట్టి $PL^2 = PN'^2 + N'L^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow PL = \sqrt{y^2 + z^2}$

$\Rightarrow P$ నుండి X అక్షమునకు దూరము $\sqrt{y^2 + z^2}$

అదే విధముగా P నుండి Y అక్షమునకు దూరము $\sqrt{z^2 + x^2}$ మరియు P నుండి Z అక్షమునకు దూరము $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$OP^2 = OL^2 + PL^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

మూల బిందువు నుండి P కు దూరము $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

5. స్థాన సదిశ:

అంతరాళములోని బిందువులు మరియు స్థిర చట్రము దృష్ట్యా సంఖ్యా క్రమ త్రయముల మధ్య అన్వేకనురూపతను మనము చూసాము. ఏ క్రమ త్రయమునైనా స్థాన సదిశగా నిర్వచించాము. దత్త నిరూపకర వ్యవస్థ దృష్ట్యా అంతరాళములోని ప్రతి బిందువు ఏకైక స్థాన సదిశతో అనుసంధింపబడుతుంది. ఈ స్థాన సదిశను స్థిర నిరూపక వ్యవస్థ దృష్ట్యా బిందువు యొక్క స్థానసదిశ అంటాము. కాబట్టి

O యొక్క స్థాన సదిశ $(0, 0, 0)$ I యొక్క స్థాన సదిశ $(1, 0, 0)$

J యొక్క స్థాన సదిశ $(0, 1, 0)$ K యొక్క స్థాన సదిశ $(0, 0, 1)$

$P = (x, y, z)$ అయితే $P = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xI + yJ + zK$

$$\overline{OP} = xI + yJ + zK$$

6. అక్ష పరివర్తన:

OA, O_1A_1లు సమాంతర రేఖలు, $OA = O_1A_1$ మరియు OO_1A_1A సమాంతర చతుర్భుజము అయితే OA, O_1A_1 లు ఒకే దిశలోఉన్నాయని చెప్పవచ్చును. $OXYZ, O_1X_1Y_1Z_1$లు నిరూపక వ్యవస్థలు అనుకొనుము. OX అక్షము O_1X_1కు, OY అక్షము O_1Y_1కు మరియు OZ అక్షము O_1Z_1కు సమాంతరముగా మరియు OX, O_1X_1లు ఒకే దిశలో OY, O_1Y_1లు ఒకే దిశలో, OZ, O_1Z_1లు ఒకే దిశలో ఉంటే $O_1X_1Y_1Z_1$ను $OXYZ$ యొక్క సమాంతర పరివర్తన అంటాము. $OXYZ$ వ్యవస్థ దృష్ట్యా ఒక బిందువు P యొక్క నిరూపకములు x, y, z మరియు $O_1X_1Y_1Z_1$ వ్యవస్థ దృష్ట్యా P యొక్క నిరూపకములు X, Y, Z మరియు $O_1X_1Y_1Z_1$ దృష్ట్యా O_1 యొక్క నిరూపకములు (λ, μ, γ) అయితే

$$X = x - \lambda, \qquad Y = y - \mu, \qquad Z = z - \gamma$$

i.e. $$x = X + \lambda, \qquad y = Y + \mu, \qquad z = Z + \gamma$$

అక్ష పరిభ్రమణము:- మూల బిందువును మార్చకుండా $OXYZ$ వ్యవస్థలోని అక్షములను మార్చితే అక్షపరివర్తనను పరిభ్రమణము ద్వారా జరిగినదని అంటాము. క్రొత్త అక్షములు $\overline{OX}', \overline{OY}', \overline{OZ}'$లు పరస్పరము లంబముగా ఉండి మరియు $OXYZ$ దృష్ట్యా దిక్ కొసైనులు వరుసగా ℓ_1, m_1, n_1, ℓ_2, m_2, n_2 మరియు ℓ_3, m_3, n_3 అయితే $OXYZ$ వ్యవస్థ దృష్ట్యా బిందువు (x, y, z) యొక్క నిరూపకములు మరియు $O_1X_1Y_1Z_1$ దృష్ట్యా అదే బిందువు యొక్క నిరూపకములు (X, Y, Z) మధ్య సంబంధమును క్రింది విధముగా చెప్తాము.

$$x = X\ell_1 + Y\ell_2 + Z\ell_3 \qquad X = \ell_1 x + m_1 y + n_1 z$$

$$y = Xm_1 + Ym_2 + Zm_3 \qquad Y = \ell_2 x + m_2 y + n_2 z$$

$$z = Xn_1 + Yn_2 + Zn_3 \qquad Z = \ell_3 x + m_3 y + n_3 z$$

$$A = \begin{pmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$ ని పరివర్తన మాత్రిక అంటారు.

	x	y	z
X	ℓ_1	m_1	n_1
Y	ℓ_2	m_2	n_2
Z	ℓ_3	m_3	n_3

ఈ క్రింది సిద్ధాంతములను ఉపపత్తి లేకుండా ప్రవచిస్తాము.

సిద్ధాంతము:- $OXYZ$ నుండి $OX'Y'Z'$ కు అక్షసమాంతర పరివర్తన ద్వారా

$f(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ ని

$g(X, Y, Z) = a'X^2 + b'Y^2 + c'Z^2 + 2f'YZ + 2g'ZX + 2h'XY$ కు పరివర్తన చేస్తే

(1) $a + b + c = a' + b' + c'$

(2) $ab + bc + ca - f^2 - g^2 - h^2 = a'b' + b'c' + c'a' - f'^2 - g'^2 - h'^2$

మరియు (3) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix}$

సిద్ధాంతము:- $OXYZ$ నుండి $OX'Y'Z'$ కు అక్ష పరివర్తనను పరిభ్రమణము ద్వారా

$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d$ ను

$g(X, Y, Z) = a'X^2 + b'Y^2 + c'Z^2 + 2f'YZ + 2g'ZX + 2h'XY + 2u'X + 2v'Y + 2w'Z + d'$ కు

పరివర్తన చేస్తే

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & h' & g' & u' \\ h' & b' & f' & v' \\ g' & f' & c' & w' \\ u' & v' & w' & d' \end{vmatrix}$$

7. దిక్ సంఖ్యలు మరియు దిక్ కొసైన్‌లు:

ఒక సరళ రేఖ L నిరూపకాక్షములతో ధనాత్మక దిశలో చేసే కోణముల కొసైను విలువలను ఆ రేఖ L యొక్క దిక్ కొసైన్‌లుగా నిర్వచిస్తాము.

L ఒక సరళరేఖ మరియు మూలబిందువు గుండా పోతూ L కు సమాంతరముగా ఉండే రేఖ L' అని అనుకొనుము. L' పై $P \neq 0$ బిందువు యొక్క నిరూపకములు x, y, z లను L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు అంటారు. $P \neq 0 \neq P'$లు $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$ ను తృప్తిపరిచే విధముగా L' పై $P(x, y, z)$ మరియు $P'(x', y', z')$లు ఉన్నాయి. కాబట్టి L యొక్క దిక్ సంఖ్యల జత $(x, y, z), (x', y', z')$లు $\mathbb{R}$ లో ఏదైనా ఒక $\lambda \neq 0$ కు $x = \lambda x', y = \lambda y', z = \lambda z'$ ను తృప్తిపరచును. సరళరేఖ L' పై $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ అయ్యేటట్లుగా రెండు జతలు $(\ell, m, n), (-\ell, -m, -n)$ లు దానిపై ఉన్నవి. ఈ దిక్ సంఖ్యలను L యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు అంటారు. జ్యామితిపరముగా దీనిని ఈ క్రింది విధముగా పేర్కొంటాము. L రేఖ x అక్షము, y అక్షము మరియు z అక్షములతో వరుసగా ధనాత్మక దిశలో α, β, γ కోణములను చేస్తే $\text{Cos}\,\alpha, \text{Cos}\,\beta, \text{Cos}\,\gamma$ లను L యొక్క దిక్ కొసైనులు అంటారు. $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ ని నిరూపించవచ్చును.

8. బీజీయ తలములు:

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ప్రమేయమనుకొనుము. ప్రతి బిందువు $P(x, y, z)$కు అనురూపముగా ఒక వాస్తవ సంఖ్య $F(x, y, z)$ ఉండును. $\mathbb{R}^3$లో $S = \{P/P = (x, y, z); F(x, y, z) = 0\}$ అనుకొనుము, $F(x, y, z) = 0$ను తృప్తిపరిచే అన్ని బిందువుల సమితి S. Sను తలము అంటారు మరియు $F(x, y, z) = 0$ సమీకరణము Sను సూచిస్తున్నది. అలాగే S యొక్క సమీకరణము $F(x, y, z) = 0$ అంటాము. $F(x, y, z)$ అనునది x, y, z లలో శూన్యేతర బహుపది అయితే $a \neq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ మరియు $\gamma \geq 0$కు $ax^\alpha y^\beta z^\gamma$ రూపములోని పదముల పరిమిత మొత్తము F. Fలోని పదాల ఘాతాల అధికతను మొత్తము $\alpha + \beta + \gamma$, $F(x, y, z)$ యొక్క తరగతి అంటాము. $F(x, y, z) = 0$ సూచించే తలమును బీజీయ తలము అంటాము మరియు $F(x, y, z)$ యొక్క తరగతిని తలము యొక్క తరగతి అంటాము. x, y, z లలో ఏకఘాత సమీకరణమును ఋజు సమీకరణము అంటాము మరియు రెండవ తరగతి తలమును వార్గికము లేక శాంకవజము అంటాము.

పాఠ్యభాగ రచయిత
I. రామభద్ర శర్మ

"నేను ఆలోచిస్తున్నాను కనుక నేను ఉన్నాను"
"I am thinking therefore I exist"

రెనె డెకార్టె (1595 - 1650):

కార్టీషియస్‌గా కూడా పిలువబడే రెనెడ్‌కార్టె ప్రముఖ ఫ్రెంచి తత్వవేత్త, గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు, విజ్ఞాన శాస్త్రవేత్త. ఆయన "నవీన తత్వజ్ఞాన శాస్త్ర నిర్మాత" మరియు "నవీన గణిత శాస్త్ర పితామహుడు"గా పేరుగాంచి నవీన యుగపు ప్రముఖ మరియు ప్రాభావిత తత్వవేత్తలలో ఒకరిగా పేర్కొనబడెను. పశ్చిమ దేశాలలో విజ్ఞాన శాస్త్ర విప్లవము యొక్క వ్యూహరచన చేసిన వారిలో డెకార్టె ఒకరు.

కార్టీషియన్ నిరూపక వ్యవస్థ నిర్మాతగా కలన గణితము మరియు విశ్లేషణల రూపకల్పనలో బీజగణితము మరియు జ్యామితిల మధ్య నిర్ణయాత్మకమైన వారధియైన నిరూపక జ్యామితిని డెకార్టె కనుగొన్నారు. సమతల జ్యామితి మరియు బీజగణితము ప్రతిపాదించిన నిరూపక వ్యవస్థను కార్టీషియన్ నిరూపక వ్యవస్థగా పిలవడము ద్వారా గణిత శాస్త్రజ్ఞులు ఆయనపట్ల గౌరవం వ్యక్తపరిచారు. ఆయన ప్రముఖ పదాలైన

"I Think, Therefore I am" అనునవి 'ప్రిన్సిపుల్స్ ఆఫ్ ఫిలాసఫి', §7లోమరియు "డిస్‌కోర్స్ ఆన్ మెథడ్"లో పార్ట్ IV లో పొందుపరచబడియున్నవి.

గణిత శాసనము: స్పర్శరేఖ సమస్యలకు సూక్ష్మరాశి కలన గణితమును అనువర్తింపచేయుట ద్వారా న్యూటన్ మరియు లెబ్నిట్జ్‌ల కలన గణితమునకు డెకార్టె సిద్ధాంతము ఆధారమైనది. తద్వారా నవీన గణిత శాస్త్ర శాఖలలో పరిణామములకు ప్రోత్సాహకారియైనది. డెకార్టె సంజ్ఞల నియమము నవీన గణిత శాస్త్రములో ఒక ప్రమేయము యొక్క ధనాత్మక, ఋణాత్మక మరియు శూన్య పరిమాణములను నిర్ధారించుటలో వినియోగింపబడతాయి. దృష్టి, వెలుతురు సంబంధిత శాస్త్రములో కూడా డెకార్టె ప్రభావం తగినంతగా కనిపిస్తుంది.

డి.ఎల్. హాస్పిటల్ (1661 - 1704):

డి.ఎల్. హాస్పిటల్ ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రవేత్త. ఆయన కలన గణితము పై వ్రాసిన ప్రథమ పాఠ్యపుస్తకములో ఆయన గురువు జోహాన్ బెర్నౌలీ యొక్క ఉపన్యాసములను పొందుపరిచారు.

పాఠము - 1

తలములు

1.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠములో తలమునకు చెందిన వివిధ విషయములు అనగా తలము యొక్క సమీకరణము, తలముల మధ్య కోణములు, తలము నుండి దూరము, తలముల మధ్య దూరము మరియు తలముల నికాయము (వ్యవస్థ, సరణి) మొదలగునవి విద్యార్థికి పరిచయము చేయబడినవి.

1.2 అంశాలక్రమము:

1.3 ఉపోద్ఘాతము

1.4 తలము సమీకరణములు

1.5 రెండు తలముల మధ్య కోణములు

1.6 బిందువు నుండి తలమునకు దూరము

1.7 తలముల నికాయము

1.8 తలము పైకి విక్షేపములు మరియు చతుర్ముఖి యొక్క ఘనపరిమాణము

1.9 S.A.Q.లకు సమాధానములు

1.10 సారాంశము

1.11 సాంకేతిక పదాలు

1.12 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

1.13 అభ్యాసము

1.14 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య

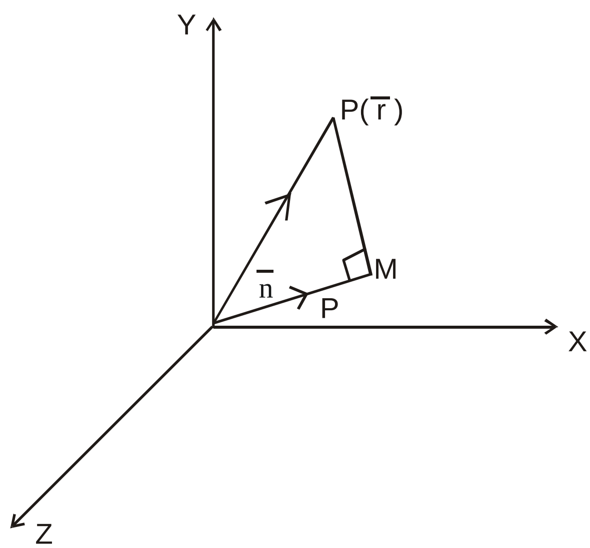
1.3 ఉపోద్ఘాతము:

ప్రాథమికాంశములు **2.7**లో చెప్పిన విధముగా ఒక తలమును దాని పైని ఒక బిందువు (లంబపాదము) వద్ద రేఖకు లంబముగా ఏకైకముగా నిర్ణయించవచ్చును. ఈ ఫలితమును ఉపయోగించి అభిలంబ రూపములో తలము యొక్క సమీకరణమును పొందవచ్చును. దీని నుండి తలమునకు వివిధ రకాల సమీకరణములు రాబట్టవచ్చును. తలము యొక్క సమీకరణము x, y, z లలో ఏకఘాత (ఋజు) సమీకరణము అని మనము తెలుసుకొనగలము.

1.4 తలము యొక్క సమీకరణములు:

1.4.1 సిద్ధాంతము: తలము యొక్క సమీకరణము మొదటి తరగతి సమీకరణము మరియు మొదటి తరగతి సమీకరణమును తృప్తిపరిచే (x, y, z) అనే బిందువుల బిందుపథము తలము అవుతుంది.

ఉపపత్తి: మనము ముందుగా తలము యొక్క సమీకరణమును సదిశా రూపములో రాబట్టవలెను. తలమునకు వెలుపల ఒక బిందువు ఉన్నట్లయితే ఆ బిందువు నుండి పోతూ తలములోని ప్రతి సరళ రేఖకు లంబముగా ఉండే ఏకైక సరళరేఖ వ్యవస్థితము.



దత్త తలము π, మూల బిందువు నుండి π పై లంబపాదము M మరియు $p = OM\ (p \geq 0)$ మరియు $\overline{OM}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ $\bar{n}$ అనుకొనుము.

$P \in \pi$ అయితే $\bar{n} \cdot \overline{PM} = 0$.

$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM}$, $\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP}$ కావున

$\bar{n} \cdot \left(\overline{OM} - \overline{OP}\right) = 0 \quad \Rightarrow \bar{n} \cdot \overline{OM} = \bar{n} \cdot \overline{OP}$

$\overline{OP} = \bar{r}$ అనుకొనుము. $\bar{n} \cdot \bar{r} = OM = p$

$\left(\bar{n}\cdot\overline{OM}=\bar{n}\cdot p\bar{n}=p\right)$

$\bar{r}\cdot\bar{n}=p$ సమీకరణమును $P\in\pi$ బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\bar{r}$ తృప్తిపరుచును.

విలోమంగా $\bar{r}\cdot\bar{n}=p$ అనుకొనుము. అంతరాళములో P బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $\bar{r}=\overline{OP}$. $P\in\pi$ అని చూపవలెను. పైన చెప్పబడిన M కు $\bar{n}\cdot\overline{PM}=\bar{n}\cdot\left(\overline{PO}+\overline{OM}\right)=-\bar{n}\cdot\bar{r}+\bar{n}\cdot\overline{OM}=-\bar{n}\cdot\bar{r}+p=0$.

$\Rightarrow\overline{PM}$ సదిశ $\bar{n}$ కు లంబము. కాబట్టి $PM\perp OM,\ P\in\pi$ $\quad(0\cdot27)$

$P\in\pi\Leftrightarrow\bar{r}\cdot\bar{n}=p\Leftrightarrow$ అందువలన తలము π యొక్క సదిశా సమీకరణము $\bar{r}\cdot\bar{n}=p$. ఈ సదిశా సమీకరణమును ఉపయోగించి, తలము యొక్క సమీకరణము మొదటి తరగతి సమీకరణమని నిరూపిద్దాము.

$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ మరియు $\bar{n}=\ell\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}$ అయితే $\bar{r}\cdot\bar{n}=p$ యొక్క రూపము $\ell x+my+nz=p$ గా మారును.

ఇది కార్టిషియన్ రూపములోని తలము యొక్క సమీకరణము.

ℓ, m, n లు $\bar{n}$ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు కావున ℓ, m, n లలో కనీసం ఒకటి శూన్యేతరం. అందువలన తలము యొక్క సమీకరణము మొదటి తరగతి సమీకరణము.

1.4.2 నిర్వచనము: లంబ రూపములో తలము యొక్క సమీకరణము: మూల బిందువు నుండి లంబ దూరము p మరియు తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ కొసైన్‌లు ℓ, m, n లు ఉన్న తలము యొక్క సమీకరణము $\ell x+my+nz=p$ ను లంబరూపములో తలము యొక్క సమీకరణము అంటారు.

1.4.3 ఉప సిద్ధాంతము: x, y, z లలోని ప్రతి మొదటి తరగతి సమీకరణము తలమును సూచించును.

ఉపపత్తి:

a, b, c లలో ఒకటి శూన్యేతరం అనుకుని సమీకరణం $ax+by+cz+d=0\cdots(1)$ గా పరిగణిద్దాం.

$a^2+b^2+c^2>0$, కావున $d\le 0\Rightarrow -d\ge 0$. అంతేకాక $ax+by+cz+d=0\Leftrightarrow ax+by+cz=-d$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z=\frac{-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\quad(|d|=-d)$$

$\bar{r}=(x, y, z)$,

$\bar{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ మరియు $p = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ కాబట్టి

(1)ని (x, y, z) తృప్తిపరచడం $\bar{r} \cdot \bar{n} = p \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ని (x, y, z) తృప్తిపరిచినప్పుడు మాత్రం సంభవం.

(2) తలము యొక్క సమీకరణము కావున (1) తలము యొక్క సమీకరణమును సూచించును.

1.4.4 రెండు ఋజు సమీకరణాలు ఒకే తలమును సూచించుటకు నియమం:

సిద్ధాంతము: $a_1x + b_1y + x_1z + d_1 = 0 \cdots (1)$ $\quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \cdots (2)$

సమీకరణములు ఒకే తలమును సూచించుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 \cdots (3)$$

ఉపపత్తి: $\bar{n}_1 = (a_1, b_1, c_1), \bar{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ అనుకుంటే (1) యొక్క లంబ రూపము $\bar{r} \cdot \bar{n}_2 = -d_1$ మరియు (2) యొక్క లంబరూపము $\bar{r} \cdot \bar{n}_2 = -d_2$.

$\bar{n}_1$ మరియు $\bar{n}_2$ లు వరుసగా (1) మరియు (2) తలములకు అభిలంబములు. కాబట్టి పై సమీకరణములు ఒకే తలమును సూచిస్తే, $\bar{n}_1 = k\bar{n}_2$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{R}$లో k వుంటుంది.

$$\Rightarrow a_1 = ka_2,\ b_1 = kb_2 \text{ మరియు } c_1 = kc_2 \cdots (4)$$

తలములో ఏ (x, y, z)కైనా

$$0 = d_2 + a_2x + b_2y + c_2z = d_1 + a_1x + b_1y + c_1z$$

$$= d_1 + k(a_2x + b_2y + c_2z) = d_1 - kd_2$$

$\Rightarrow d_1 = kd_2$. అందువలన $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = d_1 : d_2 = k : 1$

విలోమంగా $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = d_1 : d_2 = k : 1$ అయితే $a_1 = ka_2, b_1 = kb_2, c_1 = kc_2, d_1 = kd_2$

కాబట్టి $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \Leftrightarrow a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. అందుచేత రెండు సమీకరణములు ఒకే తలమును సూచిస్తాయి.

1.4.5 గమనిక:-

1. $\bar{r} \cdot \bar{m} = q$ మరియు $\bar{m} \neq \bar{o}$. $\bar{m}$ దిశలో మూలబిందువు నుండి $\frac{|q|}{|\bar{m}|}$ దూరములో ఉన్న తలము $\bar{r} \cdot \bar{m} = q$ అనే సమీకరణము సూచించును.

2. మూలబిందువు గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము $\ell x + my + nz = 0$ రూపములో ఉన్న మొదటి తరగతి సమఘాత సమీకరణము.

3. $ax + by + cz + d = 0$ తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c లు.

4. $ax + by + cz + d = 0$ తలమునకు మూలబిందువు నుండి దూరం $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

5. $ax + by + cz + d = 0$ తల సమీకరణానికి లంబరూపము

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} z = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

అంతర్ ఖండములు:

1.4.6 నిర్వచనము: ఒక తలము $x-$ అక్షమును $A(a,0,0)$ వద్ద, $y-$ అక్షమును $B(0,b,0)$ వద్ద మరియు $z-$ అక్షమును $C(0,0,c)$ వద్ద ఖండించినట్లయితే a, b, c లను వరుసగా తలము యొక్క $x-$ అంతర్ ఖండము, $y-$ అంతర్ ఖండము మరియు z అంతర్ ఖండము అంటారు.

1.4.7 సిద్ధాంతము:

a, b, c వాస్తవ సంఖ్యలు, $abc \neq 0$ అయినప్పుడు X, Y, Z నిరూపకాక్షములతో వరుసగా a, b, c అంతర్ ఖండములు చేయు తలము యొక్క సమీకరణము $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

ఉపపత్తి: నిరూపకాక్షములతో a, b, c అంతర్ ఖండములు చేసే తలము π యొక్క సమీకరణము $\ell x + my + nz = d$ అనుకొనుము. $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ మరియు $(0, 0, c)$ లు తలముపై ఉన్నవి కాబట్టి $\ell a = mb = nc = d$

$a \neq 0 \neq b \neq 0 \neq c \neq 0$ కాబట్టి $\ell = \dfrac{d}{a}, m = \dfrac{d}{b}, n = \dfrac{d}{c}$

దత్త తలమును సూచించు సమీకరణము $\dfrac{d}{a}x + \dfrac{d}{b}y + \dfrac{d}{c}z = d$.

ℓ, m, n లలో ఒకటి శూన్యేతరము మరియు $d \neq 0$ కావున $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

1.4.8 (a) నిరూపకాక్షములకు సమాంతరముగా ఉండే తలములు: $ax + by + cz + d = 0$ తలము $x-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంటే తలము యొక్క అభిలంబము x అక్షమునకు లంబముగా ఉంటుంది. కాబట్టి $a(1) + b(0) + c(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ (x అక్షం దిక్ సంఖ్యలు 1, 0, 0). కాబట్టి తలము యొక్క సమీకరణము

$by+cz+d=0$. అట్లే $y-$ అక్షము మరియు $z-$ అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్న తలముల సమీకరణములు వరుసగా $ax+cz+d=0$ మరియు $ax+by+d=0$.

(b) నిరూపక తలములకు సమాంతరముగా ఉండే తలములు:

సిద్ధాంతము: XY తలము యొక్క సమీకరణము $Z=0$, YZ తలము యొక్క సమీకరణము $X=0$ మరియు ZX తలము యొక్క సమీకరణము $Y=0$.

ఉపపత్తి: XY తలములో బిందువు ఉన్నది. మరియు XY తలమునకు అభిలంబము $Z-$ అక్షము, ఈ అక్షము దిక్ కొసైనులు 0, 0, 1. కావున $XY-$ తలము యొక్క సమీకరణము $Z=0$ ఇట్లే ZX తలము యొక్క సమీకరణము $Y=0$, YZ తలం సమీకరణము $X=0$.

1.4.9 ఉప సిద్ధాంతం: YZ తలమునకు సమాంతరముగా ఉన్న ప్రతీ తలము యొక్క సమీకరణమూ $ax+d=0$ రూపములోను ZX తలమునకు సమాంతరముగా ఉన్న తలము $by+d=0$ మరియు XY తలమునకు సమాంతరముగా ఉన్న తలము $cz+d=0$ రూపములో ఉండును.

అరేఖీయ బిందువుల గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము:

1.4.10 సిద్ధాంతము: మూడు అరేఖీయ బిందువులు $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ గుండా పోయే తలమునకు సదిశా సమీకరణము $\left[\left(\bar{r}-\bar{a}\right)\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\right]=0$. ఇచ్చట $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు వరుసగా A, B, C ల యొక్క స్థాన సదిశలు.

తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$

ఉపపత్తి: A, B, C లను కలిగియున్న తలము π అనుకొనుము మరియు $\bar{r}$ స్థాన సదిశగా గల బిందువు $P(x, y, z)$ అనుకొనుము.

π పై P ఉన్నది $\Leftrightarrow$ π పై AB, AC, AP లు ఉన్నవి.

కాబట్టి AB, AC, AP లు సతలీయాలు.

ఈ రేఖల సతలీయతకు నియమము

$$\left[\overline{AP}\ \overline{AB}\ \overline{AC}\right]=0 \text{ i.e. } \left[\bar{r}-\bar{a},\ \bar{r}-\bar{b},\ \bar{r}-\bar{c}\right]=0 \cdots (1)$$

(1) నుండి π యొక్క సదిశా సమీకరణము

$$\bar{r}-\bar{a}=\left(x-x_1, y-y_1, z-z_1\right) \quad \bar{b}-\bar{a}=\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right)$$

$\bar{c}-\bar{a}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$ కావున

$$\left[\bar{r}-\bar{a}\quad \bar{b}-\bar{a}\quad \bar{c}-\bar{a}\right]=\Delta=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

π యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

1.4.11 ఉప సిద్ధాంతము: $A=(x_1,\ y_1,\ z_1),\ B=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ మరియు $C=(x_3,\ y_3,\ z_3)$ లు అరేఖీయాలైతే $A,\ B,\ C$ లను కలిగియున్న తలము π యొక్క సమీకరణము

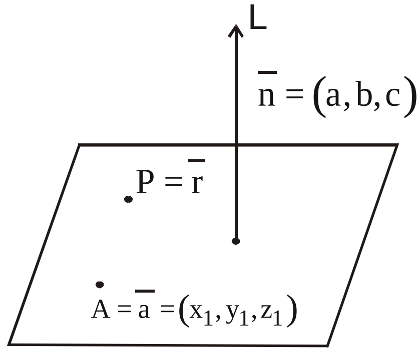
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ఉపపత్తి: ప్రతి అడ్డువరుస నుండి రెండవ అడ్డ వరుసను వ్యవకలనము చేసి మరియు ఆఖరి నిలువు వరుస యొక్క పదాలలో విస్తరింపచేసిన పై నిర్ధారకము **1.4.10**లోని Δ గా మారును.

ఒక బిందువు గుండా పోతూ మరియు ఒక రేఖకు లంబముగా ఉండే తలము:

1.4.12 సిద్ధాంతము: $\bar{a}$ స్థాన సదిశ కలిగిన బిందువు $A=(x,\ y,z)$ గుండా పోతూ మరియు $a,\ b,\ c$ లు దిక్ సంఖ్యలుగా గల రేఖ L కు లంబముగా ఉన్న తలము π యొక్క సదిశా సమీకరణము $(\bar{r}-\bar{a})\cdot\bar{n}=0$. L దిశలో $\bar{n}$ యూనిట్ సదిశ. ఈ తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$.

ఉపపత్తి:



$P = \bar{r} = (x, y, z)$ ఏదేని బిందువనుకొనుము.

$\overline{AP} = \bar{r} - \bar{a} \quad = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

$P \in \pi \Leftrightarrow \pi$ లో AP ఉన్నది. $\Leftrightarrow \overline{AP} \perp \bar{n} \Leftrightarrow (\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$

$P \in \pi \Leftrightarrow (\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$

π యొక్క సదిశా సమీకరణం $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$

$(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c)$ కావున

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ సమీకరణము π యొక్క కార్టీషియన్ రూపము.

మూడు అరేఖీయ బిందువుల గుండా పోయే తలమునకు పరామితీయ రూపములో సమీకరణము.

1.4.13 సిద్ధాంతము: $A(\bar{a})$, $B(\bar{b})$, $C(\bar{c})$ మూడు అరేఖీయ బిందువుల గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము s, t లు అదిశలైనప్పుడు $\bar{r} = (1 - s - t)\,\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}$.

ఉపపత్తి: A, B, C లున్న తలములో $\bar{r}$ స్థాన సదిశ గల బిందువు $P \Leftrightarrow \overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}$ లు సతలీయాలు

$\Leftrightarrow \bar{r} - \bar{a}, \bar{b} - \bar{a}, \bar{c} - \bar{a}$ లు సతలీయాలు. $\Leftrightarrow \overline{AP}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ లలో ప్రతి సదిశ మిగిలిన రెండు సదిశల ఋజు సంయోగము. ఇది జరగడానికి $\mathbb{R}$ లో s, t లు $\bar{r} - \bar{a} = s(\bar{b} - \bar{a}) + t(\bar{c} - \bar{a})$, అయ్యేటట్లు ఉండవలె.

$\Leftrightarrow \bar{r} = (1 - s - t)\,\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}$

ఉదాహరణలు:

1.4.14 $2x - 3y + 4z = 12$ **తలము యొక్క అంతర ఖండములు కనుగొనుము:**

సాధన: పద్ధతి - 1: ఇచ్చిన తలము యొక్క సమీకరణము $2x - 3y + 4z = 12$

తలము యొక్క అంతర ఖండ రూపము $\frac{2x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{4z}{12} = 1$ i.e., $\frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$

x అంతర ఖండము **6**, y అంతర ఖండము **-4**, z అంతర ఖండము **3.**

పద్ధతి - 2: దత్త తలము, నిరూపకాక్షములను $(x_0, 0, 0), (0, y, 0)$ మరియు $(0, 0, z_0)$ వద్ద ఖండిస్తే $2x_0 = 12 \Rightarrow x_0 = 6$. అదే విధముగా $y_0 = -4, z_0 = 3$.

కాబట్టి x అంతర ఖండము **6**, y అంతర ఖండము **-4**, z అంతర ఖండము **3.**

1.4.15 $2x-2y+z=5$ **తలమునకు అభిలంబము యొక్క దిక్ సంఖ్యలు ఏమిటి? తలము యొక్క సమీకరణమును అభిలంబ రూపములో వ్రాయుము:**

సాధన: నిర్వచనము ప్రకారము ఇచ్చిన సమీకరణములోని x, y, zల గుణకాలు తలమునకు అభిలంబము యొక్క దిక్ సంఖ్యలు అవుతాయి.

$2x-2y+z-5=0$ తలమునకు అభిలంబము యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 2, -2, 1.

$ax+by+cz+d=0$ తలము యొక్క అభిలంబ రూపము

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}z=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ఇచ్చిన తలమునకు అభిలంబ రూపము $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=\frac{5}{3}$.

1.4.16 $(2,2,-1),(3,4,2),(7,0,6)$ **బిందువుల గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము:**

సాధన: ఇచ్చిన బిందువుల గుండా పోయే తలము π అనుకొనుము.

$$A=\bar{a}=(2,2,-1),\ B=\bar{b}=(3,4,2), C=\bar{c}=(7,0,6)$$

$P=\bar{r}=(x,y,z)$, తలము π పై ఏదేని బిందువనుకొనుము.

$\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}$లు సతలీయాలు.

$$\Rightarrow [\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}]=0$$

$$\overline{AP}=(x-2, y-2, z+1), \overline{AB}=(1,2,3), \overline{AC}=(5,-2,7)$$

$$[\overline{AP}, \overline{AB}, \overline{AC}]=\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix}=20(x-2)+8(y-2)-12(z+1)$$

$$=20x+8y-12z-68$$

తలము π యొక్క సమీకరణము

$$20x+8y-12z-68=0 \quad \text{i.e.,} \quad 5x+2y-3z-17=0$$

1.4.17 తలమునకు మూలబిందువు నుండి గీసిన లంబ పాదము (2, -3, 4) అయితే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము:

సాధన: ఇచ్చిన బిందువు P నుండి π తలమునకు గీసిన లంబరేఖ తలమును ఖండించే బిందువును, π మీద P బిందువు యొక్క లంబపాదము అంటాము. మూలబిందువు O నుండి π తలమునకు లంబపాదము $A = (2, -3, 4)$ అయినప్పుడు $\overline{OA}$ π తలమునకు అభిలంబము, A తలము పై బిందువు మరియు $\overline{OA}$ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు **2, -3, 4** కాబట్టి తలము యొక్క సమీకరణము

$$2(x-2)-3(y+3)+4(z-4)=0$$

అనగా $2x-3y+4z-29=0$

1.4.18 ఒక తలము నిరూపకాక్షములను A, B, C ల వద్ద తాకును. Δ ABC యొక్క కేంద్రాభాసము (a, b, c) అయితే తలము యొక్క సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$ అని చూపుము:

సాధన: $A=(x_1, 0, 0), B=(0, y_1, 0), C=(0, 0, z_1)$ బిందువులు వరుసగా x, y, z అక్షముల మీది బిందువులు.

ΔABC యొక్క కేంద్రాభాసము $\left(\frac{x_1}{3}, \frac{y_1}{3}, \frac{z_1}{3}\right)$. ఇది (a, b, c) కాబట్టి

$$a=\frac{x_1}{3},\ b=\frac{y_1}{3},\ c=\frac{z_1}{3} \Rightarrow x_1=3a,\ y_1=3b,\ z_1=3c$$

$$A=(3a, 0, 0),\ B=(0, 3b, 0),\ C=(0, 0, 3c)$$

ABC తలము యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}+\frac{z}{3c}=1 \quad \text{అనగా} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3\cdot$$

1.4.19 S.A.Q.: $(6, -4, 4), (0, 0, -4)$ బిందువులను కలిపే రేఖ $(-1, -5, -3), (1, 2, -5)$ బిందువులను కలిపే రేఖను ఖండించునని చూపుము.

1.4.20 S.A.Q.: $(0, 4, 3)$ బిందువును మరియు $(-1, -5, -3), (-2, -2, 1)$ బిందువుల గుండా పోయే రేఖను కలిగియున్న తలము యొక్క సమీకరణము వ్రాయుము. దీన్నించి $(0, 4, 3), (-1, -5, -3), (-2, -2, 1)$ మరియు $(1, 1, -1)$ బిందువులు సతలీయాలు అని చూపుము.

1.5 రెండు తలముల మధ్య కోణములు:

ఏదైనా తలముల యుగ్మము π_1, π_2 కు అంతరాళములోని యాదృచ్ఛిక బిందువు P నుండి గీసిన అభిలంబముల మధ్య కోణములు ఏర్పడును. ఆ కోణములు సంపూరకములు మరియు P పై ఆధారపడవు.

1.5.1 నిర్వచనము: రెండు తలముల అనుబంధ అభిలంబముల మధ్య కోణములను ఆ రెండు తలముల మధ్య కోణము అంటాము.

1.5.1(ఎ) నిర్వచనము: రెండు తలముల సమద్విఖండన రేఖ గుండాపోతూ వాటితో సమాన కోణములు చేయు తలమును ఆ రెండు తలముల కోణ సమద్విఖండన తలము అంటారు.

1.5.2 సిద్ధాంతము: $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ మరియు $\pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$తో సూచించబడే తలములు π_1, π_2ల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\text{Cos}\ \theta = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

ఉపపత్తి: π_1 అభిలంబము యొక్క దిక్ సంఖ్యలు a_1, b_1, c_1 కావున π_1 యొక్క అభిలంబ సదిశ $\overline{m}_1 = (a_1, b_1, c_1)$. ఇట్లే π_2 యొక్క అభిలంబ సదిశ $\overline{m}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

$\overline{m}_1, \overline{m}_2$ల మధ్య కోణము θ అయితే $\text{Cos}\ \theta = \pm \dfrac{\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2}{|\overline{m}_1|\ |\overline{m}_2|} = \pm \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

1.5.3 ఉప సిద్ధాంతములు:

(i) తలములు $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$లు సమాంతరములు $\Leftrightarrow a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ మరియు లంబములు $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

(ii) $ax + by + cz + d = 0$ తలమునకు సమాంతరముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము $ax + by + cz + k = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

(iii) $\bar{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ గుండాపోతూ $ax + by + cz + d = 0$కు సమాంతరముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము $(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{n} = 0,\ \bar{n} = (a, b, c)$

i.e., $(a - a_0)x + (b - b_0)y + (c - c_0)z = 0$

(iv) $\overline{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ గుండాపోతూ మరియు a, b, cలు దిక్ సంఖ్యలు ఉన్న రేఖకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము $(\bar{r} - \overline{r_0}) \cdot \bar{n} = 0, \quad \bar{n} = (a, b, c)$

i.e., $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ఉపపత్తి: (i) మరియు (ii)లు **1.4.2** నుండి వచ్చును.

(iii) మరియు (iv)లు తుల్యములు.

(iv)ను నిరూపించిన చాలు.

π తలము పై $\overline{r_0}$ స్థాన సదిశతో $A=(x_0, y_0, z_0)$ ఇచ్చిన బిందువు మరియు π తలము పై $\bar{r}$ స్థాన సదిశతో $P=(x, y, z)$ బిందువు అనుకొనుము.

$$\overline{AP}=\bar{r}-\overline{r_0}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

దిక్ సంఖ్యలు a, b, c లతో π తలమునకు లంబముగా ఉండే రేఖ L అనుకొనుము. L దిశలో $\bar{n}=(a, b, c)$ సదిశ అనుకొనుము.

$\Leftrightarrow$ π లో ఉన్న ప్రతి రేఖకు L లంబము. $\Leftrightarrow$ AP కి L లంబము $\Leftrightarrow$ AP కి $\bar{n}$ లంబము

$\Leftrightarrow (\bar{r}-\overline{r_0})\cdot\bar{n}=0 \Leftrightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(a, b, c)=0$

$\Leftrightarrow$ $\bar{n}$ కు లంబముగా ఉంటూ A గుండాపోయే తలము π యొక్క సమీకరణము

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

1.5.4 $(4, 0, 1)$ బిందువు గుండా పోతూ $4x+3y-12z+8=0$ తలమునకు సమాంతరముగా ఉండే తలము సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $4x+3y-12z+8=0$ తలమునకు సమాంతరముగా ఉన్న తలము యొక్క సమీకరణము $4x+3y-12z+k=0$ రూపములో ఉండును. ఇది $(4, 0, 1)$ బిందువు గుండా పోవును కాబట్టి $4(4)+3(0)-12(1)+k=0$ కాబట్టి $k=-4$. కాబట్టి తలము యొక్క సమీకరణము $4x+3y-12z-4=0$.

1.5.5 $(2, 2, 1)$ మరియు $(9, 3, 6)$ బిందువుల గుండాపోతూ మరియు $2x+6y+6z=9$ తలమునకు లంబముగా ఉన్న తలము π యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము:

సాధన: $A=(2, 2, 1)$ మరియు $B=(9,3,6)$ మరియు తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c అనుకొనుము. AB యొక్క దిక్ సంఖ్యలు **7, 1, 5.**

తలము యొక్క అభిలంబమునకు AB లంబముగా ఉన్నది కావున $7a+b+5c=0 \cdots (1)$

$2x+6y+6z=9$ తలమునకు π అనే తలము లంబముగా ఉన్నది.

$\Leftrightarrow$ వాటి అనుబంధ అభిలంబములు పరస్పరము లంబముగా ఉండును.

i.e., $2a+6b+5c=0 \cdots (2)$

(1) మరియు **(2)**లను సాధించగా

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 6 \end{array}$$

$$\frac{a}{6-30}=\frac{b}{10-42}=\frac{c}{42-2} \quad \Rightarrow \frac{a}{-24}=\frac{b}{-32}=\frac{c}{40} \quad \Rightarrow \frac{a}{-3}=\frac{b}{-4}=\frac{c}{5}$$

π యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు $-3, -4, 5$

π యొక్క సమీకరణము $-3(x-2)-4(y-2)+5(z-1)=0 \quad 3x+4y-5z-9=0$.

1.5.6 $A(1, -2, 4), B(3, -4, 5)$ **బిందువుల గుండా పోతూ మరియు** XY **తలమునకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము** $x+y+1=0$ **అని చూపుము:**

సాధన: $A=(1,-2,4), B=(3, -4, 5)$ అనుకొనుము.

AB యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $2, -2, 1$. కావలసిన తలమునకు సమీకరణము $ax+by+cz+d=0$ అనుకొనుము. తలము యొక్క అభిలంబము L కు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c.

AB తలము పై ఉన్నది కావున AB మరియు L లు లంబములు.

$$\Rightarrow 2a-2b+c=0 \cdot \cdot \cdot (1)$$

తలము XY తలమునకు లంబముగా ఉన్నది కావున Z అక్షమునకు L లంబముగా ఉన్నది.

Z అక్షము యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $0, 0, 1$ కాబట్టి

$$a(0)+b(0)+c=0$$

$$\Rightarrow c=0 \quad \Rightarrow 2a-2b=0 \quad \Rightarrow a=b \Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{0}$$

L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $1, 1, 0$ కావలసిన తలము యొక్క సమీకరణము

$$1(x-1)+1(y+2)+0(z-4)=0 \quad x+y+1=0$$

1.5.7 $(-1, 3, 2)$ **బిందువు గుండాపోతూ** $x+2y+2z=5$ **మరియు** $3z+3y+2z=8$ **తలములకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము:**

సాధన: $A=(-1, 3, 2)$ అనుకొనుము మరియు $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ కావలసిన తలము అనుకొనుము.

π యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c అనుకొనుము.

ఇచ్చిన తలములు $x+2y+2z=5 \cdots (1)$ మరియు $3x+3y+2z=8 \cdots (2)$

తలము (1)కి π లంబము కాబట్టి $a+2b+2c=0 \cdots (3)$

π తలము, తలము (2)కు లంబము కాబట్టి $3a+3b+2c=8 \cdots (4)$

(3) మరియు (4)ల నుండి

$$\begin{array}{ccccccc} & a & & b & & c & \\ 2 & & 2 & & 1 & & 2 \\ 3 & & 2 & & 3 & & 3 \end{array}$$

$$\frac{a}{4-6}=\frac{b}{6-2}=\frac{c}{3-6} \qquad \text{i.e. } \frac{a}{-2}=\frac{b}{4}=\frac{c}{-3}$$

తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు $-2, 4, -3$.

అందుచేత కావలసిన సమీకరణము $-2(x+1)+4(y-3)-3(z-2)=0$

అనగా $2x-4y+3z+8=0$

1.5.8 $(2,-3,1)$ **గుండాపోతూ,** $(3,4,-1)$ **మరియు** $(2,-1,5)$ **బిందువుల నుండి పోయే రేఖకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము:**

సాధన: $A=(2,-3,1)$, $P=(3,4,-1)$ మరియు $Q=(2,-1,5)$

PQ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $1, 5, -6$.

దత్త నియమాలు పాటించే తలము π అనుకొనుము. తలము π, PQకు లంబముగా ఉన్నది.

π యొక్క అభిలంబము PQకు సమాంతరము.

π అనే తలమునకు సమీకరణము $1(x-2)+5(y+3)-6(z-1)=0$

అనగా $x+5y-6z+19=0$

1.5.9 $(-6,3,2), (-13,17,-1), (3,-2,4)$ **మరియు** $(5,7,3)$ **బిందువులు సతలీయములు అని చూపుము:**

సాధన: A, B, Cలు ఉన్న తలముపై $P=(x,y,z)$ ఏదేని బిందువనుకొనుము. A, B, Cల గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x+6 & y-3 & z-2 \\ -13+6 & 17-3 & -1-2 \\ 3+6 & -2-3 & 4-2 \end{vmatrix} = 0$$

అనగా $\begin{vmatrix} x+6 & y-3 & z-2 \\ -7 & 14 & -3 \\ 9 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$

అనగా $13(x+6)-13(y-3)+(-91)(z-2)=0$

అనగా $x+6-y+3-7z+14=0$

$x-y-7z+23=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

$5-7-21+23=0$ కాబట్టి

తలము (1) పై $D(5, 7, 3)$ బిందువు ఉన్నది. కాబట్టి A, B, C, D సతలీయములు.

1.5.10 $x+2y+3z=5,\ 3x+3y+z=9$ **తలముల మధ్య కోణములు కనుగొనుము:**

సాధన: తలముల మధ్య కోణము θ అనుకొనుము.

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$= \pm\frac{(1)(3)+(2)(3)+(3)(1)}{\sqrt{1+4+9}\ \sqrt{9+9+1}} = \pm\frac{3+6+3}{\sqrt{14}\ \sqrt{19}}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{12}{\sqrt{14}\ \sqrt{19}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{14}\ \sqrt{19}}\right) \text{ or } \pi - \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{14}\ \sqrt{19}}\right)$$

1.5.11 $2x-y+z=0,\ x+y+2z=7$ **తలముల మధ్య కోణములు కనుగొనుము:**

సాధన: తలముల మధ్య కోణము θ అనుకొనుము.

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} = \pm\frac{(2)(1)-(1)(1)+(1)(2)}{\sqrt{4+1+1}\ \sqrt{1+1+4}}$$

$$= \pm\frac{3}{\sqrt{6}\ \sqrt{6}} = \pm\frac{3}{6} = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ or } \frac{2\pi}{3}$$

1.5.12 S.A.Q.: $(1,-2,4)$ మరియు $(3,-4,5)$ బిందువుల గుండాపోతూ x అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము $y+2z=6$ అని నిరూపించుము.

1.5.13 S.A.Q.: $(2,0,6)$ మరియు $(-6,2,4)$ బిందువులను కలిపే రేఖను సమద్విఖండన చేస్తూ ఆ రేఖ ఖండమునకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

1.5.14 S.A.Q.: $2x-y+4z+11=0,\ 3x-2y-3z+27=0$ తలముల మధ్య కోణము కనుగొనుము.

1.6 ఒక బిందువు నుండి తలమునకు దూరము:

1.6.1 నిర్వచనము:

1. AB రేఖాఖండము π అనే తలమును ఖండించనట్లయితే A, B బిందువులు తలము π కి ఒకే వైపు ఉండును.

2. AB రేఖాఖండము π అనే తలమును ఖండించినట్లయితే A, B బిందువులు π తలమునకు ఇరువైపులా ఉండును.

1.6.2 సిద్ధాంతము: $A=(x_1, y_1, z_1),\ B=(x_2, y_2, z_2)$ బిందువులు $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ తలమునకు ఒకే వైపు లేదా ఇరువైపులా ఉండుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము $ax_1+by_1+cz_1+d$ మరియు $ax_2+by_2+cz_2+d$ లు ఒకే గుర్తు లేదా వ్యతిరేక గుర్తులు కలిగి ఉంటాయి.

ఉపపత్తి: A (x_1, y_1, z_1) బిందువు తలము $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ పై లేనట్లయితే $ax_1+by_1+cz_1>0$ లేక $ax_1+by_1+cz_1+d<0$ అవుతుంది.

AB రేఖాఖండము పై A, B లు కాని ఏ బిందువు p అయినా

$P=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1+(1-\lambda)y_2,\ \lambda z_1+(1-\lambda)z_2),\ 0<\lambda<1$గా చూపవచ్చును.

ఈ బిందువు π పై ఉండడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం

$$0 = a\cdot\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) + b\left(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\right) + c\left(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2\right) + d$$

$$= \lambda\left(ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right) + (1-\lambda)\left(ax_2 + by_2 + cz_2 + d\right)$$

అనగా $$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{-\left(ax_2 + by_2 + cz_2 + d\right)}{\left(ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right)} > 0 \qquad (\because\ 0 < \lambda < 1)$$

AB రేఖాఖండము π తలమును తాకుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ మరియు $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$ లు ఒకే గుర్తులు కలిగియుండుట.

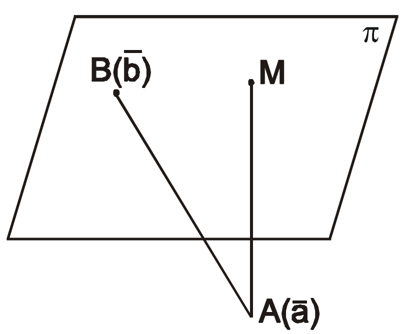
అదే విధముగా AB రేఖా ఖండము π ని తాకకుండా ఉండుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ మరియు $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$ లు ఒకే గుర్తును కలిగియుండుట. దీనితో సిద్ధాంతము యొక్క నిరూపణ పూర్తి అయినది.

నిర్వచనాలు: తలము π మరియు బిందువు P అయితే π మరియు L ల ఖండన బిందువు M అయినపుడు M గుండా పోతూ π లో ప్రతిరేఖకు లంబముగా PM ఉండేటట్లుగా P గుండా L అనే ఒకే ఒక్క రేఖ పోతుందని నిరూపించవచ్చును. L రేఖను P గుండాపోయే π యొక్క లంబము అంటాము మరియు PM పొడవును P నుండి π కు గల లంబదూరము (దూరము) అంటాము. ఈ దూరమును P నుండి π కి దూరము అని కూడా అంటాము.

1.6.3 సిద్ధాంతము: $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ నుండి $ax + by + cz + d = 0$ సమీకరణము గల తలము π పైకి దూరము

$$\frac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

ఉపపత్తి:



$A = \bar{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ అనుకొనుము. π యొక్క సదిశా సమీకరణము $\bar{r}\cdot\bar{m} = q$

$\bar{r} = (x, y, z), \bar{m} = (a, b, c)$ మరియు $q = -d$, $\left|\bar{m}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

A నుండి π పైకి AM లంబము మరియు M లంబపాదము అనుకొనుము.

$\overline{AM} = \overline{m}$ అవుతూ $\overline{b} \cdot \overline{m} = q$ అయ్యేటట్లుగా $B = \overline{b}$ అనుకొనుము.

$AM = \overline{AM}$ పై $\overline{AB}$ యొక్క విక్షేపము

$$= \frac{\left|\overline{AB} \cdot \overline{AM}\right|}{\left|\overline{AM}\right|} = \frac{\left|\left(\overline{b} - \overline{a}\right) \cdot \overline{m}\right|}{\left|\overline{m}\right|}$$

$$= \frac{\left|\overline{b} \cdot \overline{m} - \overline{a} \cdot \overline{m}\right|}{\left|\overline{m}\right|} = \frac{\left|\overline{a} \cdot \overline{m} - \overline{b} \cdot \overline{m}\right|}{\left|\overline{m}\right|} = \frac{\left|\overline{a} \cdot \overline{m} - q\right|}{\left|\overline{m}\right|}$$

$$= \frac{\left|(x_1, y_1, z_1) \cdot (a, b, c) + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

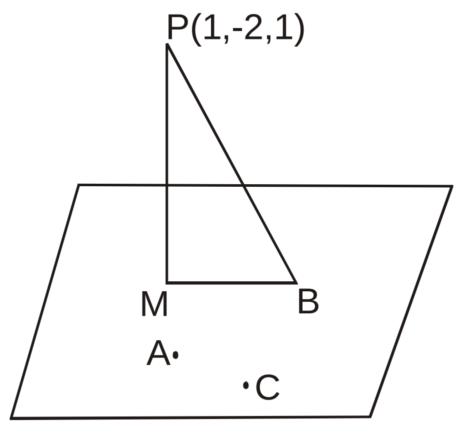
(x_1, y_1, z_1) నుండి తలము π పై దూరము AM.

గమనిక: మూలబిందువు నుండి తలము $ax + by + cz + d = 0$ పై దూరము $\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

ఉదాహరణలు:

1.6.4 $\overline{ABC}$ **తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనకుండా** $P(1, -2, 1)$ **నుండి** $\overline{ABC}$ **పైకి లంబ దూరము** $\frac{14}{3}$ **అని చూపుము. ఇక్కడ** $A = (2, 4, 1), B = (-1, 0, 1), C = (-1, 4, 2)$:

సాధన: $\overline{AB} \times \overline{AC}$ సదిశ $\overline{ABC}$ తలమునకు లంబము.



$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 3\bar{j} - 12\bar{k}$$

$\overline{AB} \times \overline{AC}$ దిశలో $\bar{n}$ యూనిట్ సదిశ అనుకొనుము.

$$\bar{n} = \frac{(-4,3,-12)}{\sqrt{16+9+144}} = \frac{(-4,3,-12)}{13}$$

$$\overline{PB} = (-2,2,0)$$

P నుండి $\overleftrightarrow{ABC}$ పైకి లంబదూరము $= PM$

$\overline{PM}$ పై $\overline{PB}$ యొక్క విక్షేపము

$$= \left|\bar{n} \cdot \overline{PB}\right| = \frac{\left|(-4,3,-12)\cdot(-2,2,0)\right|}{13} = \frac{8+6+0}{13} = \frac{14}{13}$$

1.6.5 రెండు నిరూపకాక్ష ఫలకాలు S_1, S_2 లకు ఉమ్మడి మూలబిందువు ఉంది. ఒక తలము మూల బిందువు నుండి S_1 లోని x, y, z అక్షాలను a_1, b_1, c_1 దూరాల వద్ద మరియు S_2 లో a_2, b_2, c_2 ల వద్ద వరుసగా ఖండిస్తే

$a_1^{-2} + b_1^{-2} + c_1^{-2} = a_2^{-2} + b_2^{-2} + c_2^{-2}$ **అని నిరూపించుము.:**

సాధన: $i = 1, 2$ కు OX_i, OY_i, OZ_i లు నిరూపకాక్ష ఫలకాలు అనుకొనుము.

OX_1, OY_1, OZ_1 అక్షాల దృష్ట్యా తలము యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}+\frac{z}{c_1}=1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$ అనుకొనుము.

OX_2, OY_2, OZ_2 అక్షాల దృష్ట్యా తలము యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}+\frac{z}{c_2}=1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$ అనుకొనుము

రెండింటికి ఒకే మూల బిందువు కాబట్టి, మూలబిందువు నుండి రెండు అక్ష ఫలకాల దృష్ట్యా తలానికి దూరం మారదు.

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{c_2^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}=\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{c_2^2}$$

$$\Rightarrow a_1^{-2}+b_1^{-2}+c_1^{-2} = a_2^{-2}+b_2^{-2}+c_2^{-2}$$

1.6.6 ఒక చర తలం మూలబిందువు నుండి $3P$ అనే స్థిర దూరంలో నిరూపకాక్షములు OX, OY, OZలను వరుసగా A, B, Cల వద్ద ఖండిస్తుంది. ΔABC యొక్క కేంద్రాభాసం బిందుపథం $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=P^{-2}$ అని చూపండి:

సాధన: $A=(a, 0, 0), B=(0, b, 0), C=(0, 0, c)$ అయితే చర తలము యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

ΔABC యొక్క కేంద్రాభాసం $G=(x_1, y_1, z_1)$ అనుకొనుము.

$$x_1=\frac{a}{3}, y_1=\frac{b}{3}, z_1=\frac{c}{3} \Rightarrow a=3x_1, b=3y_1, c=3z_1$$

(1)లో ప్రతిక్షేపించగా $$\frac{x}{3x_1}+\frac{y}{3y_1}+\frac{z}{3z_1}=1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

మూల బిందువు నుండి తలము (2) పైకి దూరం $$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9x_1^2}+\frac{1}{9y_1^2}+\frac{1}{9z_1^2}}}=3P$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9x_1^2}+\frac{1}{9y_1^2}+\frac{1}{9z_1^2}=\frac{1}{9P^2} \Rightarrow x_1^{-2}+y_1^{-2}+z_1^{-2}=P^{-2}$$

$G=(x_1, y_1, z_1)$ సమీకరణము $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=P^{-2}$ ను తృప్తిపరుచును.

విపర్యముగా $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=P^{-2}$ ను $G=(x_1, y_1, z_1)$ తృప్తిపరుచును అని తీసుకుందాము. G కేంద్రాభాసముగా అనేక త్రిభుజములు ఉంటాయి. G కేంద్రాభాసముగా శీర్షములు నిరూపకాక్షముల పై గల త్రిభుజము ఏకైకము. A, B, C లు వరుసగా x, y, z అక్షముల పై గల త్రిభుజము Δ ABC అనుకుందాము. $A=(3x_1, 0, 0)$, $B=(0, 3y_1, 0)$, $C=(0, 0, 3z_1)$.

ΔABC నుండి పోయే తలము సమీకరణము

$$\frac{x}{3x_1}+\frac{y}{3y_1}+\frac{z}{3z_1}=1 \Rightarrow \frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}=3 \quad \cdots (3)$$

తలము (3) పైకి మూలబిందువు నుండి దూరం

$$\frac{|-3|}{\sqrt{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{z_1^2}}}=\frac{3}{\sqrt{x_1^{-2}+y_1^{-2}+z_1^{-2}}}=\frac{3}{\sqrt{p^{-2}}} \quad =\frac{3}{p^{-1}}=3P$$

1.6.7 $x+y+z=0, x+y-2z=0, x-y=0$ **తలము నుండి దూరాల వర్గముల మొత్తము 5 అయ్యేటట్లుగా** P **ఒక బిందువు.** P **యొక్క బిందుపథము** $x^2+y^2+z^2=5$ **అని చూపుము:**

సాధన: ఒక యాదృచ్ఛిక బిందువు $P(x_1, y_1, z_1)$ నుండి

(i) $x+y+z=0$ తలము పైకి దూరం $\frac{|x_1+y_1+z_1|}{\sqrt{3}}$

(ii) $x+y-2z=0$ తలము పైకి దూరం $\frac{|x_1+y_1-2z_1|}{\sqrt{6}}$

(iii) $x-y=0$ తలము పైకి దూరం $\frac{|x_1-y_1|}{\sqrt{2}}$

కాబట్టి $\frac{|x_1+y_1+z_1|^2}{3}+\frac{|x_1+y_1-2z_1|^2}{6}+\frac{|x_1-y_1|^2}{2}=5$

$$\Leftrightarrow 2(x_1+y_1+z_1)^2+(x_1+y_1-2z_1)^2+3(x_1-y_1)^2=30$$

$$\Leftrightarrow 6x_1^2+6y_1^2+6z_1^2=30$$

$$\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2+z_1^2=5$$

$P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు $x^2+y^2+z^2=5$ను తృప్తిపరుచును.

1.6.8 S.A.Q.: P నుండి π పైకి దూరం అత్యల్ప దూరం అవుతుందని నిరూపించుము

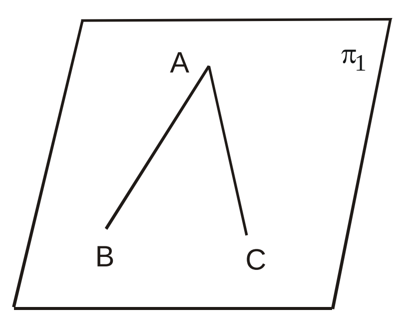
1.6.9 S.A.Q.: $2x-y+2z=3$ తలము నుండి దూరము మూల బిందువు నుండి దూరమునకు మూడు రెట్లుగా గల బిందువు యొక్క బిందుపథము కనుగొనుము.

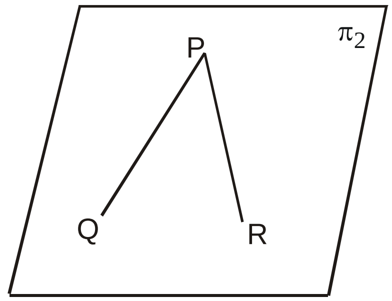
1.6.10 S.A.Q.: ఒక చర తలము మూల బిందువు నుండి P స్థిర దూరములో ఉన్నది. ఆ తలము అక్షములను A, B, C ల వద్ద ఖండించును. చతుర్ముఖి $OABC$ లో కేంద్రాభాసము యొక్క బిందు పథము $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=16P^{-2}$ అని చూపుము.

సమాంతర తలాల మధ్య దూరం: రెండు తలాల అభిలంబాల యొక్క దిక్ సంఖ్యలు అనుపాతంలో ఉంటే ఆ రెండు తలాలు సమాంతరములు. π_1 మరియు π_2 లు సమాంతర తలములు, π_1కు ఏదైనా రేఖ L లంబం కావడాన్కి π_2 కి L లంబముకావడం ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం.

1.6.11 సిద్ధాంతము: ఒక తలములోని రెండు ఖండన రేఖలు వరుసగా వేరొక తలములోని ఖండన రేఖలకు సమాంతరములయితే ఆ రెండు తలములు సమాంతరములు.

ఉపపత్తి: π_2 తలములో PQ, PR లు వరుసగా π_1 తలములో ఖండన రేఖలు AB, AC లకు సమాంతరమని అనుకుందాము.





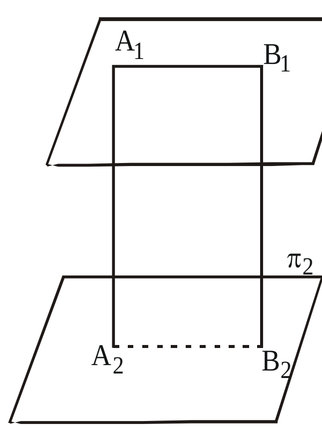
$$AB \parallel PQ$$

$$\Rightarrow AB \parallel \pi_2$$

AB గుండాపోయే π_1 తలము π_2 ను ℓ అనే రేఖలో ఖండించునని అనుకుందాము. AB మరియు ℓ లు π_1లో ఉన్నవి. $AB \parallel \pi_2$ మరియు $\ell \subset \pi_2$ కాబట్టి ℓను AB ఖండించదు. AB మరియు ℓ లు π_1 తలములో ఉన్నవి మరియు అవి ఖండించుకొనవు. కాబట్టి AB మరియు ℓ లు సమాంతరములు. అదే విధముగా AC మరియు ℓ లు సమాంతరములు. ఇది అసంబద్ధము కాబట్టి π_1 మరియు π_2 లు ఖండించుకొనవు. π_1 మరియు π_2 లు సమాంతర తలములు.

1.6.12 నిర్వచనము: π_1 మరియు π_2 లు సమాంతర తలములు అయితే π_1లోని ఏదైనా బిందువు నుండి π_2 పైకి (లేదా π_2 లోని ఏదైనా బిందువు నుండి π_1) లంబ దూరమును π_1 మరియు π_2 ల మధ్య దూరము అంటారు.

1.6.13 Remark: π_1, π_2 లు సమాంతర తలములు మరియు $A_1, B_1 \in \pi_1$, $A_2, B_2 \in \pi_2$, π_1కు A_1A_2 లంబము మరియు π_2 కు B_1B_2 లంబము అయితే $A_1A_2 = B_1B_2 =$ (d అనుకొనుము) అయ్యేటట్లుగా $A_1B_1B_2A_2$ ఒక దీర్ఘచతురస్రము. A_1 ఎంపికలో A_1A_2 స్వతంత్రము మరియు దీనిని π_1 నుండి π_2 కు దూరము అంటారు. అలాగే π_2 నుండి π_1కు దూరము d అనునది సత్యము.



1.6.14 సిద్ధాంతము: $ax+by+cz+d_1=0,\ ax+by+cz+d_2=0$ సమాంతర తలముల మధ్య దూరం $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ఉపపత్తి: ఇచ్చిన తలములు $\pi_1 \equiv ax+by+cz+d_1=0$ మరియు $\pi_2 \equiv ax+by+cz+d_2=0$

$ax+by+cz+d_2=0$ తలము పై $P(x_1, y_1, z_1)$ ఒక బిందువనుకొనుము.

$\Rightarrow ax_1+by_1+cz_1+d_2=0 \Rightarrow -d_2 = ax_1+by_1+cz_1$

π_1, π_2 సమాంతర తలాల మధ్య దూరం $= \pi_1$కు P నుండి లంబ దూరం

$$=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1.6.15 ఉదాహరణ: $2x-2y+z+3=0 \quad \cdots \quad (1)$ మరియు $4x-4y+2z+5=0$ సమాంతర తలాల మధ్య దూరం $\dfrac{1}{6}$ అని నిరూపించుము.

సాధన: (1) మరియు $4x-4y+2z+6=0$ ఒకే తలమును సూచించును.

సిద్ధాంతము 1.5.10 నుండి (1) మరియు (2)ల మధ్య దూరం

$$=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|6-5|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{36}}=\frac{1}{6}$$

1.7 తలముల నికాయాలు:

తలము యొక్క సాధారణ సమీకరణము $ax+by+cz+d=0,\ a, b, c$ లలో ఒకటి శూన్యేతరము కాబట్టి సార్వత్రికతకు భంగం కలుగకుండా $a \neq 0$ గా తీసుకుందాము. $\dfrac{d}{a}, \dfrac{b}{a}, \dfrac{c}{a}$లు ఏకైకముగా తలమును నిర్ణయించును. ఈ మూడు నిష్పత్తులు తలము యొక్క మూడు నియమముల నుండి నిర్ణయింపబడును.

ఉదాహరణకు

(i) తలములోని మూడు సరేఖీయము కాని బిందువులు.

(ii) తలములోని రెండు విభిన్న బిందువులు మరియు తలమునకు లంబముగా ఉండు మరియొక తలము.

(iii) తలములోని ఒక బిందువు మరియు తలమునకు లంబముగా రెండు తలములు.

మూడు కంటే తక్కువ నియమములతో $\frac{d}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ నిష్పత్తులను తలాల నికాయములు అనేక పద్ధతులతో కనుగొనవచ్చును. నియమము (i) ప్రకారము తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుటను **1.4.10**లో చర్చించబడినది. (ii) మరియు (iii) నుండి ఈ నిష్పత్తులు ఏకైక పద్ధతిలో కనుగొనవచ్చును. (ప్రాథమికాంశములు **2.15**లో చూడుము).

సరేఖీయము కాని మూడు బిందువుల గుండా పోయే తలము ఒకే ఒక్కటి ఉంటుందని మనకు తెలియును. ఉదాహరణకు $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ మరియు $(0, 0, 1)$ గుండా పోయే తలము $x + y + z - 1 = 0$. $(1, 0, 0)$ మరియు $(0, 1, 0)$లను కలిగిఉన్న తలములు అనంత సంఖ్యలో ఉండును.

$x + y + kz - 1 = 0 \quad \cdots (1)$ వంటి సమీకరణము ఈ బిందువులను కలిగియున్న తలమును సూచించును. $ax + by + cz + d = 0$ తలము ఈ బిందువులను కలిగియున్నట్లయతే $a + d = 0, b + d = 0, a = b = -d$ అవుతుంది. $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$లను కలిగియున్న తలమునకు సాధారణ రూపము $x + y + cz - 1 = 0 \quad \cdots (2)$.

ఒక తలము గురించి గాక తలముల వ్యవస్థను సూచించే సమీకరణములను గురించి పరిగణిద్దాము అటువంటి సమీకరణములు పరామితీయ గుణకాలు కలిగి ఉంటాయి. ((1) మరియు (2)లలోని k మరియు cలు).

1.7.1 నిర్వచనము: అపరిమితమైన విధాలుగా ఎన్నుకోదగినట్లుగా రెండు నియమాలను తృప్తిపరుస్తూ ఒక పరామితీయ స్థిరాంకముతో ముడిపడిన తలము యొక్క సమీకరణము ఇచ్చిన అనంత తల సముదాయాన్ని తలాల నికాయము అంటారు.

నికాయములోని విభిన్న తలాలకు ఉన్న విభిన్న పరామితీయ స్థిరాంకమును పరామితి అంటారు. అదే విధముగా ఒక నియమాన్ని తృప్తిపరిచే తలము యొక్క సమీకరణము రెండు పరామితులతో ముడిపడి ఉంటుంది. ఒకటి లేక రెండు పరామితులతో ముడిపడిన కొన్ని తలముల నికాయాల సమీకరణములు కింద ఇవ్వబడినవి.

1. $ax + by + cz + k = 0$ సమీకరణము $ax + by + cz + d = 0$ తలమునకు సమాంతరముగా ఉండే తలాల నికాయమును సూచించును. ఇచ్చట k పరామితి.

2. a, b, cలు అశూన్యమైనప్పుడు $ax + by + cz + d = 0$ సమీకరణము a, b, cలు దిక్ సంఖ్యలుగా గల రేఖకు లంబముగా ఉన్న తలాల నికాయమును సూచించును. ఇచ్చట d పరామితి.

3. $(ax + by + cz + d) + k(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0 \quad \cdots (1)$ సమీకరణం

   $ax + by + cz + d = 0 \quad \cdots (2)$, $\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \cdots (3)$ తలాల ఖండన రేఖ గుండా పోయే తలాల నికాయాన్ని సూచిస్తుంది. ఇక్కడ k పరామితి అగును. సమీకరణము **(1)** x, y, zలలో ఏకఘాత సమీకరణము కాబట్టి తలమును సూచిస్తుంది.

1.7.2 సిద్ధాంతము: $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ రెండు ఖండన తలములను సూచించును.

(i) $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ అయితే $S \equiv \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 = 0$ సమీకరణము π_1 మరియు π_2 ల ఖండన రేఖ గుండాపోయే తలమును సూచించును.

(ii) π_1 మరియు π_2 ల ఖండన రేఖ L గుండాపోయే ఏ తలము అయినా $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ కు $S \equiv \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 = 0$ గా చూపించబడుతుంది.

సాధన: (i) π_1, π_2 లు సమాంతరము కావు కాబట్టి $(a_1, b_1, c_1) \neq 0$, $(a_2, b_2, c_2) \neq 0$ మరియు $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. $S \equiv \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 = 0$ సమీకరణము x, y, z లలో ఏకఘాత సమీకరణము కాబట్టి S తలమును సూచించును.

L అనే రేఖ పై P ఏదేని బిందువు అనుకొనుము. $P \in \pi_1$ మరియు $P \in \pi_2 \Rightarrow P \in S$

S లో π_1, π_2 ల ఉమ్మడి బిందువులన్ని ఉన్నాయి.

π_1, π_2 లు ఖండించుకొనే తలాలు కాబట్టి అన్ని ఉమ్మడి బిందువులు L పై ఉంటాయి.

$$L \subset S$$

S తలము L ను కలిగి ఉంటుంది.

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow S = \pi_1,\ \lambda_1 = 0 \Rightarrow S = \pi_2$$

$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ అయితే π_1 మరియు π_2 లు ఖండించుకునే రేఖ గుండా పోయే తలము S అవుతుంది. మరియు π_1, π_2 ల నుండి విభిన్నముగా ఉంటుంది.

(ii) రేఖ L ను కలిగియున్న తలము $S \equiv \ell x + my + nz + t = 0$ అనుకొనుము.

$\overline{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$, $\overline{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ అనుకొనుము.

$L \perp \overline{n_1}$, $L \perp \overline{n_2} \Rightarrow L \parallel \overline{n_1} \times \overline{n_2}$

$\Rightarrow$ L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $b_1c_2 - b_2c_1$, $c_1a_2 - c_2a_1$, $a_1b_2 - a_2b_1$

అందులో కనీస ఒకటి శూన్యేతరము కాబట్టి $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ అనుకొనుము.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 = \ell$ అయ్యేటట్లుగా λ_1, λ_2 వ్యవస్థితము మరియు $\lambda_1b_1 + \lambda_2b_2 = m$

$$\ell x + my + nz + t = (\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2)x + (\lambda_1b_1 + \lambda_2b_2)y + nz + t$$

$$= \lambda_1 \left(a_1x + b_1y + c_1z + d_1\right) + \lambda_2 \left(a_2x + b_2y + c_2z + d_2\right)$$

$$+ \left(n - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2\right) Z + \left(t - \lambda_1 d_1 - \lambda_2 d_2\right)$$

$\alpha = n - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2$; $\beta = t - \lambda_1 d_1 - \lambda_2 d_2$ అనుకొనుము.

$$\ell x + my + nz + t \equiv \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \alpha z + \beta \cdots (1)$$

L రేఖ పై $P\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $Q\left(x_2, y_2, z_2\right)$లు ఏవేని రెండు బిందువులు అనుకొనుము. తలములు π_1, π_2 మరియు Sలు Lరేఖను కలిగి ఉంటాయి కాబట్టి L మీది బిందువులు P, Qలు π_1, π_2 మరియు Sకు చెందినవి.

(1) నుండి $\ell x_1 + my_1 + nz_1 + t \equiv \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \alpha z_1 + \beta$

$$\ell x_2 + my_2 + nz_2 + t \equiv \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 + \alpha z_2 + \beta$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \alpha z_1 + \beta$$

$$0 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \alpha z_2 + \beta$$

$$\Rightarrow \alpha z_1 + \beta = 0; \quad \alpha z_2 + \beta = 0 \quad \Rightarrow \alpha\left(z_1 - z_2\right) = 0$$

XY తలమునకు L సమాంతరము కాదు కాబట్టి $Z_1 \neq Z_2$.

$\alpha = 0$ మరియు $\beta = 0$

$$\ell x + my + nz + t \equiv \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$$

$$\ell x + my + nz + t = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1\left(a_1x + b_1y + c_1z + d_1\right) + \lambda_2\left(a_2x + b_2y + c_2z + d_2\right) = 0$$

Lను కలిగియున్న ప్రతి తలము యొక్క సమీకరణము $\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 = 0$ రూపములో ఉండును.

1.7.3 సిద్ధాంతము: $S_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $S_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ వరుసగా ఖండించుకొనే తలాలు π_1, π_2లను సూచిస్తే π_1, π_2ల మధ్య కోణములను సమద్విఖండన చేసే తలముల సమీకరణములు

(i) $$\frac{S_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{S_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

(ii) $$\frac{S_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=-\frac{S_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}},\quad d_1d_2>0$$

ఉపపత్తి: ఒక కోణ సమద్విఖండన తలము పై $P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువైతే P నుండి ఆ తలములు

$S_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ S_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ పైకి దూరాలు సమానము.

$$\frac{|a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\frac{|a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$\Leftrightarrow$ P యొక్క బిందు పథము $\dfrac{S_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\dfrac{S_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

ఉదాహరణలు:

1.7.4: $x-3y+2z+3=0$ మరియు $3x-y-2z-5=0$ తలముల ఖండన రేఖ గుండా మరియు మూలబిందువు గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $x-3y+2z+3=0$ మరియు $3x-y-2z-5=0$ తలాల ఖండన రేఖ గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము ఏ λ కైనా $(x-3y+2z+3)+\lambda(3x-y-2z-5)=0 \quad \cdots \quad (1)$ అనుకొనుము.

$(0, 0, 0)$ గుండా (1) పోవును. $\quad 3-5\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{3}{5}$

కావలసిన తలము యొక్క సమీకరణము

$$(x-3y+2z+3)+\frac{3}{5}(3x-y-2z-5)=0 \ \Rightarrow 14x-18y+4z=0 \ \Rightarrow\ 7x-9y+2z=0$$

1.7.5: $x+y+z=1$ మరియు $2x+3y-z=-4$ తలముల ఖండన రేఖ గుండాపోతూ X అక్షానికి సమాంతరముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $x+y+z=1$ మరియు $2x+3y-z=-4$ల ఖండన రేఖ గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము

ఏ λ కైనా $(x+y+z-1)+\lambda(2x+3y-z+4)=0 \quad \cdots \quad (1)$

x అక్షానికి (1) సమాంతరమైతే (1) యొక్క అభిలంబము x అక్షానికి లంబము. $a, 0, 0$ x అక్షానికి దిక్ సంఖ్యలు అనుకొనుము.

$$(1+2\lambda)a+(1+3\lambda)0+(1-\lambda)0=0$$

కాబట్టి $(1+2\lambda)\,a=0 \Rightarrow 1+2\lambda=0$ $\qquad \because a \neq 0$

కాబట్టి $\lambda=-\frac{1}{2}$ కావలసిన తలము $(x+y+z-1)-\frac{1}{2}(2x+3y-z+4)=0$

$$\Rightarrow \quad -y+3z-6=0 \Rightarrow y-3z+6=0$$

1.7.6 $x+y+z=1,\ 2x+3y+4z=5$ ల ఖండన రేఖ గుండా పోతూ $x-y+z=0$ కి లంబంగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $x+y+z=1$ మరియు $2x+3y+4z=5$ ల ఖండన రేఖ గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము ఏ λ కైనా $(x+y+z-1)+\lambda(2x+3y+4z-5)=0 \ \cdot\cdot\cdot\ (1)$ అనుకొనుము.

(1) తలము $x-y+z=0 \ \cdot\cdot\cdot\ (2)$ కు లంబముగా ఉండును.

$1+2\lambda, 1+3\lambda, 1+4\lambda$ లు (1) యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు.

$1, -1, 1$ లు (2) యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు.

$$1(1+2\lambda)-(1+3\lambda)+(1+4\lambda)=0, \quad 3\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{3}$$

తలము యొక్క సమీకరణము $(x+y+z-1)-\frac{1}{3}(2x+3y+4z-5)=0 \Rightarrow x-z+2=0$

1.7.7 $x+2y+2z=19,\ 4x-3y+12z+3=0$ తలముల కోణ సమద్విఖండన తలాల సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన: (1), (2) తలముల కోణ సమద్విఖండన తలాల సమీకరణములు

$$\frac{x+2y+2z-19}{\sqrt{1+4+4}}=\pm\frac{4x-3y+12z+3}{\sqrt{16+9+144}}$$

$$\frac{x+2y+2z-19}{3}=\pm\frac{4x-3y+12z+3}{13}$$

$$13(x+2y+2z-19)=\pm 3(4x-3y+12z+3)$$

$$13x + 26y + 26z - 247 = \pm (12x - 9y + 36z + 9)$$

$$x + 35y - 10z - 256 = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

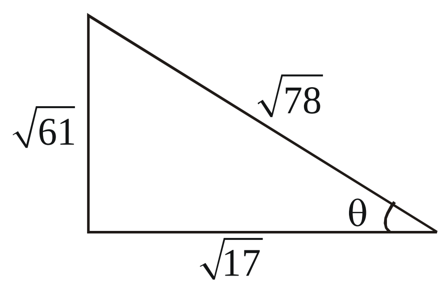
$$25x + 17y + 62z - 238 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

(1) మరియు (3)ల మధ్య లఘు కోణము θ అనుకొనుము.

$$\cos\theta = \frac{1 + 70 - 20}{\sqrt{1+4+4}\ \sqrt{1+1225+100}} = \frac{51}{3\sqrt{1326}}$$

$$= \frac{17}{\sqrt{1326}} = \frac{17}{\sqrt{17}\ \sqrt{78}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{78}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{17}} > 1 \ \Rightarrow\ \theta > \frac{\pi}{4}$$



(1) మరియు (2) తలాల మధ్య కోణము 2θ, $\frac{\pi}{2}$ కంటే పెద్దది. (1) మరియు (2)ల మధ్య గురుకోణమును సమద్వి ఖండన చేయు తలమును సమీకరణము (3) సూచించును. (1) మరియు (2)ల మధ్య లఘు కోణమును సమద్వి ఖండన చేయు తలమును సమీకరణము (4) సూచించును.

1.7.8 ఒక చర తలము (a, b, c) స్థిర బిందువు గుండాపోవును. అది అక్షములను A, B మరియు C లలో ఖండించును. (i) A గుండా పోతూ YOZ తలమునకు సమాంతరముగా (ii) B గుండాపోతూ ZOX తలమునకు (iii) C గుండాపోతూ XOY తలమునకు సమాంతరముగా ఉండే తలముల ఖండన బిందువు యొక్క బిందుపథము $ax^{-1} + by^{-1} + cz^{-1} = 1$ అని చూపుము.

సాధన: నిరూపకాక్షములను A, B, C వద్ద ఖండించే చర తలము $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1 \quad \cdots (1)$ అనుకొనుము.

$A = (x_1, 0, 0), \ B = (0, y_1, 0), \ C = (0, 0, z_1)$

(1) స్థిర బిందువు (a, b, c) గుండాపోవును.

$$\Rightarrow \frac{a}{x_1} + \frac{b}{y_1} + \frac{c}{z_1} = 1 \quad \cdots \quad (2)$$

A, B, C ల గుండాపోతూ నిరూపకాక్షములు వరుసగా YOZ తలము, ZOX తలము, XOY తలములకు సమాంతరముగా ఉండే తలముల సమీకరణములు

$x = x_1, \ y = y_1, \ z = z_1$

అవి $P = (x_1, y_1, z_1)$ వద్ద ఖండించుకొనును.

(2) నుండి $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ ను P తృప్తిపరుస్తుంది.

$ax_1^{-1} + by_1^{-1} + cz_1^{-1} = 1$

అనగా విపర్యముగా $P = (x_1, y_1, z_1)$ (2)ని తృప్తిపరిస్తే

$x = x_1, \ y = y_1, \ z = z_1$ తలముల ఖండన బిందువు P.

1.7.9 S.A.Q.: $x + 2y + 3z + 4 = 0$ మరియు $4x + 3y + 3z + 1 = 0$ తలముల ఖండన రేఖ గుండాపోతూ $x + y + z + 9 = 0$ కు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

1.7.10 S.A.Q.: $3x - 2y - 6z + 2 = 0, \ -2x + y - 2z - 2 = 0$ తలాల మధ్య లఘు కోణ సమద్వి ఖండన తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

తలముల యుగ్మము:

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \ \cdots \ (1)$

$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \ \cdots \ (2)$ సమీకరణములు తీసుకొనుము.

ఈ సమీకరణములు రెండు తలములను సూచించును. P అనే బిందువు తలము (1) పై లేక తలము (2) పై ఉన్నట్లయితే

$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)\ (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \ \cdots \ (3)$ సమీకరణమును P తృప్తిపరుచును.

విపర్యముగా P బిందువు సమీకరణము (3)ను తృప్తిపరిస్తే (1)ని లేక (2)ను P తృప్తిపరుచును మరియు P, (1) పై లేక

(2) పై ఉండును. (3), సమీకరణము (1) మరియు (2) తలాల యుగ్మమును సూచించును. వాటి లబ్ధము (3), $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$ రూపములో ఉండును.

ఇది x, y, z లలో ద్విఘాత సమీకరణము.

ఈ క్రింది సిద్ధాంతమును ఉపపత్తి లేకుండా చూస్తాము.

1.7.11 సిద్ధాంతము: $H \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+d=0$ మూల బిందువు గుండా పోయే తలాల యుగ్మమును సూచించుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0,\ f^2 \ge bc,\ g^2 \ge ac,\ h^2 \ge ab \text{ మరియు } d=0.$$

ఈ క్రింది సిద్ధాంతమును ఉపపత్తి లేకుండా చూస్తాము.

1.7.12 $H \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ తలాల యుగ్మము మధ్య కోణము θ అయితే

$$\cos\theta = \frac{a+b+c}{\sqrt{(a+b+c)^2+4\left(f^2+g^2+h^2-ab-bc-ca\right)}}$$

1.7.13 ఉప సిద్ధాంతము:

1. రెండు తలాలు లంబముగా ఉన్నప్పుడు $\theta=\frac{\pi}{2}$.

   $\Leftrightarrow \cos\theta=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$

   $\Leftrightarrow$ x^2 గుణకము $+$ y^2 గుణకము $+$ z^2 గుణకము $=0$

2. తలములు ఏకీభవించడానికి $\theta = 0^0$ ఆ.ప. నియమం

   అనగా $f^2=bc,\ g^2=ac,\ h^2=ab$

3. తలము యుగ్మము $H \equiv 0$ మధ్య కోణము θ అయితే

   $$\tan\theta = \frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-ab-bc-ca}}{a+b+c},\ a+b+c \ne 0 \text{ అయినపుడు}$$

4. $H \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ తలముల ఖండన రేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $\sqrt{f^2-bc},\ \sqrt{g^2-ac},\ \sqrt{h^2-ab}$.

ఉపపత్తి: $H \equiv 0$ సమీకరణము $\ell_1x+m_1y+n_1z=0,\ \ell_2x+m_2y+n_2z=0$ తలమును సూచించునని అనుకుందాము.

$$(\ell_1x+m_1y+n_1z)\,(\ell_2x+m_2y+n_2z)=ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$

$$\Rightarrow \ell_1\ell_2=a,\ m_1m_2=b,\ n_1n_2=c,\ \ell_1m_2+\ell_2m_1=2h,\ \ell_1n_2+\ell_2n_1=2g,\ m_1n_2+m_2n_1=2f$$

$H \equiv 0$ యొక్క ఖండన రేఖ దిక్ కొసైన్‌లు ℓ, m, n లు అనుకుందాం.

$$\ell\ell_1+mm_1+nn_1=0,\ \ell\ell_2+mm_2+nn_2=0$$

$$\frac{\ell}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{m}{n_1\ell_2-n_2\ell_1}=\frac{n}{\ell_1m_2-\ell_2m_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{\sqrt{4f^2-4bc}}=\frac{m}{\sqrt{4g^2-4ac}}=\frac{n}{\sqrt{4h^2-4ab}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{\sqrt{f^2-bc}}=\frac{m}{\sqrt{g^2-ac}}=\frac{n}{\sqrt{h^2-ab}}$$

తలముల ఖండన రేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $\sqrt{f^2-bc},\ \sqrt{g^2-ac},\ \sqrt{h^2-ab}$

ఉదాహరణలు:

1.7.14 $2x^2-6y^2-12z^2+18yz+2zx+xy=0$ తలముల యుగ్మాన్ని సూచిస్తుందని నిరూపించి, వాటి మధ్య లఘు కోణము కనుగొనుము.

సాధన: $2x^2-6y^2-12z^2+18yz+2zx+xy=0\ \cdot\cdot\cdot(1)$ ఇచ్చిన సమీకరణము

సమీకరణము (1)ని $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0\cdot\cdot\cdot(2)$తో పోల్చగా

$$a=2,\ b=-6,\ c=-12,\ f=9,\ g=1,\ h=\frac{1}{2}$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -6 & 9 \\ 1 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 2(72-81)-\frac{1}{2}(-6-9)+1\left(\frac{9}{2}+6\right) = -18+\frac{15}{2}+\frac{21}{2}=0$$

$$f^2 = 81, bc = 72 \Rightarrow f^2 > bc$$

$$g^2 = 1, \ ac = -24 \Rightarrow g^2 > ac$$

$$h^2 = \frac{1}{4}, \ ab = -12 \Rightarrow h^2 > ab$$

ఇచ్చిన సమీకరణము మూల బిందువు గుండా పోయే తలాల యుగ్మాన్ని సూచించును.

తలముల మధ్య లఘు కోణము θ అనుకొనుము.

$$\cos\ \theta = \left| \frac{a+b+c}{\sqrt{(a+b+c)^2 + 4\left(f^2+g^2+h^2-ab-bc-ca\right)}} \right|$$

$$= \left| \frac{2-6-12}{\sqrt{\left\{(-16)^2 + 4\left(81+1+\frac{1}{4}+12-72+24\right)\right\}}} \right| = \frac{16}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$$

1.7.15 $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yz - 6zx + 4xy + 5x + 10y - 15z + 6 = 0$ సమీకరణము సమాంతర తలాల యుగ్మాన్ని సూచించునని చూపుము మరియు వాటి మధ్య దూరము కనుగొనుము.

సాధన: $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yz - 6zx + 4xy = (x+2y-3z)^2$

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 12yz - 6zx + 4xy + 5x + 10y - 15z + 6$$

$\equiv (x+2y-3z+k)(x+2y-3z+\ell)$ అయితే

$$k + \ell = 5, \ k\ell = 6 \Rightarrow k + \frac{6}{k} = 5$$

$$\Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k = 3, \ \ell = 2$$

ఇచ్చిన సమీకరణము తలాల యుగ్మాన్ని సూచించును.

$x+2y-3z+3=0,\ x+2y-3z+2=0$ ఇవి సమాంతరములు.

సమాంతర తలాల మధ్య దూరము.

$$=\frac{|3-2|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

1.7.16 $a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab>0$ అయితే $\frac{a}{y-z}+\frac{b}{z-x}+\frac{c}{x-y}=0$ సమీకరణము తలాల యుగ్మాన్ని సూచించునని చూపుము.

సాధన: ఇచ్చిన సమీకరణము $\frac{a}{y-z}+\frac{b}{z-x}+\frac{c}{x-y}=0$

$$\Rightarrow a(z-x)(x-y)+b(y-z)(x-y)+c(y-z)(z-x)=0$$

$$\Rightarrow a\left(xz-x^2-yz+xy\right)+b\left(xy-zx-y^2+yz\right)+c\left(yz-z^2-xy+zx\right)=0$$

$$\Rightarrow ax^2+by^2+cz^2-(b+c-a)yz-(c+a-b)zx-(a+b-c)xy=0$$

సిద్ధాంతము 1.7.6 నుండి $Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=0$ తలాల యుగ్మాన్ని సూచించుటకు నియమాలు (1), (2), (3) మరియు (4)లు

$$A=a,\ B=b,\ C=c,\ F=-\frac{1}{2}(b+c-a),\ G=-\frac{1}{2}(c+a-b),\ H=-\frac{1}{2}(a+b-c)$$

(1) $$\begin{vmatrix} a & -\frac{1}{2}(a+b-c) & -\frac{1}{2}(c+a-b) \\ -\frac{1}{2}(a+b-c) & b & -\frac{1}{2}(b+c-a) \\ -\frac{1}{2}(c+a-b) & -\frac{1}{2}(b+c-a) & c \end{vmatrix}$$

$$\text{by } R_1\to R_1+R_2+R_3=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(a+b-c) & b & -\frac{1}{2}(b+c-a) \\ -\frac{1}{2}(c+a-b) & -\frac{1}{2}(b+c-a) & c \end{vmatrix}=0$$

(2) $F^2 - BC = \frac{1}{4}(b+c-a)^2 - bc = \frac{1}{4}\left(b^2+c^2+a^2+2bc-2ca-2ab\right) - bc$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca\right) > 0$$

$$\Rightarrow F^2 > BC$$

అదే విధముగా (3) $G^2 > AC$; (4) $H^2 > AB$.

కాబట్టి సమీకరణము తలాల యుగ్మాన్ని సూచించును.

ఖండన రేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $\pm\sqrt{F^2 - BC},\ \pm\sqrt{G^2 - AC}, \pm\sqrt{H^2 - AB}$

$$\equiv \pm 1, \pm 1, \pm 1$$

1.8 తలము పై విక్షేపాలు మరియు చతుర్ముఖి యొక్క ఘన పరిమాణము తలము పై లంబ విక్షేపము రేఖ పై విక్షేపము యొక్క భావమునకు అనుబంధముగా తలము పై విక్షేపము ఉన్నది.

1.8.1 నిర్వచనము:

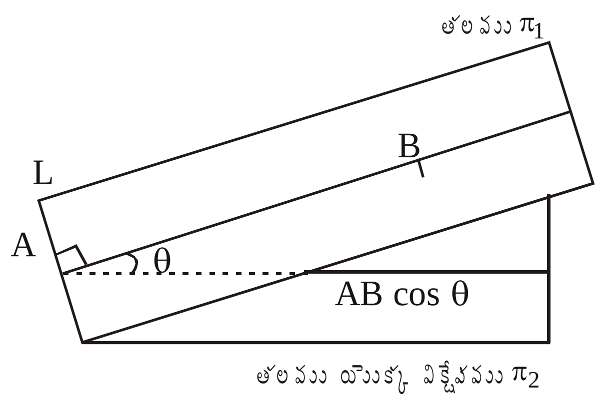
1. ఇచ్చిన తలములో ఒక బిందువు యొక్క లంబ పాదమును తలములో ఆ బిందువు యొక్క లంబ విక్షేపము అంటాము.

2. ఒక వక్రము మీది బిందువులకు తలములోని విక్షేపాల బిందుపథమును తలము పై వక్రము యొక్క లంబ విక్షేపము అంటాము.

3. ఒక తలము పై ఒక వక్రముతో కూడిన ప్రదేశము యొక్క విక్షేపముతో ఏర్పడే ప్రదేశమును తలము పై వక్రముతో కూడిన ప్రదేశము యొక్క లంబ విక్షేపము అంటాము.

ఈ క్రింది ఫలితాలను ఘన జ్యామితి నుండి ఉపపత్తి లేకుండా గ్రహించడమైనది.

1. π_1 తలములోని AB ఒక రేఖా ఖండము తలము π_1, తలము యొక్క విక్షేపము π_2 ల ఖండన రేఖ L కు లంబము, π_1, π_2 ల మధ్య కోణం θ అయితే π_2 పై దాని విక్షేపము యొక్క పొడవు $AB\,|\cos\theta|$.



2. ప్రదేశముతో కూడిన వక్రము ఉన్న తలమునకు, మరియు ఆ తలము యొక్క విక్షేపమునకు మధ్య కోణము θ అయితే ఒక తలములోని వక్రముతో A వైశాల్యముతో ఏర్పడిన ప్రదేశము యొక్క విక్షేపము వైశాల్యము $A\left|\cos\ \theta\right|$.

1.8.2 సిద్ధాంతము: A వైశాల్యముతో π తలము పైన ఉన్న ప్రదేశమునకు $z = 0, y = 0$ మరియు $x = 0$ నిరూపక తలాల పై విక్షేపాల వైశాల్యాలు వరుసగా A_x, A_y, A_z అయితే $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

ఉపపత్తి: π తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ కొసైన్‌లు ℓ, m, n అనుకొనుము. (2) ప్రకారము

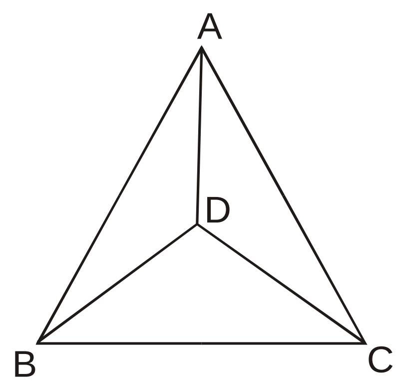
$$A_x = A|\ell|$$

$$A_y = A|m|$$

$$A_z = A|n|$$

కాబట్టి $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2\left(\ell^2 + m^2 + n^2\right) = A^2$

1.8.3 చతుర్ముఖి ఘన పరిమాణము: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు ఒకే తొలి బిందువు గల సదిశలు అయితే చతుర్ముఖి యొక్క ఘన పరిమాణము $V = \frac{1}{6}\left[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right]$ అని తెలియును. ఈ చతుర్ముఖి గురించి తలముల పదాలలో చెప్పుకుందాం.



A, B, C లు మూడు సరేఖీయము కాని బిందువులు. A, B, C లను కలిగియున్న తలము π ఏకైకము. D బిందువు π తలములో లేని ఏదేని బిందువువైతే D మరియు AB రేఖను కలిగియుండే తలము π_1 ను ఏకైకముగా నిర్ణయించవచ్చును. అదే విధముగా D మరియు BC ఉన్న తలము π_2, D మరియు AC కలిగియున్న తలము π_3 అనుకొనుము. త్రిభుజము DAB, DBC, DCA మరియు ABC లు త్రిపరిమాణ అంతరాళంలో ఏర్పరిచే

అసతలీయ జ్యామితి పటమును చతుర్ముఖి అంటారు. D, A, B, C చతుర్ముఖి యొక్క శీర్షములు.

నిర్వచనము ప్రకారము

చతుర్ముఖి ABCD యొక్క ఘనపరిమాణము,

$$V = \frac{1}{3} \times \text{ఎత్తు} \times \text{భూ త్రిభుజ వైశాల్యము}$$

$$V = \frac{1}{3}\left[\overline{AB}\ \ \overline{AC}\ \ \overline{AD}\right]$$

$A = (x_1, y_1, z_1),\ B = (x_2, y_2, z_2),\ C = (x_3, y_3, z_3)$ మరియు $D = (x_4, y_4, z_4)$ అయితే

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

అదే విధముగా $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1)$

$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (x_4 - x_1,\ y_4 - y_1,\ z_4 - z_1)$$

$V = \frac{1}{6}\ \left[\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\right]$ యొక్క పరమ మూల్యము.

$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$ యొక్క పరమ మూల్యము.

$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$ యొక్క పరమ మూల్యము.

1.8.4 సమస్య: నిరూపక తలాల పై $P(1, 2, 3),\ Q(-2, 1, -4),\ R(3, 4, -2)$ బిందువులు శీర్షములుగా త్రిభుజముచే పరిబద్ధమైన ప్రదేశము యొక్క విక్షేపాల వైశాల్యాలు కనుగొనుము.

సాధన: $\Delta\ PQR$ యొక్క వైశాల్యము A అనుకొనుము.

YZ, ZX, XY తలాల పై $\Delta\ PQR$ యొక్క వైశాల్యము యొక్క విక్షేపాల వైశాల్యాలు వరుసగా A_x, A_y, A_z అనుకొనుము.

$\overline{PQ} = (3,1,7)$ $\quad \overline{PR} = (-2,-2,5)$

$$\overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & 7 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 19\bar{i} - 29\bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\Delta\ PQR \text{ వైశాల్యము } A = \frac{1}{2}\left|\overline{PQ} \times \overline{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{19^2 + 29^2 + 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1218}$$

A వైశాల్యము కలిగిన త్రిభుజము యొక్క అభిలంబము యొక్క దిక్ సంఖ్యలు **1, -29, -4** మరియు దిక్ కొసైన్‌లు వరుసగా ℓ, m, n లు $\frac{19}{\sqrt{1218}}, \frac{-29}{\sqrt{1218}}, \frac{-4}{\sqrt{1218}}$

$$A_x = \ell A = \left|\frac{19}{\sqrt{1218}} \times \frac{\sqrt{1218}}{2}\right| = \frac{19}{2}$$

$$A_y = mA = \left|\frac{-29}{\sqrt{1218}} \times \frac{\sqrt{1218}}{2}\right| = \left|\frac{-29}{2}\right|$$

$$A_z = nA = \left|\frac{-4}{\sqrt{1218}} \times \frac{\sqrt{1218}}{2}\right| = |-2|$$

1.9 S.A.Q. లకు సమాధానములు:-

1.4.19 S.A.Q.: $A = (6,-4,4)$ $\quad B = (0,0,-4)$

$C = (-1,-2,-3)$ $\quad D = (1,2,-5)$ అనుకొనుము.

$\overline{AB} = (-6, +4, -8)$ మరియు $\overline{CD} = (2,4,-2)$

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = -12 + 16 + 16 = 20 \neq 0$ కావున

ఏ λ కైనా $\overline{AB} \neq \lambda\, \overline{CD}$

$\overline{AB}$ సదిశ $\overline{CD}$ కు లంబముగా కానీ సమాంతరముగా కానీ లేదు.

A, B, C, D లు సతలీయములు అని నిరూపిస్తే, AB, CDలు ఖండించుకుంటాయి.

$\overleftrightarrow{ABC}$ తలమునకు సమీకరణము $\begin{vmatrix} x-6 & y+4 & z-4 \\ -6 & 4 & -8 \\ -7 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0$

$$-12(x-6)+14(y+4)+16(z-4)=0$$

$$\Rightarrow 6(x-6)-7(y+4)-8(z-4)=0$$

$$\Rightarrow 6x-7y-8z-32=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

$D(1,2,-5)$ ను (1) యొక్క ఎడమ వైపులో ప్రతిక్షేపించగా

$$6-14+40-32=0$$

$$\therefore D \in \overleftrightarrow{ABC}$$

AB, CD లు ఖండించుకుంటాయి.

1.4.19 **S.A.Q.:** కావలసిన తలము π మరియు a, b, c లు తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు అనుకొనుము. $A=(0,4,3)$, $B=(-1,-5,-3)$, $C=(-2,-2,1)$ అనుకొనుము. AB యొక్క దిక్ సంఖ్యలు **1, 9, 6** మరియు AC యొక్క దిక్ సంఖ్యలు **2, 6, 2**

π లో A, B, C ఉన్నవి కావున, AB, AC రేఖలు π తలములో ఉన్నాయి.

$$a+9b+6c=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

$$2a+6b+2c=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

(1) మరియు **(2)**లను సాధించగా

$$\left.\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ 9 & 6 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right\}$$

$$\frac{a}{18-36}=\frac{b}{12-2}=\frac{c}{6-18}$$

i.e. $\dfrac{a}{9}=\dfrac{b}{-5}=\dfrac{c}{6}$

తలము π యొక్క సమీకరణము

$$9(x-0)-5(y-4)+6(z-3)=0$$

అనగా $9x-5y+6z+2=0$

(1, 1, -1) ఈ తలములో ఉన్నది.

బిందువులు సతలీయములు.

1.5.12 S.A.Q.: తలము మీది బిందువులు $A=(1,-2,4)$, $B=(3,-4,5)$ అనుకొనుము.

తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c లు అనుకొనుము.

AB యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 2, -2, 1

$$2a-2b+c=0 \cdots (1)$$

X అక్షము యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు 1, 0, 0 మరియు తలము X అక్షానికి సమాంతరము $\Leftrightarrow$ అభిలంబము X అక్షానికి లంబముగా ఉండును.

కాబట్టి $a(1)+b(0)+c(0)=0$

కాబట్టి $a=0 \Rightarrow -2b+c=0 \Rightarrow 2b=c \Rightarrow c=\dfrac{b}{2}$

కాబట్టి 0, 1, 2 లు π తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు.

కావలసిన తలమునకు సమీకరణము

$$0(x-1)+1(y+2)+2(z-4)=0$$

అనగా $y+2+2z-8=0$

అనగా $y+2z-6=0$

1.5.13 S.A.Q.: $A=(2,0,6)$, $B=(-6,2,4)$ లు దత్త బిందువులు అనుకొనుము. AB మధ్య బిందువు P అనుకొనుము.

$$P=\left(\frac{2-6}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{6+4}{2}\right)=(-2,1,5)$$

AB యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 8, -2, 2.

P గుండాపోతూ A, B లను కలిపే రేఖకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము

$$8(x+2)-2(y-1)+2(z-5)=0$$

అనగా $8x - 2y + 2z + 8 = 0$

అనగా $4x - y + z + 4 = 0$

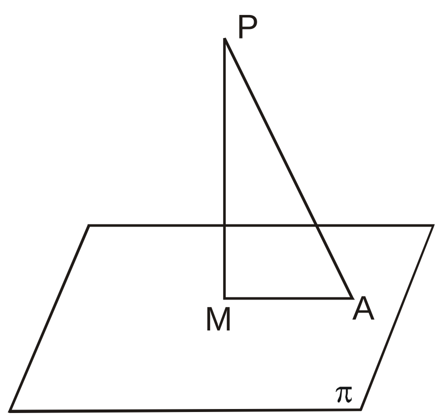
1.5.14 S.A.Q.: దత్త తలముల మధ్య కోణము θ అయితే

$$2x - 3y + 4z + 11 = 0 \quad \cdots (1), \quad 3x - 2y - 3z + 27 = 0 \quad \cdots (2)$$

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \frac{(2)(3) + (-3)(-2) + 4(-3)}{\sqrt{4+9+16}\ \sqrt{9+4+9}}$$

$$= \frac{6+6-12}{\sqrt{29}\ \sqrt{22}} = 0 \ \Rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

1.6.8 S.A.Q.: π లో M లంబ పాదము మరియు A వేరే బిందువు అనుకొనుము. π కు లంబదూరము PM.



Δ PMA లో, AP కర్ణము.

కాబట్టి $PM < PA$

కాబట్టి π లోని ప్రతి A కి $PM < PA$

అందుచేత P నుండి π కు దూరము అత్యల్ప దూరము.

1.6.9 S.A.Q.: O మూల బిందువు మరియు OP, $2x - y + 2z = 3$ తలము నుండి దూరమునకు 3 రెట్లు ఉండేటట్లుగా $P(x_1, y_1, z_1)$ ఒక బిందువు.

$$\Rightarrow OP^2 = 9\ \frac{(2x_1 - y_1 + 2z_1 - 3)^2}{4+1+4}$$

అనగా $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 + 9 - 4x_1y_1 - 4y_1z_1 + 8x_1z_1 - 12x_1 + 6y_1 - 12$

అనగా $3x_1^2 + 3z_1^2 - 4x_1y_1 - 4y_1z_1 + 8x_1z_1 - 12x_1 + 6y_1 - 12z_1 + 9 = 0$

కాబట్టి $3x^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz + 8xy - 12x + 6y - 12z + 9 = 0$ ను P తృప్తిపరుచును.

1.6.10 S.A.Q.: నిరూపకాక్షములను A, B, C ల వద్ద ఖండించే చర తలము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \cdot\ \cdot\ \cdot (1)$ అనుకొనుము.

$A = (a,0,0),\ B = (0,b,0),\ C = (0,0,c)$ మరియు a, b, c లు శూన్యేతరములు

OABC చతుర్ముఖికి $P\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$ కేంద్రాభాసము అనుకొనుము.

$$\left(\frac{a}{4},\frac{b}{4},\frac{c}{4}\right) = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\Rightarrow\ a = 4x_1,\ b = 4y_1,\ c = 4z_1$$

(1)లో ప్రతిక్షేపించగా $\frac{x}{4x_1}+\frac{y}{4y_1}+\frac{z}{4z_1}=1 \cdot\ \cdot\ \cdot (2)$

మూల బిందువు O నుండి తలము **(2)**కి దూరము

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16x_1^2}+\frac{1}{16y_1^2}+\frac{1}{16z_1^2}}} \quad \text{కాబట్టి} \quad \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{z_1^2}=\frac{16}{p^2}$$

విపర్యయము: A, B, C లు వరుసగా X, Y, Z అక్షాల పై బిందువులు అనుకొనుము.

$$A = (4x_1, 0, 0),\ B = (0, 4y_1, 0),\ C = (0, 0, 4z_1)$$

Δ ABC ఉన్న తలము యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x}{4x_1}+\frac{y}{4y_1}+\frac{z}{4y_1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}=4 \cdot\ \cdot\ \cdot\ (3)$$

మూల బిందువు నుండి తలము (3) దూరము

$$\frac{|-4|}{\sqrt{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{z_1^2}}} = \frac{4}{\sqrt{x_1^{-2}+y_1^{-2}+z_1^{-2}}} = \frac{4}{\sqrt{p^{-2}}} = 4p$$

P యొక్క బిందు పథమునకు సమీకరణము

$$x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=16p^{-2}$$

1.7.9 S.A.Q.: $x+2y+3z+4=0,\quad 4x+3y+3z+1=0$ తలముల ఖండన రేఖ గుండా పోయే తలము

$$(x+2y+3z+4)+\lambda(4x+3y+3z+1)=0$$ అనుకొనుము

$$\Rightarrow (1+4\lambda)x+(2+3\lambda)y+(3+3\lambda)z+(4+\lambda)=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$x+y+z+9=0$, కి (1) లంబముగా ఉంటే

$$(1+4\lambda)\cdot 1+(2+3\lambda)\cdot 1+(3+3\lambda)\cdot 1=0$$

i.e. $10\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=\frac{-3}{5}$

కావలసిన తలము $7x+7y+6z-17=0$.

1.7.10 S.A.Q.: దత్త తలములు $3x-2y+6z+2=0 \quad \cdots \quad (1)$

మరియు $-2x-y+2z+2=0 \quad \cdots \quad (2)$

ఇచ్చిన తలముల కోణ సమద్వి ఖండన తలముల సమీకరణములు

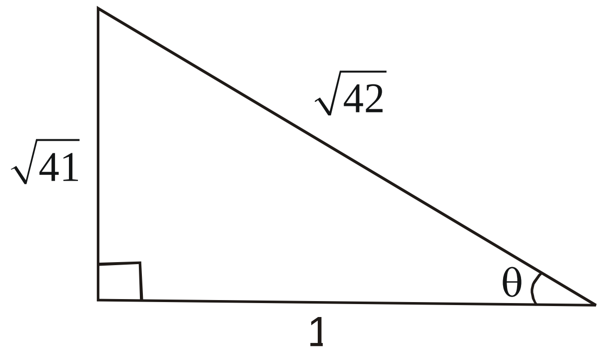
$$\frac{3x-2y+6z+2}{\sqrt{9+4+36}} = \pm\frac{(-2x-y+2z+2)}{\sqrt{4+1+4}}$$

అనగా $\frac{3x-2y+6z+2}{7} = \pm\frac{(-2x-y+2z+2)}{3}$

$$3(3x-2y+6z+2)=\pm 7(-2x-y+2z+2)$$

$$5x-y-4z+8=0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$23x-13y+32z+20=0 \quad \cdots \quad (4)$$



(2) మరియు (3)ల మధ్య లఘు కోణము, θ అనుకొనుము.

$$\cos\theta = \left|\frac{10+1-8}{\sqrt{9\times 42}}\right| = \frac{1}{\sqrt{42}}$$

$$\tan\theta = \sqrt{41} > 1 \Rightarrow \theta > \frac{\pi}{4}$$

(1) మరియు (2) తలముల మధ్య 2θ కోణము $\frac{\pi}{2}$ కన్నా పెద్దది.

సమీకరణము (3) తలములు (1) మరియు (2)ల మధ్య గురుకోణ సమద్వి ఖండన తలము.

సమీకరణము (4) తలములు (1) మరియు (2)ల మధ్య లఘుకోణ సమద్విఖండన తలము.

1.10 సారాంశము:

ఈ పాఠము పూర్తిగా చదివిన విద్యార్థికి వివిధ రూపాలలో తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుట, రెండు తలముల మధ్య కోణములు, ఒక బిందువు నుండి తలమునకు దూరము, తలముల నికాయముల సమీకరణములు మరియు చతుర్ముఖి యొక్క ఘన పరిమాణము సదిశ పద్ధతులు మరియు కార్టీషియన్ పద్ధతులలో కనుగొనుట క్షుణ్ణముగా తెలియును.

1.11 సాంకేతిక పదములు:

తలము
అంతర్ ఖండము
పరామితీయ సమీకరణము
సదిశ యొక్క విక్షేపము
లంబ విక్షేపము

లంబ దూరము

సమాంతర తలములు

చతుర్ముఖి

1.12 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. $(2, 2, -1), (3, 4, 2), (7, 0, 6)$ బిందువుల గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము $5x + 2y - 3z - 17 = 0$ అని చూపుము.

2. $(2, 2, 1), (9, 3, 6)$ బిందువుల గుండా పోతూ $2x + 6y + 6z = 9$ తలమునకు లంబముగా ఉండే తలమునకు సమీకరణము కనుగొనుము.

3. $(-6, 3, 2), (-13, 17, -1), (3, -2, 4)$ మరియు $(5, 7, 3)$ బిందువులు సతలీయములని చూపుము.

4. $2x - y + z = 0,\ x + y + 2z = 7$ తలముల మధ్య కోణములను కనుగొనుము.

5. రెండు నిరూపకాక్షముల వ్యవస్థలకు ఉమ్మడి మూలబిందువు కలదు. ఒక తలము మూల బిందువు నుండి ఆ తలములను వరుసగా a, b, c మరియు a_1, b_1, c_1 దూరములలో ఛేధించిన $a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = a_1^{-2} + b_1^{-2} + c_1^{-2}$ అని నిరూపించుము.

6. $x + y + z = 1$ మరియు $2x + 3y - z = -4$ తలముల ఖండన రేఖ గుండాపోతూ x అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్న తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

7. $x + 2y + 2z = 19,\ 4x - 3y + 12z + 3 = 0$ తలముల మధ్య కోణ సమద్విఖండన తలముల సమీకరణములను కనుగొనుము.

8. $2x^2 - 6y^2 - 12z^2 + 18yz + 2zx + xy = 0$ సమీకరణము తలముల యుగ్మాన్ని సూచించునని నిరూపించుము మరియు వాటి మధ్య కోణము కనుగొనుము.

9. $(1, 2, 3), (-2, 1, 4), (3, 4, -2)$ బిందువులు శీర్షములుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యమునకు నిరూపక తలాల పై వైశాల్యము యొక్క విక్షేపములు కనుగొనుము.

1.13 అభ్యాసము:

1. తలము పైన మూలబిందువు యొక్క లంబ పాదము $(-3, 5, -8)$గా గల తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $3x - 5y + 8z + 98 = 0$

2. $(2, 3, 4)$ నుండి $3x-6y+2z+11=0$ తలమునకు లంబ దూరము కనుగొనుము.

జ॥ $\frac{16}{7}$

3. $3x-4y+5z=0,\ 2x-y-2z=5$ తలముల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

జ॥ $\frac{\pi}{2}$

4. $(2, 1, -3)$ బిందువు గుండా పోతూ $3x+4y-7z+5=0$ తలమునకు సమాంతరముగా ఉన్న తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $3x+4y-7z+19=0$

5. $3x-y+2z+4=0,\ 6x-2y+4z+5=0$ సమాంతర తలముల మధ్య దూరమును కనుగొనుము.

జ॥ $\frac{3}{\sqrt{56}}$ యూనిట్లు

6. $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ బిందువుల గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

7. $(0, 4, 3), (-1, -5, -3), (-2, -2, 1), (1, 1, -1)$ బిందువులు సతలీయములు అని చూపుము.

8. $(-1, -2, 4), (3, -4, 5)$ బిందువుల గుండా పోతూ $XY-$ తలమునకు లంబముగా ఉండే తలమునకు సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $x+y+1=0$

9. $(4, 4, 0)$ బిందువు గుండాపోతూ $x+2y+2z-5=0$ మరియు $3x+3y+2z-8=0$ తలములకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $2x-4y+3z+8=0$

10. $x+y+z=0,\ x-z=0,\ x-2y+z=0$ తలముల నుండి దూరముల వర్గముల మొత్తము 9 అయ్యే బిందువు యొక్క బిందు పథము కనుగొనుము.

జ॥ $x^2+y^2+z^2=9$.

11. $2x-7y+4z-3=0,\ 3x-5y+4z+11=0$ తలముల ఖండన రేఖ మరియు $(-2, 1, 3)$ బిందువు గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $15x-47y+28z-7=0$

12. $x+2y+3z+4=0,\ 4x+3y+3z+1=0$ తలముల ఖండన రేఖ గుండా పోతూ $x+y+z+9=0$ తలమునకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $7x-y-6z-17=0$

13. $2x+y+3z-2=0,\ x-y+z+4=0$ తలముల ఖండన రేఖ గుండా పోతూ మూల బిందువు నుండి 2 యూనిట్ల దూరములో ఉన్న ప్రతి యొక్క తలమునకు సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $15x-12y+16z+50=0,\ x+2y+2z-6=0$

14. $2x^2-6y^2-12z^2+18yz+2zx+xy=0$ సమీకరణము తలముల యుగ్మాన్ని సూచిస్తుందని చూపుము మరియు వాటి మధ్య కోణము కనుగొనుము.

జ॥ $\cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$

15. $x^2+4y^2+9z^2-12yz-6zx+4xy+5x+10y-15z+6=0$ సమాంతర తలాల యుగ్మమును సూచించునని చూపుము మరియు వాటి మధ్య దూరమును కనుగొనుము.

1.14 సాధనతో మాదిరి ప్రాక్టికల్ సమస్య:

సమస్య: $S_1 \equiv 3x-2y-6z+2=0$ మరియు $S_2 \equiv -2x+y-2z-2=0$ తలముల మధ్య కోణ సమద్విఖండన తలముల సమీకరణములు కనుగొనుము. గురు కోణ సమద్విఖండన తలమును కనుగొనుము.

నిర్వచనములు:

1. రెండు తలముల మధ్య కోణము వాటి అనుబంధ అభిలంబముల మధ్య కోణము అగును.
2. రెండు తలముల సమద్వి ఖండన రేఖ గుండాపోతూ వాటితో సమాన కోణములు చేయు తలమును ఆ రెండు తలముల కోణ సమద్విఖండన తలము అంటారు.

ఉపయోగించిన ఫలితములు:

1. $\pi_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ మరియు $\pi_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$తో సూచించబడే తలములు π_1, π_2ల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\cos\theta = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

2. $S_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ S_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ వరుసగా ఖండించుకునే తలాలు π_1, π_2 లను సూచిస్తే π_1, π_2 ల మధ్య కోణములను సమద్వి ఖండన చేసే తలముల సమీకరణములు $d_1d_2 > 0$ కు

(i) $$\frac{S_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \frac{S_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

(ii) $$\frac{S_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = -\frac{S_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

సాధనలో దశల వారీ విభజన:

1. దత్త తలములు S_1, S_2 ల మధ్య కోణ సమద్విఖండన తలముల సమీకరణములు కనుగొనుట.
2. S_1 మరియు S_2 లలో ఒక దానికి మరియు కోణ సమద్వి ఖండన తలమునకు మధ్య కోణము θ అయితే $\cos\theta$ మరియు $\tan\theta$ కనుగొనుట.
3. θ లఘు కోణము లేక గురు కోణము అవుతుందో నిర్ణయించుట.
4. లఘు కోణ సమద్వి ఖండన తలము మరియు గురుకోణ సమద్విఖండన తలమును తెలుసుకొనుట.

Step 1: దత్త తలముల సమీకరణములు

$$S_1 \equiv 3x - 2y - 6z + 2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$S_2 \equiv -2x + y - 2z - 2 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

దత్త తలముల మధ్య కోణ సమద్వి ఖండన తలముల సమీకరణములు

$$\frac{S_1}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{S_2}{\sqrt{4+1+4}}$$

మరియు $$\frac{S_1}{\sqrt{9+4+36}} = -\frac{S_2}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$\Rightarrow (3x - 2y - 6z + 2)3 = (2x - y + 2z + 2)7$$

మరియు $$(3x - 2y - 6z + 2)3 = -(2x - y + 2z + 2)7$$

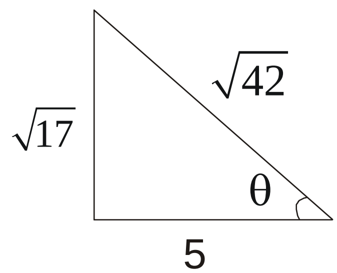
$$\Rightarrow 5x - y + 32z + 8 = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$23x - 13y - 4z + 20 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

Step 2: కోణ సమద్వి ఖండన తలము (3)ను కలిగియున్న తలముల మధ్య కోణము 2θ మరియు తలములు (2) మరియు (3)ల మధ్య కోణము θ అనుకొనుము.

$$\text{Cos }\theta = \frac{10+1+64}{\sqrt{4+1+4}\ \sqrt{25+1+1024}}$$

$$= \frac{75}{3\sqrt{1050}} = \frac{5}{\sqrt{42}}$$



పటము నుండి

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{17}}{5} < 1$$

Step 3: $\tan\theta = \frac{\sqrt{17}}{5} < 1$ కాబట్టి

$$\Rightarrow \tan\theta < \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2\theta < \frac{\pi}{2}$$

కోణ సమద్విఖండన తలము (3)ను కలిగియున్న తలముల మధ్య కోణము లఘు కోణము.

Step 4: తలములు (1) మరియు (2)ల మధ్య లఘు కోణ సమద్వి ఖండన తలము యొక్క సమీకరణము

$$5x - y + 32z + 8 = 0$$

తలములు (1) మరియు (2)ల మధ్య గురు కోణ సమద్వి ఖండన తలము యొక్క సమీకరణము

$$23x - 13y - 4z + 20 = 0$$

పాఠ్యభాగ రచయిత

S.V.S. **గిరిజ**

పాఠము - 2

సరళరేఖలు - 1

2.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠములో సరళరేఖ యొక్క సమీకరణము, సరళరేఖలు మరియు తలముల మధ్య కోణములు, ఒక తలము పైన గానీ, ఒక సరళరేఖ పైన గానీ ఒక బిందువు లేదా సరళరేఖ యొక్క విక్షేపము మరియు ఒక బిందువు నుండి సరళరేఖ పై దూరము మొదలుగా గల, సరళరేఖకు సంబంధించిన వివిధ విషయములు విద్యార్థికి పరిచయము కాగలవు.

2.2 పాఠ్యాంశాలక్రమము:

2.3 ఉపోద్ఘాతము:

ఒక సరళరేఖను, దానిపై ఒక బిందువు మరియు దానికి సమాంతరముగా ఉండే సరళరేఖతో ఏకైకంగా నిర్ణయించవచ్చును. అదే విధముగా ఒక బిందువు మరియు నిరూపకాక్షములతో చేయు కోణములతో ఒక సరళరేఖను ఏకైకముగా నిర్ణయించవచ్చును. అంతేకాక రెండు తలముల ఛేదనం కూడా సరళరేఖ. ఈ వాస్తవాలు సరళరేఖ సమీకరణాలను వివిధ రూపములలో పొందుటకు మనకు వీలు కల్పిస్తాయి. సదిశా పద్ధతులను ఉపయోగించి సరళరేఖలు మరియు తలముల మధ్య కోణాలు సైతం తెలిసికొనవచ్చును. సమాంతరత మరియు లంబత్వాలకు నియమములు కూడా ఈ పాఠంలో రాబట్టడం జరిగింది. అంతేకాక ఒక బిందువు యొక్క లంబపాదానికి నిరూపకాలు మరియు లంబ దూరము కనుగొనడం జరిగింది.

2.4 సరళరేఖ యొక్క సమీకరణము:

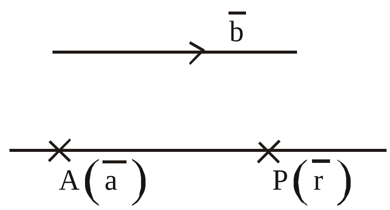
సదిశా రూపం:

2.4.1 సిద్ధాంతము: $\bar{b} \neq \bar{o}$ సదిశకు సమాంతరముగా ఉంటూ బిందువు $A(\bar{a})$ గుండా పోయే సరళరేఖకు సదిశా సమీకరణము $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ $(t \in \mathbb{R})$.

ఉపపత్తి: A గుండాపోతూ $\bar{b}$కు సమాంతరముగా ఉండే సరళరేఖ L అనుకొనుము.

$P(\bar{r})$ ఏదేని బిందువైతే $\bar{r} = \overline{OP} + \overline{AP} = \bar{a} + \overline{AP}$

$\overline{AP} = \bar{r} - \bar{a}$



L పై P ఉన్నది $\Leftrightarrow \overline{AP} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{r} - \bar{a} \parallel \bar{b}$

$\Leftrightarrow \bar{r} - \bar{a} = t\bar{b}$ (అయ్యేటట్లు $\mathbb{R}$లో t వుండవలె)

$\Leftrightarrow \bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ (అయ్యేటట్లు $\mathbb{R}$లో t వుండవలె)

అందుచేత L పై P ఉండడానికి $\bar{r} = a + t\bar{b}$ అయ్యేటట్లుగా అదిశ t వ్యవస్థితము కావడం ఆవశ్యకం మరియు పర్యాప్తం. అందుచేత అదిశా పరామితి t తో $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ సదిశా సమీకరణము సరళరేఖ L ను సూచిస్తున్నది.

2.4.2 ఉప సిద్ధాంతము: $A(\bar{a})$ మరియు $B(\bar{b})$ అనే విభిన్న బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖకు పరామితీయ రూపములో సదిశా సమీకరణము $\bar{r} = t\bar{b} + (1-t)\,\bar{a}$ $(t \in \mathbb{R})$.

ఉపపత్తి: AB సరళరేఖను L అనుకొనుము.

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{b} - \bar{a} \neq 0$

$\bar{b} - \bar{a}$కి L సమాంతరము

$\bar{a}$ గుండాపోతూ $\bar{b} - \bar{a}$కి L సమాంతరముగా ఉన్నది కాబట్టి **(2.4.1** నుండి**)** L యొక్క సదిశా సమీకరణము

$\bar{r} = \bar{a} + t\left(\bar{b} - \bar{a}\right)$

$\bar{r} = t\bar{b} + (1-t)\bar{a}$

2.4.3 ఉప సిద్ధాంతము: $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ గుండాపోతూ ℓ, m, n లు దిక్ సంఖ్యలుగా గల సరళరేఖ యొక్క సమీకరణము $x = x_1 + \ell t,\ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt \quad (t \in \mathbb{R})$

ఉపపత్తి: A గుండాపోయే సరళరేఖ L, $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ మరియు $\bar{b} = \ell\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ అనుకొనుము.

$\bar{a}$ గుండా పోతూ $\bar{b}$కు సమాంతరముగా ఉండే సరళరేఖ L

L కు సదిశా సమీకరణము $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b} \quad t \in \mathbb{R} \cdots (1)$ **(2.4.1 నుండి)**

$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, అయితే **(1)**ని

$x = x_1 + \ell t,\ \ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt \quad (t \in \mathbb{R})$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇవి సరళరేఖ L కు పరామితీయ సమీకరణములు.

2.4.4 $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ బిందువు గుండా పోతూ ℓ, m, n లు దిక్ కొసైన్‌లు గల సరళరేఖ L కు, సౌష్ఠవ రూపములో సమీకరణములు $\dfrac{x - x_1}{\ell} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$

2.3.3 నుండి L కు కార్టీషియన్ సమీకరణములు

$$x = x_1 + \ell t,\ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt \qquad (t \in \mathbb{R}) \cdots (1)$$

ℓ, m, n లు L కు దిక్ కొసైన్‌లు $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ కాబట్టి ℓ, m, n లలో ఒకటి శూన్యేతరము.

(1) ని $x - x_1 : \ell = y - y_1 : m = z - z_1 : n$ గా వ్రాయవచ్చును.

$\dfrac{x - x_1}{\ell} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ సమీకరణము పై దానికి తుల్యము.

వీటిని సరళరేఖ L యొక్క సౌష్ఠవ రూప సమీకరణములు అంటారు.

2.4.5 గమనిక: (i) ℓ, m, n లలో ఒకటి 0 అయితే మనకు సౌష్ఠవ సమీకరణములలో $\dfrac{x - x_1}{0} = t$ వచ్చును. దీని అర్థము $x - x_1$ను 0 తో భాగించుట అని కాదు. $\dfrac{x - x_1}{0} = t$ అంటే $x = x_1$.

ఉదాహరణకు $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{z=0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ సమీకరణములు తీసుకొనగా $x=1+0t,\ y=2+\frac{1}{\sqrt{2}}t$ మరియు

$z=0+\frac{1}{\sqrt{2}}t$ గా (x, y, z) బిందువును సరళరేఖ కలిగిఉన్నట్లుగా ఈ సమీకరణములు సూచిస్తున్నాయి.

అనగా $(x,y,z)=\left(1,2+\frac{1}{\sqrt{2}}t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$

(ii) $A(x_1, y_1, z_1)$ గుండాపోతూ ℓ, m, n దిక్ కొసైన్‌లు గల సరళరేఖ L పై $P(x, y, z)$ ఏదైనా బిందువు అయితే $x=x_1+\ell t,\ y=y_1+mt_1,\ z=z_1+nt$ అయ్యేటట్లుగా $\mathbb{R}$ లో t వ్యవస్థితం.

అందువలన $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=t^2\left(\ell^2+m^2+n^2\right)=t^2$

కాబట్టి $|t|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=AP$

2.4.6 ఉప సిద్ధాంతము: $A(x_1, y_1, z_1)$ గుండాపోతూ ℓ, m, n దిక్ సంఖ్యలు గల సరళరేఖ L అయితే L సమీకరణములు

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

ఉపపత్తి: $k=\sqrt{\ell^2+m^2+n^2},\ k\neq 0$ మరియు $\frac{\ell}{k},\frac{m}{k},\frac{n}{k}$ లు L దిక్ కొసైనులు అయితే L సమీకరణములు

$$\frac{x-x_1}{\left(\frac{\ell}{k}\right)}=\frac{y-y_1}{\left(\frac{m}{k}\right)}=\frac{z-z_1}{\left(\frac{n}{k}\right)}=r. \qquad (r\in\mathbb{R})$$

i.e. $x=x_1+\ell\left(\frac{r}{k}\right),\ y=y_1+m\left(\frac{r}{k}\right),\ z=z_1+n\left(\frac{r}{k}\right),\ \frac{r}{k}\in\mathbb{R}$

$\frac{r}{k}$ పరామితి కాబట్టి $\frac{r}{k}$ కు బదులు t ప్రతిక్షేపించిన

$x=x_1+\ell t,\ \ y=y_1+mt,\ \ z=z_1+nt$ కాబట్టి సౌష్ఠవ రూపము $\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ గామారును.

2.4.7 ఉప సిద్ధాంతము: $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ మరియు $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$ రెండు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ L యొక్క పరామితీయ సమీకరణములు

$$\left.\begin{aligned} x &= t\,x_2 + (1-t)\,x_1 \\ y &= t\,y_2 + (1-t)\,y_1 \\ z &= t\,z_2 + (1-t)\,z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (t \in R)$$

ఉపపత్తి: A, B ల యొక్క స్థాన సదిశలు వరుసగా $\bar{a}, \bar{b}$ అయితే $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ మరియు $\bar{b} = x_2\,\bar{i} + y_2\,\bar{j} + z_2\,\bar{k}$ మరియు $\bar{b} - \bar{a} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$

కాబట్టి L యొక్క సదిశా సమీకరణము $\bar{r} = t\bar{a} + (1-t)\,\bar{b}, \quad (t \in \mathbb{R})$

$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\bar{k}$, అయితే సదిశా సమీకరణము

$$x\,\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \left(t\,x_1 + (1-t)\,x_2\right)\bar{i} + \left(ty_1 + (1-t)y_2\right)\bar{j} + \left(tz_1 + (1-t)z_2\right)\bar{k}$$

ఇది

$$x = t\,x_1 + (1-t)\,x_2$$

$$y = t\,y_1 + (1-t)\,y_2$$

$$z = t\,z_1 + (1-t)\,z_2$$ లకు తుల్యము.

2.4.8 ఉప సిద్ధాంతము: $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ మరియు $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణములు

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

ఉపపత్తి: $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ మరియు $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ అయితే

$$\bar{b} - \bar{a} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ అయితే L యొక్క సమీకరణము

$$\bar{r} = \bar{a} + t\left(\bar{b} - \bar{a}\right)$$

అనగా $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$

$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$

$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$

కాబట్టి $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

ఇవి L సమీకరణములు.

2.4.9 తలముల రీత్యా సరళరేఖ సమీకరణములు (అసౌష్ఠవ రూపము):

సిద్ధాంతము: $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ తలముల ఖండన రేఖ దిక్ సంఖ్యలు $b_1c_2 - b_2c_1$, $c_1a_2 - c_2a_1$, $a_1b_2 - a_2b_1$.

ఉపపత్తి: $\overline{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ మరియు $\overline{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ అయితే π_1కి $\overline{n}_1$ లంబము మరియు π_2కు $\overline{n}_2$ లంబము $\overline{n_1}$ మరియు $\overline{n_2}$ కి L లంబము.

అందుచేత $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$ కు L సమాంతరము.

$$\overline{n_1} \times \overline{n_2} = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1c_2 - b_2c_1)\bar{i} + (c_1a_2 - c_2a_1)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}$$

$$= (b_1c_2 - b_2c_1,\ c_1a_2 - c_2a_1,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

కాబట్టి $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు

$b_1c_2 - b_2c_1,\ c_1a_2 - c_2a_1,\ a_1b_2 - a_2b_1$.

L మరియు $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$ లు సమాంతరములు కాబట్టి ఇవే L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు.

2.4.10 తలముల ఛేదనముగా సరళరేఖలు (అసౌష్ఠవ రూపము): రెండు తలముల ఛేదనము శూన్య సమితి లేదా సరళరేఖ కాబట్టి సరళరేఖ సమీకరణమును తలాల సమీకరణాల ద్వారా చెప్పవచ్చును.

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

తలముల ఛేదనము సరళరేఖ L అయితే (x, y, z), L పై వుండటం అన్నా (x, y, z) బిందువు (1) మరియు (2)లను తృప్తిపరుచునన్నా అనగా $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$ అన్నీ ఒక్కటే.

(3)ను తృప్తిపరిచే (x, y, z) యొక్క బిందుపథము L కాబట్టి, L యొక్క సమీకరణములు

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$$

వీటిని అసౌష్ఠవ రూపములో L యొక్క సమీకరణములు అంటారు.

2.4.11 సిద్ధాంతము: $\pi_1 \; : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$$\pi_2 \; : \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

తలముల ఛేదనము L అయితే L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $b_1c_2 - b_2c_1$, $c_1a_2 - c_2a_1$ మరియు $a_1b_2 - a_2b_1$.

(α, β, γ), L పైని బిందువైతే L యొక్క సౌష్ఠవ సమీకరణాలు

$$\frac{x-\alpha}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y-\beta}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z-\gamma}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \cdots \quad (1)$$

ఉపపత్తి: π_1 మరియు π_2 తలముల ఖండన రేఖ L అనుకొనుము.

π_1, π_2 ల ఖండన రేఖ L కాబట్టి సిద్ధాంతము 2.3.9 నుండి L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు

$b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, \; a_1b_2 - a_2b_1$

L మీద ఒక బిందువు (α, β, γ)ను స్థిరపరిస్తే సమీకరణము (1) L ను సూచిస్తుంది.

గమనిక: L సరళరేఖ అన్ని నిరూపక తలాలకు ఒకేసారి సమాంతరముగా ఉండదు కాబట్టి మూడు నిరూపక తలాలలో ఒక దానిని L సరళరేఖ ఖండిస్తుంది.

L సరళరేఖ XY తలమును $P(x_1, y_1, 0)$ వద్ద ఖండిస్తుందని అనుకుంటే

$$a_1x + b_1y_1 + d_1 = 0 \, , \quad a_2x_1 + b_2y_1 + d_2 = 0$$

x_1, y_1 ల కోసం ఈ సమీకరణములను సాధించగా

$$x_1 = \frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad , \quad y_1 = \frac{d_1a_2 - d_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

కాబట్టి సరళరేఖ L పై బిందువు $P=(x_1, y_1, 0) = \left(\dfrac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{d_1a_2 - d_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, 0\right)$

సౌష్ఠవ రూపములో సరళరేఖ L సమీకరణములు

$$\frac{x-x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y-y_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z-0}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

అసౌష్ఠవ రూపములోకి సౌష్ఠవ సమీకరణములు:

2.4.12 సిద్ధాంతము: $\dfrac{x-x_1}{\ell} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n} \cdots (1)$ సమీకరణములు సూచించే సరళరేఖ రెండు తలముల ఛేదనము.

ఉపపత్తి: దత్త సరళరేఖకు ℓ, m, n లు దిక్ సంఖ్యలు కాబట్టి ℓ, m, n లలో కనీసం ఒకటియైనా శూన్యేతరము. $\ell \neq 0$ అనుకుందాము.

దత్త సరళరేఖ మీది ఏ బిందువు (x, y, z) కైనా

$$m(x-x_1) - \ell(y-y_1) = 0 = \ell(z-z_1) - n(x-x_1)$$

అనగా $mx - \ell y = mx - \ell y_1$ మరియు $\ell z - nx = \ell z_1 - nx_1$

$\ell \neq 0$ కాబట్టి పై సమీకరణములు తలములను సూచిస్తున్నాయి మరియు L పైని బిందువు (x, y, z) ఈ తలముల పై ఉంటుంది.

రెండు తలముల ఛేదనము శూన్య సమితి లేక ఒక సరళరేఖ కాబట్టి దీని నుండి (1) సరళరేఖ పై రెండు తలముల ఛేదనము.

$m \neq 0$ లేక $n \neq 0$ అయినపుడు నిరూపణ ఇదే విధము.

ఉదాహరణలు:

2.4.13 $L: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$ సరళరేఖ $\pi = 3x + 4y + 5z - 5 = 0$ తలముల ఖండన బిందువు కనుగొనుము.

సాధన: సరళరేఖ L సమీకరణము $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z+2}{2} = t$ కాబట్టి దీనిపై ఏదేని బిందువు

$(t-1, 3t-3, -2t-2)$

$P=(t-1, 3t-3, -2t-2)$ అనుకొనుము.

π తలము పై P ఉంటే $3(t-1)+4(3t-3)+5(-2t-2)-5=0 \Rightarrow 5t-30=0 \Rightarrow t=6$

L మరియు π ల ఖండన బిందువు, $P=(5, 15, -14)$.

2.4.14 $x-2y+4z+4=0 \cdots (1)$, $x+y+z-8=0 \cdots (2)$ సరళరేఖ L, $\pi = x-y+2z+1=0$ తలముల ఖండన బిందువు కనుగొనుము.

సాధన: (1) మరియు (2)ల అభిలంబముల దిశలో యూనిట్ సదిశలు వరుసగా $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ అనుకొనుము.

$\bar{n}_1 = (1, -2, 4)$ $\bar{n}_2 = (1, 1, 1)$

L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు -6, 3, 3.

(1) మరియు (2)లలో $z=0$ ను ప్రతిక్షేపించగా $x-2y+4=0$, $x+y-8=0$.

ఈ రెండు సమీకరణములను సాధించగా $x=4, y=4$

$P=(4, 4, 0)$, L మీది బిందువు. అందుచేత సౌష్ఠవ రూపములో L యొక్క సమీకరణములు

$$\frac{x-4}{-6}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{3}=t \text{ (అనుకొనుము)}$$

సరళ రేఖ L పై ఏదైనా బిందువు, $Q=(-6t+4, 3t+4, 3t)$

π పై Q ఉండాలంటే $-6t+4-3t-4+6t+1=0$ అనగా $t=\frac{1}{3}$ కావాలి.

అంతేకాక L మరియు π ల ఖండన బిందువు $Q=(2, 5, 1)$.

2.4.15 A $(-2, 3, 4)$, $B(1, 2, 3)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ L, XZ తలముల ఖండన బిందువు కనుగొనుము.

సాధన: A, B ల గుండా పోయే సరళరేఖ L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 3, -1, -1.

సరళరేఖ L యొక్క సమీకరణము $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{1}=t$ (అనుకొనుము)

L పై ఏదైనా బిందువు $P=(3t-2, -t+3, -t+4)$. XZ సమీకరణం $y=0$

$y=0$ పై P ఉంటే $-t+3=0 \Rightarrow t=3$. L మరియు XZ తలముల ఖండన బిందువు $P=(7, 0, 1)$.

2.4.16 $x+y+z+1=0=4x+y-2z+2$ సరళరేఖ యొక్క సమీకరణమును సౌష్ఠవ రూపములో కనుగొనుము.

సాధన: π_1 మరియు π_2 ల అభిలంబముల దిశలో యూనిట్ సదిశలు వరుసగా $\bar{n}_1$ మరియు $\bar{n}_2$ అనుకొనుము.

$$\bar{n}_1 = (1,1,1),\ \bar{n}_2 = (4,1,-2)$$

L పై సదిశ $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$. L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $-2-1, 4+2, 1-4$ అనగా $-3, 6, -3$. L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 1, -2, 1.

π_1 మరియు π_2 లలో $z=0$ ప్రతిక్షేపిస్తే $x+y+1=0,\ 4x+y+2=0$.

ఈ రెండు సమీకరణములను సాధించగా $3x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$. కాబట్టి $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, 0\right)$, L మీద వున్నది.

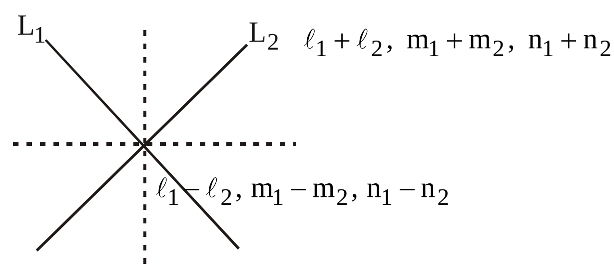
సౌష్ఠవ రూపములో L యొక్క సమీకరణములు

$$\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y+\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z}{1}$$

గమనిక: మనకు తెలిసిన ఈ క్రింది సిద్ధాంతం ఉపయోగిస్తాము.

L_1 మరియు L_2 రెండు సరళరేఖల దిక్ కొసైన్‌లు వరుసగా ℓ_1, m_1, n_1 మరియు ℓ_2, m_2, n_2 అయితే L_1 మరియు L_2 సరళరేఖల మధ్య కోణములను సమద్వి ఖండన చేయు రేఖల దిక్ సంఖ్యలు

$\ell_1 \pm \ell_2,\ m_1 \pm m_2,\ n_1 \pm n_2$ మరియు ఆ రేఖలు L_1 మరియు L_2 ల ఖండన బిందువు గుండాపోవును.



2.4.17 **(1)** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{-2}$, **(2)** $\frac{x-1}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{12}$

సరళరేఖల కోణ సమద్వి ఖండన రేఖల సమీకరణములు కనుగొనుము.

సాధన: సరళరేఖ (1) యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}$

సరళరేఖ (2) యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు $\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13}$

(1) మరియు (2)ల మధ్య కోణములను సమద్వి ఖండన చేయు సరళరేఖల దిక్ సంఖ్యలు

$$\frac{1}{3} \pm \frac{4}{13}, \frac{2}{3} \pm \frac{3}{13}, \frac{-2}{3} \pm \frac{12}{13}$$

అనగా $\frac{1}{3} + \frac{4}{13}, \frac{2}{3} + \frac{3}{13}, \frac{-2}{3} + \frac{13}{13}$; $\frac{1}{3} - \frac{4}{13}, \frac{2}{3} - \frac{3}{13}, \frac{-2}{3} - \frac{13}{13}$

అనగా $\frac{25}{39}, \frac{35}{39}, \frac{10}{39}$; $\frac{1}{39}, \frac{17}{39}, \frac{-62}{39}$

అనగా $25, 35, 10,$; $1, 17, -62$

అనగా $5, 7, 2$; $1, 17, -62$

(1) మరియు (2)ల కోణ సమద్వి ఖండన రేఖల సమీకరణములు

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-5}{2}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{17} = \frac{z-5}{-62}$$

2.5 సరళరేఖలు మరియు తలముల మధ్య కోణములు:

(ఎ) $\bar{a}, \bar{b}$లు రెండు శూన్యేతర సదిశలు మరియు $\bar{a}$ మరియు $\bar{b}$ల మధ్య కోణము θ అయితే $\text{Cos}\,\theta = \pm \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$

అనీ (బి) L_1, L_2 సరళరేఖల దిక్ సంఖ్యలు వరుసగా ℓ_1, m_1, n_1 మరియు ℓ_2, m_2, n_2 మరియు L_1, L_2ల మధ్యకోణము θ అయితే $\text{Cos}\,\theta = \pm \frac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$ అనీ మనం గతంలో తెలిసికొన్నాము.

2.5.1 సిద్ధాంతము: $L_1 : \bar{r} = \bar{a}_1 + t\overline{b_1}$ మరియు $L_2 : \bar{r} = \overline{a_2} + t\overline{b_2}$ గా సూచింపబడే సరళరేఖలు L_1, L_2 మధ్య కోణమును $\text{Cos}\,\theta = \pm \frac{\overline{b_1} \cdot \overline{b_2}}{|\overline{b_1}|\,|\overline{b_2}|}$ గా ఇవ్వబడినది.

L_1 మరియు L_2ల సౌష్ఠవ సమీకరణములు

$$\left.\begin{aligned} L_1 &: \frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \\ L_2 &: \frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \end{aligned}\right\} (A)$$

అయితే $\cos\theta = \pm \dfrac{(\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2)}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}\ \sqrt{\ell_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

ఉపపత్తి: L_1 సరళరేఖ $\overline{b_1}$ కు సమాంతరము మరియు L_2 సరళరేఖ $\overline{b_2}$ కు సమాంతరము కాబట్టి $\cos\theta = \pm \dfrac{\overline{b_1}\cdot\overline{b_2}}{|\overline{b_1}|\ |\overline{b_2}|}$

L_1, L_2 మరియు $\overline{b_1}, \overline{b_2}$ ల మధ్య కోణములు సమానము. (A) నుండి L_1 దిక్ సంఖ్యలు ℓ_1, m_1, n_1 మరియు L_2 దిక్ సంఖ్యలు ℓ_2, m_2, n_2.

$\overline{b_1}$, L_1 కు సమాంతరము కాబట్టి ఒక అదిశ k_1, $\overline{b_1} = k_1\left(\ell_1\bar{i} + m_1\bar{j} + n_1\bar{k}\right)$ అయ్యేటట్లుగా వ్యవస్థితము.

అదే విధముగా $\overline{b_2} = k_2\left(\ell_2\bar{i} + m_2\bar{j} + n_2\bar{k}\right)$ అయ్యేటట్లుగా ఒక అదిశ k_2 వ్యవస్థితము.

కాబట్టి $\cos\theta = \pm \dfrac{\overline{b_1}\cdot\overline{b_2}}{|\overline{b_1}|\ |\overline{b_2}|} = \pm \dfrac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}\ \sqrt{\ell_2^2+m_2^2+n_2^2}}$

2.5.2 లంబత్వము మరియు సమాంతరతకి నియమములు:

ఉప సిద్ధాంతము: $L_1 : \bar{r} = \overline{a_1} + t\overline{b_1}$ మరియు $L_2 : \bar{r} = \overline{a_2} + t\overline{b_2}$ సదిశా సమీకరణములు గల సరళరేఖలు L_1, L_2 లు లంబములు $\Leftrightarrow \overline{b_1}\cdot\overline{b_2} = 0$.

ℓ_1, m_1, n_1 మరియు ℓ_2, m_2, n_2 లు వరుసగా L_1, L_2 ల దిక్ సంఖ్యలు అయితే లంబముగా ఉండుటకు నియమము $\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

ఉపపత్తి: L_1, L_2 ల మధ్య కోణ θ అనుకుంటే $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ అనగా $\cos\theta = 0$ అయినప్పుడు మాత్రం L_1, L_2 లంబంగా వుంటాయి.

$$\cos\theta = \pm \frac{\overline{b_1}\cdot\overline{b_2}}{|\overline{b_1}|\ |\overline{b_2}|} = \pm \frac{\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}\ \sqrt{\ell_2^2+m_2^2+n_2^2}} \text{ కాబట్టి}$$

L_1, L_2 లు లంబముగా వుండడాన్కి $\overline{b_1} \cdot \overline{b_2} = 0$, అనగా $\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ తుల్య నియమం.

2.5.3 ఉప సిద్ధాంతము: పైన చెప్పిన దత్తాంశము ప్రకారము L_1, L_2 లు సమాంతరము

$\Leftrightarrow$ ఏదేని $k \in \mathbb{R}$ కు $\overline{b_1} = k\overline{b_2}$ $\Leftrightarrow$ $\ell_1 : \ell_2 = m_1 : m_2 = n_1 : n_2$

ఉపపత్తి: L_1, L_2 లు సమాంతరము కావడాన్కి $\overline{b_1}, \overline{b_2}$ లు సమాంతరము కావడం అనగా R లోని ఒక k కి $\overline{b_1} = k\overline{b_2}$ కావడం తుల్యము.

$\overline{b_1} = \ell_1 \bar{i} + m_1 \bar{j} + n_1 \bar{k}$ మరియు $\overline{b_2} = \ell_2 \bar{i} + m_2 \bar{j} + n_2 \bar{k}$

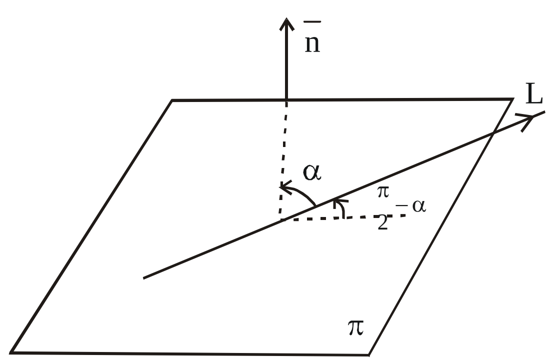
$\overline{b_1} = k\overline{b_2}$ మరియు $\ell_1 = k\ell_2, m_1 = km_2, n_1 = kn_2$

మరియు $\ell_1 : \ell_2 = m_1 : m_2 = n_1 : n_2$ తుల్యములు

ఒక సరళరేఖ మరియు ఒక తలము మధ్య కోణములను పరిగణన చేద్దాము.

సరళరేఖ మరియు తలము మధ్యకోణములు:

2.5.4 నిర్వచనము: ఒక సరళరేఖ L ఒక తలము π దాని అభిలంబము $\bar{n}$ అనుకొనుము. L మరియు $\bar{n}$ ల మధ్య కోణము α, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ అయితే $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ను L మరియు π ల మధ్య కోణముగా చెప్తాము.



గమనిక: 1. అన్ని అభిలంబములు సమాంతరము కాబట్టి ఏ $\bar{n}$ నైనా ఎన్నుకోవచ్చును.

2. $\alpha = 0$ అయితే తలమునకు అభిలంబము L. సరళరేఖ, తలము మధ్య కోణము $\frac{\pi}{2}$.

3. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ అయితే L తలమునకు సమాంతరముగా ఉంటుంది. సరళరేఖ మరియు తలముల మధ్య కోణము 0.

2.5.6 ఉప సిద్ధాంతము: $L: \frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ సరళరేఖ $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ తలమునకు సమాంతరం కావడాన్కి $a\ell+bm+cn=0$ తుల్యం.

ఉపపత్తి: π అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c.

ఈ అభిలంబము L కి లంబము కాబట్టి $a\ell + bm + cn = 0$.

విలోమం $a\ell + bm + cn = 0$ అయితే సరళరేఖ L మరియు సదిశ $\bar{n} = (a, b, c)$ లు లంబములు అందుచేత a, b, c లు దిక్ సంఖ్యలు గల అభిలంబము ఉన్న తలమునకు L సమాంతరము. π యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c కాబట్టి π కి L సమాంతరము.

2.5.7 ఉప సిద్ధాంతము: $\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ సరళరేఖ $ax+by+cz+d=0$ తలము పై ఉండడాన్కి $ax_1+by_1+cz_1+d=0,\ a\ell+bm+cn=0$ తుల్యములు.

ఉపపత్తి: తలములో సరళరేఖ ఉండడానికి తలములో (x_1, y_1, z_1) బిందువు ఉంటూ తలమునకు సరళరేఖ సమాంతరము కావడం, అనగా

$ax_1+by_1+cz_1+d=0$ మరియు $a\ell + bm + cn = 0$ కావడం తుల్యం.

2.5.8 ఉప సిద్ధాంతము: $a\ell + bm + cn = 0$ అయ్యేటట్లుగా a, b, c లను ఎన్నుకుంటే $\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ సరళరేఖ ఉండే ఏకైక తలము వ్యవస్థితము మరియు దాని సమీకరణము

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \quad \cdots \quad (1)$$

ఉపపత్తి: $a\ell + bm + cn = 0$ కాబట్టి ℓ, m, n దిక్ సంఖ్యలున్న ఏ సరళరేఖ అయినా (a, b, c) సదిశకు లంబము.

ఇచ్చిన సరళరేఖను కలిగియున్న ఏ తలము అభిలంబమునకైనా దిక్ సంఖ్యలు a, b, c.

అలాంటి ఏ తలమునకైనా సమీకరణము $ax+by+cz+d=0$.

(x_1, y_1, z_1) బిందువు $ax+by+cz+d=0$ తలము పై ఉన్నందున $ax_1+by_1+cz_1+d=0$.

అందుచేత తలము సమీకరణము $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$.

2.5.9 సిద్ధాంతము: సరళరేఖ $L: \bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ మరియు తలము $\pi: \bar{r}\cdot\bar{n} = q$ ల మధ్య కోణము θ అయితే

$$\text{Sin}\ \theta = \pm\frac{\bar{b}\cdot\bar{n}}{|\bar{b}|\ |\bar{n}|}.$$

ఉపపత్తి: L సరళరేఖ $\bar{b}$కు సమాంతరము మరియు $\bar{n}$ అభిలంబముగా ఉన్న తలము π.

$\bar{b}$ మరియు $\bar{n}$ల మధ్య కోణము α అయితే $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \theta$

కాబట్టి $\cos\alpha = \pm \sin\theta$

కాని $\cos\alpha = \frac{\bar{b}\cdot\bar{n}}{|\bar{b}|\,|\bar{n}|} \Rightarrow \sin\theta = \pm \frac{\bar{b}\cdot\bar{n}}{|\bar{b}|\,|\bar{n}|}$

$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ $\bar{b} = (\ell, m, n)$ మరియు $\bar{n} = (a, b, c)$ అయితే

సరళరేఖ సమీకరణం $\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ మరియు $ax + by + cz + d = 0$ తలము సమీకరణం (ఇక్కడ $d = -q$) అగును.

అందుచేత $\sin\theta = \pm \frac{(a\ell + bm + cn)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}$

ఉదాహరణలు:

2.5.10 $L: \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+4}{5}$ సరళరేఖ $\pi \equiv -2x + 3y + 5z = 0$ తలమునకు లంబముగా ఉండునని చూపుము.

సాధన: π తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు -2, 3, 5 మరియు L సరళరేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు -2, 3, 5 కాబట్టి π అభిలంబమునకు L సమాంతరము అందుచేత π కి L లంబము.

2.5.11 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{-1} \cdot \cdot \cdot (1)$, $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \cdot \cdot \cdot (2)$ సరళరేఖల మధ్య లఘు కోణమును కనుగొనుము.

సాధన: సరళరేఖ (1) దిక్ సంఖ్యలు 1, 0, -1. సరళరేఖ (2) దిక్ సంఖ్యలు 3, 4, 5.

(1) మరియు (2)ల మధ్య లఘు కోణము θ అయితే

$$\cos\theta = \frac{|(1)(3) + (4)(0) + (5)(-1)|}{\sqrt{1+1}\ \sqrt{9+16+25}} = \frac{+2}{\sqrt{2}\ \sqrt{50}} = \frac{+1}{5} \text{ కాబట్టి } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

2.5.12 $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2} \cdot \cdot \cdot (1)$, $\frac{x-1}{3k}, \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5} \cdot \cdot \cdot (2)$ సరళరేఖలు లంబంగా వుంటే k విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: సరళరేఖ (1) దిక్ సంఖ్యలు $-3, 2k, 2$ మరియు ఈ సరళరేఖలు లంబంగా వుండడాన్కి $(-3)3k + 2k(1) + 2(-5) = 0$,

అనగా $-9k + 2k - 10 = 0$ అనగా $-7k - 10 = 0$ అనగా $k = \frac{-10}{7}$ తుల్యము.

2.5.13 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+5}{2} \cdots (1)$ రేఖ మీది బిందువు $(2, -3, -5)$కు ఇరువైపుల దాని నుండి 3 యూనిట్ల దూరములో రెండు బిందువులు కనుగొనుము.

సాధన: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+5}{2} = t$ (అనుకొనుము) సరళ రేఖ మీద ఇచ్చిన బిందువు $A\,(2, -3, -5)$.

సరళరేఖ (1) పై ఏదేని బిందువు $P = (t+2, -2t-3, 2t-5)$ A మరియు P ల మధ్య దూరము 3 యూనిట్లు

అయితే $AP = 3 \Rightarrow AP^2 = 9 \Rightarrow t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 1$

$(3, -5, -3)$ మరియు $(1, -1, -7)$ కావలసిన బిందువులు.

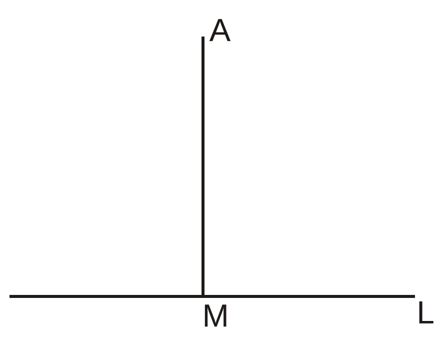
2.5.14 $x = az + b,\ y = cz + d \cdots (1),\quad x = a_1 z + b_1,\ y = c_1 z + d \cdots (2)$ సరళ రేఖలు లంబముగా ఉండడానికి నియమం కనుగొనుము.

(1) సరళరేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $0(c) - 1(-a), (-a)0 - (-c)1, 1 - 0(0)$ అనగా $a, c, 1$ అట్లే (2) దిక్ సంఖ్యలు $a_1, c_1, 1$.

కాబట్టి (1), (2) పరస్పరం లంబంగా వుండడానికి తుల్య నియమం

$$aa_1 + cc_1 + 1(1) = aa_1 + cc_1 + 1 = 0$$

2.6 ఒక బిందువు యొక్క లంబపాదము:



L ఒక సరళరేఖ మరియు A ఏదైనా బిందువు అయితే A గుండా పోయే లంబరేఖ L ల ఖండన బిందువు M ను L పై A యొక్క లంబపాదము అంటాము మరియు AM ను A నుండి L కు లంబదూరము అంటాము.

2.6.1 సిద్ధాంతము:

1. $A(\alpha, \beta, \gamma)$ నుండి సరళరేఖ $L : \dfrac{x - x_1}{\ell} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ కు లంబపాదము

$$Q = \left(x_1 + \ell t_1,\ y_1 + mt_1,\ z_1 + nt_1\right),\quad t_1 = \frac{\ell(\alpha - x_1) + m(\beta - y_1) + n(\gamma - z_1)}{\ell^2 + m^2 + n^2}$$

2. లంబరేఖ AQ యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x - \alpha}{x_1 - \alpha - \ell\, t_1} = \frac{y - \beta}{y_1 - \beta - mt_1} = \frac{z - \gamma}{z_1 - \gamma - nt_1}$$

3. మరియు AQ పొడవు

$$AQ = \sqrt{\left(x_1 - \alpha - \ell\, t_1\right)^2 + \left(y_1 - \beta - mt_1\right)^2 + \left(z_1 - \gamma - nt_1\right)^2}$$

ఉపపత్తి: L కి లంబంగా వుంటూ A గుండా పోయే ఒక సరళరేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు ℓ, m, n అయితే దాని సమీకరణం $\dfrac{x - \alpha}{\ell_1} = \dfrac{y - \beta}{m_1} = \dfrac{z - \gamma}{n_1}$

ఈ రేఖల ఖండన బిందువు Q, L పై Q ఉంటే $Q = \left(x_1 + \ell\, t_1,\ y_1 + mt_1,\ z_1 + nt_1\right)$ అయ్యేటట్లు అదిశ t_1 వుంటుంది. సరళరేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలైన $\alpha - x_1 - \ell\, t_1$, $\beta - y_1 - mt_1$, $\gamma - z_1 - nt_1$, ℓ_1, m_1, n_1 కు అనుపాతములో ఉంటాయి.

లంబముగా ఉండుటకు నియమము $\ell\left(\alpha - x_1 - \ell t_1\right) + m\left(\beta - y_1 - mt_1\right) + n\left(\gamma - z_1 - nt_1\right) = 0$

$$\Rightarrow\ \ell\left(\alpha - x_1\right) + m\left(\beta - y_1\right) + n\left(\gamma - z_1\right) - \left(\ell^2 + m^2 + n^2\right)t_1 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\ell(\alpha - x_1) + m(\beta - y_1) + n(\gamma - z_1)}{\ell^2 + m^2 + n^2}$$

$x_2 = x_1 + \ell t_1,\ y_2 = y_1 + mt_1,\ z_2 = z_1 + nt_1$ అయితే L కు లంబముగా ఉండే AQ దిక్ సంఖ్యలు

$$x_1 - x_2 = x_1 - \alpha - \ell\, t_1,\quad y_1 - y_2 = y_1 - \beta - mt_1 \text{ మరియు } \quad z_1 - z_2 = z_1 - \gamma - nt_1.$$

సరళరేఖ సమీకరణములు

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

$$AQ=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(x_1-\alpha-\ell t_1\right)^2+\left(y_1-\beta-mt_1\right)^2+\left(z_1-\gamma-nt_1\right)^2}$$

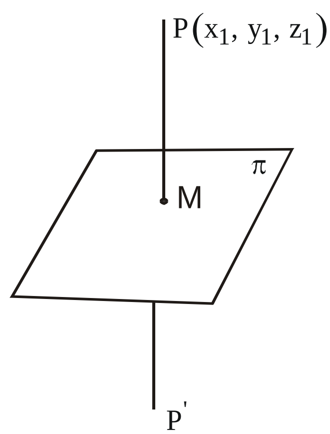
2.6.2 సిద్ధాంతము: $P\left(x_1, y_1, z_1\right)$ ఏదైనా బిందువు మరియు $\pi : ax+by+cz+d=0$ తలము, P గుండా π కు లంబపాదము M అనుకొనుము.

(1) P గుండా π కు లంబరేఖ సమీకరణములు

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

(2) M యొక్క నిరూపకాలు $\left(x_1+at,\ \ y_1+bt,\ \ z_1+ct\right)$

(ఇక్కడ $t=\dfrac{-\left(ax_1+by_1+cz_1+d\right)}{a^2+b^2+c^2}$)



(3) $PM=\dfrac{\left|ax_1+by_1+cz_1+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

సాధన: P గుండా పోయే లంబరేఖ తలమును M వద్ద ఖండిస్తే, M ను తలము π పై P లంబపాదము అవుతుంది.

$PM = P'M,\ \ P \neq P'$ అయ్యేటట్లుగా $\overline{PM}$ పై బిందువు P' అనుకొనుము.

$P'=\left(x_2,\ y_2, z_2\right)$ మరియు $M=\left(\alpha, \beta, \gamma\right)$

$PM = MP'$ కాబట్టి PP' సరళరేఖకు M మధ్య బిందువు.

కాబట్టి $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

కాబట్టి $x_2 = 2\alpha - x_1,\ y_2 = 2\beta - y_1,\ z_2 = 2\gamma - z_1$

తలము πకు PM అభిలంబము కాబట్టి, PM దిక్ సంఖ్యలు a, b, c.

(i) PM సరళరేఖ సమీకరణములు

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

అనగా $x = x_1 + at,\ y = y_1 + bt,\ z = z_1 + ct,\ (t \in \mathbb{R})$

(ii) PM పై M ఉన్నది కాబట్టి $M = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$ అయ్యేటట్లుగా వాస్తవ సంఖ్య t వ్యవస్థితము.
π తలము పై M ఉన్నది కాబట్టి

$$a(x_1 + at) + b(y_1 + bt) + c(c_1 + ct) + d = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

M యొక్క నిరూపకములు $(x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$

(iii) $PM^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 + (z_1 - \gamma)^2 = (-at)^2 + (-bt)^2 + (-ct)^2$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)t^2 = (a^2 + b^2 + c^2)\frac{(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

$$\Rightarrow PM = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

తలమునకు P నుండి లంబదూరము

$$PM = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

2.6.3 సిద్ధాంతము: $L : \frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ సరళరేఖ, $\pi : ax + by + cz + d = 0$ తలం,

$$t_0 = \frac{-(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}, \ t = \frac{-(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a\ell + bm + cn}$$

$\alpha = x_1 + at_0, \beta = y_1 + at_0, \gamma = z_1 + at_0,$

$\alpha_1 = x_1 + at, \beta_1 = y_1 + at, \gamma_1 = z_1 + at$ అనుకొనుము.

π మీద L విక్షేపం సమీకరణాలు

(1) π కి L సమాంతరమైనప్పుడు $\frac{x - \alpha}{\ell} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$.

(2) π కి L సమాంతరంకానప్పుడు $\frac{x - \alpha}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{y - \beta}{\beta_1 - \beta}, \frac{z - \gamma}{\gamma_1 - \gamma}$.

ఉపపత్తి: $A = (x_1, y_1, z_1)$ అనుకొనుము.

సరళరేఖ L పై $P = (x_1 + \ell t, y_1 + mt, z_1 + nt)$, $t \in \mathbb{R}$ ఏదైన ఒక బిందువు, π పై P యొక్క లంబపాదము $M = (\alpha, \beta, \gamma)$ అనుకొనుము.

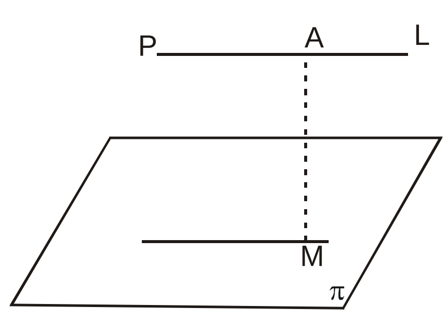
$$t_0 = \frac{-(ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$$ అనుకుంటే,

2.4.11 నుండి $M = (\alpha, \beta, \gamma) = (x_1 + \alpha t_0, y_1 + \beta t_0, z_1 + \gamma t_0)$

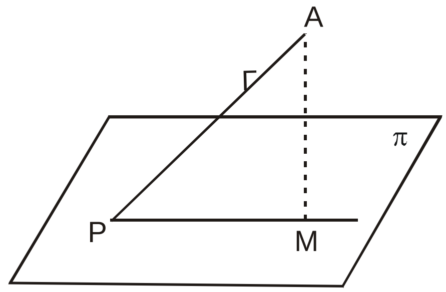
(i) π కి L సమాంతరమైతే π పై L యొక్క విక్షేపమునకు దిక్ సంఖ్యలు ℓ, m, n మరియు ఈ రేఖ పై M ఉండును.

కాబట్టి π పై సరళరేఖ L యొక్క విక్షేపము సమీకరణము

$$\frac{x - \alpha}{\ell} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$$



(ii) π కి L సమాంతరము కానప్పుడు



L, πల ఖండన బిందువు P అయితే π పై P ఉంటుంది.

$P = (x_1 + \ell t, y_1 + mt, z_1 + nt)$ అయితే

$$a(x_1 + \ell t) + b(y_1 + mt) + c(z_1 + nt) + d = 0 \Rightarrow t = \frac{-(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a\ell + bm + cn}$$

$P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ అనుకొనుము.

π పై L యొక్క విక్షేపము అంటే M మరియు P ల గుండా పోయే సరళరేఖ.

MP యొక్క సమీకరణములు

$$\frac{x - \alpha}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{y - \beta}{\beta_1 - \beta} = \frac{z - \gamma}{\gamma_1 - \gamma}$$

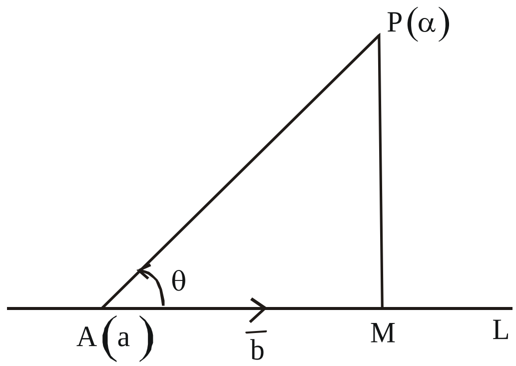
ఒక సరళరేఖకు ఒక బిందువు నుండి లంబ దూరము:

ఒక బిందువు నుండి ఇచ్చిన సరళరేఖకు లంబదూరమును కనుగొనుటకు సూత్రమును కనుగొందాము.

2.6.4 సిద్ధాంతము: $\bar{\alpha}$ స్థాన సదిశ గల బిందువు నుండి సరళరేఖ $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$ కి లంబదూరము $\dfrac{|(\bar{\alpha} - \bar{a}) \times \bar{b}|}{|\bar{b}|}$

ఉపపత్తి: దత్త సరళరేఖ L అనుకొనుము. L రేఖ $A(\bar{a})$ గుండాపోతూ $\bar{b}$ సదిశకు సమాంతరముగా ఉండును.

L పై $P(\bar{\alpha})$ యొక్క లంబపాదము M అనుకొనుము.



$\underline{|PAM} = \theta$ అనుకొనుము

$\bar{b}$కు L సమాంతరముగా ఉన్నది.

$\overline{AP}$ మరియు $\bar{b}$ మధ్య కోణము θ.

$$\left|\overline{AP}\times\bar{b}\right| = \left|\overline{AP}\right|\left|\bar{b}\right|\sin\theta = (AP\sin\theta)\left|\bar{b}\right| = PM\left|\bar{b}\right|$$

$$\Rightarrow PM = \frac{\left|\overline{AP}\times\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right|} = \frac{\left|(\bar{\alpha}-\bar{a})\times\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right|}$$

2.6.5 సిద్ధాంతము: $\frac{x-\alpha}{\ell} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ సరళరేఖకి (x_1, y_1, z_1) నుండి లంబదూరము

$$\frac{\sqrt{\Sigma\left\{(y_1-\beta)n-(z_1-\gamma)m\right\}^2}}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}.$$

ఉపపత్తి: $\bar{\alpha} = (x_1, y_1, z_1), \bar{a} = (\alpha, \beta, \gamma), \bar{b} = (\ell, m, n)$ అనుకొనుము.

$$(\bar{\alpha}-\bar{a})\times\bar{b} = (x_1-\alpha,\ y_1-\beta,\ z_1-\gamma)\times(\ell, m, n)$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1-\alpha & y_j-\beta & z_1-\gamma \\ \ell & m & n \end{vmatrix}$$

$$= \left(\left\{(y_1-\beta)n-(z_1-\gamma)m\right\},\ \left\{(z_1-\gamma)\ell-(x_1-\alpha)n\right\},\ \left\{(x_1-\alpha)m-(y_1-\beta)\lambda\right\}\right)$$

$$\left|(\bar{\alpha}-\bar{a})\times\bar{b}\right| = \sqrt{\Sigma\left\{(y_1-\beta)n-(z_1-\gamma)m\right\}^2}$$

$$\left|\bar{b}\right| = \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}$$

దత్త సరళరేఖకు ఒక బిందువు నుండి లంబదూరము

$$= \frac{\left|(\bar{\alpha} - \bar{a}) \times \bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right|} \quad = \frac{\sqrt{\Sigma\{(y_1 - \beta)n - (z_1 - \gamma)m\}^2}}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}$$

ఉదాహరణలు:

2.6.6 $\pi : x - y + z = 5$ తలము పై $P\,(1, -2, 3)$ బిందువు నుండి $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-6} \cdots\cdots(1)$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా కొలిచిన దూరమును కనుగొనుము.

సాధన: సరళరేఖ **(1)**కి సమాంతరముగా ఉండే సరళరేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు **2, 3, -6.** $P(1, -2, 3)$ బిందువు గుండా పోతూ $2, 3, -6$ దిక్ సంఖ్యలు గల సరళరేఖా సమీకరణము

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-6} = t$$

సరళరేఖ పై ఏదైనా బిందువు $Q = (2t+1, 3t-2, -6t+3)$ π తలము పై Q ఉంటే

$$2t + 1 - 3t + 2 - 6t + 3 - 5 = 0 \;\Rightarrow\; -7t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{7}$$

$$Q = \left(\frac{9}{7}, \frac{-11}{7}, \frac{15}{7}\right)$$

దూరము $PQ = \sqrt{\left(\frac{9}{7} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{7} + 2\right)^2 + \left(\frac{15}{7} - 3\right)^2}$

$$= \frac{49}{49} = 1$$

2.6.7 $(-1, 3, 9)$ బిందువు నుండి $\frac{x-13}{5} = \frac{y+8}{-8} = \frac{z-31}{1} \cdots\cdots(1)$ సరళరేఖ పై లంబపాదము మరియు లంబదూరము కనుగొనుము.

సాధన: సరళరేఖ **(1)** పై ఏదైనా బిందువు $P = (5t+13, -8t-8, t+31)$ సరళరేఖ **(1)** పై $A\,(-1, 3, 9)$ యొక్క లంబపాదము P అయితే సరళరేఖ **(1)** పై P ఉన్నది.

AP యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $5t+14, -8t-11, t+22$

సరళరేఖ (1) యొక్క దిక్ సంఖఅయలు $5, -8, 1$

సరళరేఖ (1)కి AP లంబము కావడానికి

అనగా $5(5t+14)-8(-8t-11)+1(t+22)=0$

అనగా $25t+70+64t+88+t+22=0$

అనగా $90t+180=0$

అనగా $t=-2$ తుల్యము.

కాబట్టి సరళరేఖ (1) పై A యొక్క లంబపాదము $P=(-10+13, 16-8, -2+31)=(3, 8, 29)$

సరళరేఖ (1)కి A నుండి లంబదూరము

$$AP=\sqrt{(3+1)^2+(8-3)^2+(29-9)^2} = \sqrt{16+25+400}=\sqrt{441}=21 \text{ యూనిట్లు}$$

2.6.8 $\pi : x+2y+2z=3$ తలమునకు లంబముగా ఉంటూ $A(-1, 3, 2)$ గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణములు కనుగొనుము.

సాధన: π యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు 1, 2, 2. π కి లంబముగా ఉంటూ A గుండాపోయే రేఖ π అభిలంబమునకు సమాంతరము. కావలసిన రేఖకు దిక్ సంఖ్యలు 1, 2, 2.

కాబట్టి కావలసిన సరళరేఖకు సమీకరణములు $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{2}$

2.6.9 $2x+3y-4z=0=3x-4y+z$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉంటూ $(-3, 2, 5)$ బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణములు కనుగొనుము.

సాధన: $\pi_1 \equiv 2x+3y-4z=0, \pi_2 \equiv 3x-4y+z=0$ లు L ను సూచిస్తాయని అనుకొనుము.

π_1 మరియు π_2 ల అభిలంబముల దిశలో యూనిట్ సదిశలు వరుసగా $\overline{n_1}$ మరియు $\overline{n_2}$ అనుకొనుము.

$\overline{n_1}=(2, 3, -4)$ $\overline{n_2}=(3, -4, 1)$ మరియు $\overline{n_1}\times\overline{n_2}$, L మీది సదిశ L దిక్ సంఖ్యలు $3-16, -12-2, -8-9$ అనగా $-13, -14, -17$ కాబట్టి L సమీకరణములు

$$\frac{x+3}{13}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-5}{17}$$

2.6.10 $x+2y-2z=0,\ x-2y+z=7;\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$ సరళరేఖల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

సాధన: సరళరేఖల దిక్ సంఖ్యలు ఇచ్చినపుడు ఆ రేఖల మధ్య కోణమునకు సూత్రము తెలియును.

$\pi_1 : x+2y-2z=0,\ \ \pi_2 : x-2y+z-7=0$ లు L ను సూచిస్తాయని అనుకొనుము.

దత్త సరళరేఖ $L_2 : \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$

$\overline{n_1}$ మరియు $\overline{n_2}$ ల అభిలంబముల దిశలో యూనిట్ సదిశలు వరుసగా $\overline{n_1}$ మరియు $\overline{n_2}$ అనుకొనుము.

$\overline{n_1} = (1,2,-2)$ $\overline{n_2} = (1,-2,1)$, $\overline{n_1}\times\overline{n_2}$ L పై సదిశ

L, దిక్ సంఖ్యలు $2-4,\ -2-1,\ -2-2$ అనగా $-2, -3, -4$ లేదా $2, 3, 4$

L_1, L_2 ల మధ్య కోణము θ అనుకుంటే $\cos\theta = \dfrac{2\times1+3\times-2+4\times2}{\sqrt{4+9+16}\ \sqrt{1+4+4}} = \dfrac{4}{3\sqrt{29}}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{29}}\right)$$

2.6.11 $3x-7y-5z=1,\ 5x-13y+3z+2=0$ తలములు $8x-11y+2z=0$ తలముల ఛేదన రేఖల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

సాధన: $\pi_1 \equiv 3x-7y-5z-1=0$, $\pi_2 \equiv 5x-13y+3z+2=0$, మరియు $\pi_3 \equiv 8x-11y+2z=0$ ఇచ్చిన తలములు, π_1, π_3 లు L_1 రేఖను మరియు π_2, π_3 లు L_2 ను సూచించును. π_1, π_2 మరియు π_3 ల అభిలంబముల దిశలో యూనిట్ సదిశలు వరుసగా $\overline{n}_1, \overline{n}_2$ మరియు $\overline{n_3}$.

$\overline{n_1} = (3, -7, -5), \overline{n_2} = (5, -13, 3), \overline{n_3} = (8, -11, 2)$

L_1, L_2 లో సదిశలు వరుసగా $\overline{n_1}\times\overline{n_3}$ మరియు $\overline{n_2}\times\overline{n_3}$

L_1 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $-14-55, -40-6,$ అనగా $-69, -44, 23$ అనగా **3, 2, -1.**

L_2 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $-26+33, 24-10, -55+104$, అనగా **7, 14, 49** అనగా **1, 2, 7.**

L_1 మరియు L_2 మధ్య కోణము θ అనుకుంటే

$$\cos\theta = \frac{1(3)+2(2)-7}{\sqrt{9+4+1}\ \sqrt{1+4+49}} = 0 \text{ కాబట్టి } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

2.6.12 $L : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+5}{5}$ సరళరేఖ $\pi \equiv x+2y-z=0$ తలము పై ఉన్నదని చూపుము.

సాధన: $A = (-1, -2, -5)$ అనుకొనుము. L దిక్ సంఖ్యలు -1, 3, 5. π అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు 1, 2, -1.

$-1+2(-2)-1(-5)=0$ కాబట్టి A, తలములో వుండును.

$(-1)(-1)+3(2)+5(-1)=0$ కాబట్టి π లో వుండును.

2.6.13 $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+4}{5}$ సరళరేఖ L, $\pi \equiv 3x+4y+z-4=0$ తలమునకు సమాంతరమని చూపుము.

సాధన: L దిక్ సంఖ్యలు $1, -2, 5$ π అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు $3, 4, 1$.

$1(3)-2(4)+5(1)=0$ కాబట్టి π అభిలంబమునకు L లంబము కాబట్టి π కి L సమాంతరము.

2.6.14 $L : \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+4}{5}$ సరళరేఖ $\pi \equiv -2x+3y+5z=0$ తలమునకు లంబముగా ఉంటుందని చూపుము.

సాధన: L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $-2, 3, 5$. π అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు $-2, 3, 5$ $\Rightarrow \pi$ అభిలంబమునకు L సమాంతరము $\Rightarrow \pi$ కి L లంబము.

2.6.15 $L : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ సరళరేఖ మరియు $\pi \equiv 3x+y+z-7=0$ తలముల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

సాధన: L దిక్ సంఖ్యలు 2, 3, 6. π అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు 3, 1, 1.

L మరియు π మధ్యకోణము θ అయితే

$$\text{Sin } \theta = \pm \frac{a\ell + bm + cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{\ell^2+m^2+n^2}} = \pm \frac{2(3)+3(1)+6(1)}{\sqrt{4+9+36}\ \sqrt{9+1+1}} = \pm \frac{15}{7\sqrt{11}}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\pm \frac{15}{7\sqrt{11}}\right)$$

2.6.16 $x-y+2z=5,\ 3x+y+z=6$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటూ (1, 2, 3) బిందువు గుండాపోయే సరళరేఖ సమీకరణములు కనుగొనుము.

సాధన: $\pi_1 \equiv x-y+2z-5$, $\pi_2 \equiv 3x+y+z-6$ అనుకొనుము.

సరళరేఖా సమీకరణం $\pi_1 = 0 = \pi_2$

$\overline{n_1} = (1, -1, 2)$ మరియు $\overline{n_2} = (3, 1, 1)$లు π_1, π_2ల అభిలంబముల దిశలో యూనిట్ సదిశలు అయితే $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$ సరళరేఖ L దిశలో యూనిట్ సదిశ.

$$\overline{n_1} \times \overline{n_2} = (-3, 5, 4)$$

కాబట్టి (1, 2, 3) గుండాపోతూ L కి సమాంతరముగా $-3, 5, 4$ దిక్ సంఖ్యలు గల సరళరేఖ యొక్క సమీకరణములు.

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$$

2.6.17 $x - y + 3z + 5 = 0 = 2x + y - 2z + 6$ సరళరేఖను కలిగియుంటూ $(3, 1, 1)$ బిందువు గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $\pi_1 \equiv x - y + 3z + 5 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 6 = 0$ సమీకరణములు L ను సూచిస్తాయి. రేఖ L గుండా తలము, π_1 మరియు π_2 ల ఛేదనము గుండా పోయే తలము వలె ఉండును. అది $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ కు $\pi_3 \equiv \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2 = 0$ రూపములో ఉండును.

$(3, 1, 1)$ బిందువు గుండా π_3 తలము పోవును.

కాబట్టి $\lambda_1 (3 - 1 + 3 + 5) + \lambda_2 (6 + 1 - 2 + 6) = 0$ అనగా $10\lambda_1 + 11\lambda_2 = 0$

$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{-11}{10}$ కాబట్టి π_3 తలము యొక్క సమీకరణము $-11(x - y + 3z + 5) + 10(2x + y - 2z + 6) = 0$

$9x + 21y - 53z + 5 = 0$.

2.6.18 $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-2}{5} \cdots (1)$, $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z}{5} \cdots (2)$ సమాంతర రేఖలు కలిగియున్న తలము యొక్క సమీకరణములు కనుగొనుము.

సాధన: దత్త సమాంతర రేఖల దిక్ సంఖ్యలు 1, -4, 5. కావలసిన తలము π అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c అనుకొనుము. సరళరేఖలు (1), (2) లను π తలము కలిగి ఉన్నది కాబట్టి $a(1) + b(-4) + c(5) = 0$, $\Rightarrow a - 4b + 5c = 0 \cdots (3)$

తలము పై బిందువులు $A(4, 3, 2), B = (3, -2, 0)$.

π తలము పై AB సరళరేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 1, 5, 2 కాబట్టి $a + 5b + 2c = 0 \cdots (4)$

(3) మరియు (4) లను సాధించగా

$$\frac{a}{-8-25} = \frac{b}{5-2} = \frac{c}{5+4}$$

అనగా $\frac{a}{-33}=\frac{b}{3}=\frac{c}{9}$ అనగా $\frac{a}{11}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{-3}$

π సమీకరణము $11(x-3)-1(y+2)-3(z)=0$ అనగా $11x-y-3z-35=0$

2.6.19 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{4}\ \cdots(1)$ సరళరేఖను కలిగియుంటూ $x+2y+z-12=0$ తలమునకు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: కావలసిన తలము π మరియు π యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c లు అనుకొనుము. π పై సరళరేఖ **(1)** ఉన్నది కాబట్టి $2a-b+4c=0\ \cdots(2)$

$\pi_1 \equiv x+2y+z-12=0$ కి π లంబము కాబట్టి $a+2b+c=0\ \cdots(3)$

(2) మరియు **(3)**ల నుండి

$$\frac{a}{-1-8}=\frac{b}{4-2}=\frac{c}{4+1}\Rightarrow\frac{a}{-9}=\frac{b}{2}=\frac{c}{5}$$

π పై $A(1,-1,3)$ ఉన్నది. కాబట్టి π యొక్క సమీకరణము

$-9(x-1)+2(y+1)+5(z-3)=0$ అనగా $9x-y-5z+4=0$.

2.6.20: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$ సరళరేఖకు $(1, 6, 3)$ బిందువు నుండి లంబ దూరమును కనుగొనుము.

సాధన: $A=(0,1,2),\ P=(1,6,3),\ \bar{b}=(1,2,3)$ అనుకొనుము.

$\overline{AP}=(1, 5, 1)$

$$\overline{AP}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=13\bar{i}-2\bar{j}-3\bar{k}=(13,-2,-3)$$

కావలసిన లంబ దూరము $=\frac{\left|\overline{AP}\times\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right|}=\frac{\sqrt{13^2+4+9}}{\sqrt{1+4+9}}=\sqrt{\frac{182}{14}}=\sqrt{13}$

2.6.21 $\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}$, $2\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$ బిందువులను కలిపే సరళరేఖ పై $3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$ బిందువు నుండి లంబదూరము కనుగొనుము.

సాధన: $\overline{OP} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\overline{OA} = \bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$, $\overline{OB} = 2\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$

$$\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} = 2\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{i} + 4\bar{j} - 9\bar{k}$$

$$\overline{AP} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 7\bar{i} + 14\bar{j} + 7\bar{k}$$

$$\left|\overline{AP} \times \overline{AB}\right| = 7\sqrt{6} \quad , \quad \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+16+81} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

AB కి P నుండి లంబదూరము $\dfrac{\left|\overline{AP} \times \overline{AB}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} = \dfrac{7\sqrt{6}}{7\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

2.6.22 సరళరేఖ L, $2x+3y+4z+5=0 \cdots (1)$, $x+2y+3z+4=0 \cdots (2)$కు మూల బిందువు నుండి లంబదూరము కనుగొనుము.

సాధన: L లో ఛేదించుకునే తలముల సమీకరణములలో $z=0$ ప్రతిక్షేపించగా

$$2x+3y+5=0 \cdots (3) \qquad x+2y+4=0 \cdots (4)$$

(3) మరియు (4)ల నుండి $x=2, y=-3$. L పై బిందువు $A = (2, -3, 0)$

(1) మరియు (2)ల నుండి L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు

$$\begin{array}{ccccccc} & a & & b & & c & \\ 3 & & 4 & & 2 & & 3 \\ 2 & & 3 & & 1 & & 2 \end{array}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{-2} = \frac{c}{1}$$

L సమీకరణములు $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{1}$

L పై ఏదేని బిందువు $B = (t+2, -2t-3, t)$

OB దిక్ సంఖ్యలు $t+2, -2t-3, t$

L కి OB లంబముగా ఉంటే $1(t+2)-2(-2t-3)+t=0 \Rightarrow t=\frac{-4}{3}$

$$B=\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

మూల బిందువు నుండి L కు లంబదూరము

$$OB=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \text{ యూనిట్లు.}$$

2.6.23 S.A.Q.: $(1, 0, -1), (3, 2, 2)$ బిందువుల గుండాపోతూ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణం కనుగొనుము.

2.6.24 S.A.Q.: $\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ సరళరేఖ గుండాపోతూ ℓ_2, m_2, n_2 దిక్ కొసైన్‌లు గల వేరొక సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉన్న తలము సమీకరణము కనుగొనుము.

2.6.25 S.A.Q.: $\frac{x-x_2}{\ell}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}$ సరళరేఖ మరియు (x_1, y_1, z_1) బిందువు గుండా పోయే తలము సమీకరణమును కనుగొనుము.

2.6.26 S.A.Q.: సరళరేఖ $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ గుండాపోతూ $\frac{x}{\ell}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉండే తలమునకు సమీకరణము కనుగొనుము.

2.6.27 S.A.Q.: (α, β, γ) బిందువు గుండాపోతూ $L: \frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ సరళరేఖకు లంబముగా ఉండే తలము సమీకరణమును కనుగొనుము.

2.6.28 S.A.Q.: ℓ_1, m_1, n_1 ; ℓ_2, m_2, n_2 లు దిక్ కొసైన్‌లు అయితే $\frac{x}{\ell_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1}$; $\frac{x}{\ell_2}=\frac{y}{m_2}=\frac{z}{n_2}$ సరళరేఖల మధ్య కోణమును సమద్విఖండన చేస్తూ, అవి ఉన్న తలమునకు లంబముగా ఉండే తలముల సమీకరణములు $(\ell_1 \pm \ell_2)x+(m_1 \pm m_2)y+(n_1 \pm n_2)z=0$ అని చూపుము.

2.6.29 S.A.Q.: ఒక చర తలము నిరూపకాక్షములతో అంతర ఖండములు చేస్తున్నది. ఆ అంతర ఖండముల వర్గముల మొత్తము k^2 (స్థిర సంఖ్య). తలము పై మూల బిందువు యొక్క లంబపాదమునకు బిందుపథము $(x^{-2}+y^{-2}+z^{-2})(x^2+y^2+z^2)^2=k^2$.

2.6.30 S.A.Q.: $\ell^2+m^2+n^2=1,\ p>0$ కు $\ell x+my+nz=p$ తలము నిరూపకాక్షములను P, Q, R ల వద్ద ఛేదిస్తుంది మరియు ΔPQR యొక్క కేంద్రాభాసము G. G వద్ద తలమునకు లంబరేఖ నిరూపక తలములను A, B, C ల వద్ద ఛేదిస్తే $\frac{1}{GA}+\frac{1}{GB}+\frac{1}{GC}=\frac{3}{p}$ అని నిరూపించుము.

2.6.31 S.A.Q.: $x+2y+z=6$ తలము పై $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{4}$ సరళరేఖ యొక్క విక్షేపమునకు సమీకరణములు కనుగొనుము.

2.7 S.A.Q. లకు సమాధానములు:

2.6.23 కావలసిన తలము π మరియు π తలము అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c లు అనుకొనుము.

π పై బిందువులు $A=(1, 0, -1),\ B=(3, 2, 2)$.

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ సరళరేఖ π కు సమాంతరము.

$$\Rightarrow a-2b+3c=0 \cdot \cdot \cdot (1)$$

AB యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 2, 2, 3. π పై AB ఉన్నది కాబట్టి

$$2a+2b+3c=0 \cdot \cdot \cdot (2)$$

(1), (2)ల నుండి $\frac{a}{-6-6}=\frac{b}{6-3}=\frac{c}{2+4}$

అనగా $\frac{a}{-12}=\frac{b}{3}=\frac{c}{6}$ అనగా $\frac{a}{+4}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{-2}$

కాబట్టి π యొక్క సమీకరణము $4(x-1)-1(y-0)-2(z+1)=0$ అనగా $4x-y-2z-6=0$.

2.6.24 కావలసిన తలము π మరియు π అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c అనుకొనుము.

$\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ సరళరేఖ π పై ఉన్నది మరియు $A=(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు గుండా పోతున్నది.

$$\Rightarrow \ell_1 a+m_1 b+n_1 c=0 \cdot \cdot \cdot (1)$$

π తలము ℓ_2, m_2, n_2 దిక్ కొసైన్‌లు గల సరళరేఖ L కు సమాంతరంగా ఉన్నది.

π అభిలంబమునకు L లంబముగా ఉన్నందున

$$\ell_2 a+m_2 b+n_2 c=0 \cdot \cdot \cdot (2)$$

(1), (2)ల నుండి $\dfrac{a}{m_1n_2-m_2n_1}=\dfrac{b}{n_1\ell_2-n_2\ell_1}=\dfrac{c}{\ell_1m_2-\ell_2m_1}$

కాబట్టి π సమీకరణము

$$(m_1n_2-m_2n_1)(x-x_1)+(n_1\ell_2-n_2\ell_1)(y-y_1)+(\ell_1m_2-\ell_2m_1)(z-z_1)=0$$

అనగా $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

2.6.25 π కావలసిన తలము మరియు π అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c లు అనుకొనుము. π పై $\dfrac{x-x_2}{\ell}=\dfrac{y-y_2}{m}=\dfrac{z-z_2}{n}$ సరళరేఖ ఉన్నది మరియు తలము $A(x_2, y_2, z_2), B=(x_1, y_1, z_1)$ బిందువుల గుండా పోవును.

$$\Rightarrow \ell a+mb+nc=0 \quad \cdots (1)$$

AB సరళరేఖ దిక్ సంఖ్యలు $x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2$ కాబట్టి

$$(x_1-x_2)a+(y_1-y_2)b+(z_1-z_2)c=0 \quad \cdots (2)$$

A గుండా పోతున్న π సమీకరణము $a(x-x_2)+b(y-y_2)+c(z-z_2)=0 \cdots (3)$

(1), (2) మరియు (3)ల నుండి a, b, c లను లోపింపచేస్తే π తలము యొక్క సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \ell & m & n \end{vmatrix}=0$$

2.6.26 $\pi_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1z-d_1=0,\ \pi_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ తలములు L_1 రేఖను సూచిస్తున్నాయి అనుకొనుము. L_1 గుండా పోతూ $L_2 : \dfrac{x}{\ell}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా ఉండే తలము π అనుకొనుము. L_1 గుండా పోయే తలము π, π_1 మరియు π_2 ల ఛేదనము గుండా పోవు తలము కాబట్టి దాని సమీకరణము $\lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2=0$ రూపంలో ఉండును. ఇక్కడ $(\lambda_1, \lambda_2)\neq(0, 0)$.

$$\Rightarrow \lambda_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

$$\Rightarrow (a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)x+(b_1\lambda_1+b_2\lambda_2)y+(c_1\lambda_1+c_2\lambda_2)z+(d_1\lambda_1+d_2\lambda_2)=0$$

ఈ తలము L_2 రేఖకు సమాంతరము

$$\Rightarrow \ell(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2) + m(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2) + n(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-(\ell a_2 + mb_2 + nc_2)}{\ell a_1 + mb_1 + nc_1}$$

కావలసిన తలమునకు సమీకరణము

$$(\ell a_2 + mb_2 + nc_2)(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) - (\ell a_1 + mb_1 + nc_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

2.6.27 (α, β, γ) బిందువు గుండా పోతూ L : $\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ సరళరేఖకు లంబముగా ఉండే తలము సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: $A(\alpha, \beta, \gamma)$ బిందువు గుండా పోయే కావలసిన తలము π అనుకొనుము.

ఇచ్చిన సరళరేఖ $L: \frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$

L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు ℓ, m, n. L కి π లంబముగా ఉండడం, L కి π అభిలంబము సమాంతరం కావడం, π అభిలంబము మరియు L దిక్ సంఖ్యలు అనుపాతములో ఉండడం ఒకటే కాబట్టి π యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు ℓ, m, n

π తలము యొక్క సమీకరణము

$$\ell(x - \alpha) + m(y - \beta) + n(z - \gamma) = 0$$

2.6.28 $\frac{x}{\ell_1} = \frac{y}{m_1} = \frac{z}{n_1}$ సరళరేఖను L_1 సూచిస్తుందనీ, $\frac{x}{\ell_2} = \frac{y}{m_2} = \frac{z}{n_2}$ సరళరేఖను L_2 సూచిస్తుంది అనుకొనుము.

ℓ_1, m_1, n_1 ; ℓ_2, m_2, n_2 లు వరుసగా L_1, L_2ల దిక్ కొసైన్‌లు

L_1, L_2ల మధ్య కోణ సమద్వి ఖండన చేయు రేఖలు L_3, L_4ల దిక్ సంఖ్యలు

$$\ell_1 + \ell_2, m_1 + m_2, n_1 + n_2 ; \quad \ell_1 - \ell_2, m_1 - m_2, n_1 - n_2$$

L_3, L_4లు పరస్పరము లంబముగా ఉండునని తెలియును.

L_3, L_4ల గుండా పోయే తలములు వరుసగా π_1, π_2 మరియు అవి వరుసగా L_4, L_3లకు లంబముగా ఉండునని అనుకొనుము.

π_1, π_2 లు మూలబిందువు గుండాపోవును.

π_1 సమీకరణము $(\ell_1-\ell_2)x+(m_1-m_2)y+(n_1-n_2)z=0$

π_2 సమీకరణము $(\ell_1+\ell_2)x+(m_1+m_2)y+(n_1+n_2)z=0$

కావలసిన తలముల సమీకరణములు

$$(\ell_1\pm\ell_2)x+(m_1\pm m_2)y+(n_1\pm n_2)z=0.$$

2.6.29 X అంతర ఖండము a, Y అంతర ఖండము b, Z అంతర ఖండము c లు ఉన్న చర తలము π సమీకరణము

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \cdot\cdot\cdot (1)$$ అనుకొనుము.

$a^2+b^2+c^2=k^2$ అని దత్తాంశము. π తలము అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$

మూల బిందువు గుండా పోతూ తలమునకు లంబముగా ఉండే సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x-0}{\frac{1}{a}}=\frac{y-0}{\frac{1}{b}}=\frac{z-0}{\frac{1}{c}}=t \cdot\cdot\cdot (2)$$

(2) సరళరేఖ పై ఏదైనా బిందువు $Q=\left(\frac{t}{a}, \frac{t}{b}, \frac{t}{c}\right)$

π తలములో Q ఉంటే $\frac{t}{a^2}+\frac{t}{b^2}+\frac{t}{c^2}=1$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}$$

π పై మూలబిందువు లంబపాదము $P(x_1, y_1, z_1)$ అనుకొనుము.

$$(x_1, y_1, z_1)=\left(\frac{t}{a}, \frac{t}{b}, \frac{t}{c}\right)$$

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=t^2\left(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}\right)=\frac{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}{\left(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}\right)^2}=t$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{z_1^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{t^2}=\frac{k^2}{t^2}$$

$$\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)^2\left(x_1^{-2}+y_1^{-2}+z_1^{-2}\right)=t^2\cdot\frac{k^2}{t^2}=k^2$$

$\Rightarrow\ P\left(x_1,y_1,z_1\right)$ బిందువు

$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\left(x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}\right)=k^2$ సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తుంది.

విపర్యముగా $P\left(x_1,y_1,z_1\right)$ బిందువు

$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}\right)=k^2$ సమీకరణమును తృప్తిపరుచునని అనుకొనుము.

$$\Rightarrow\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_1^{-2}+y_1^{-2}+z_1^{-2}\right)=k^2\ \cdots\ (1)$$

తలము పై మూలబిందువు లంబపాదము P అయితే P గుండాపోతూ x_1-0,y_1-0,z_1-0 దిక్ సంఖ్యలతో అభిలంబము ఉన్న తలము సమీకరణము

$$x_1\left(x-x_1\right)+y_1\left(y-y_1\right)+z_1\left(z-z_1\right)=0$$

అనగా $x_1x+y_1y+z_1z=x_1^2+y_1^2+z_1^2$

అనగా $$\frac{x}{\left(\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{x_1}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{y_1}\right)}+\frac{z}{\left(\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{z_1}\right)}=1$$

$x_1\neq 0,\ y_1\neq 0$ మరియు $z_1\neq 0$

అంతర ఖండముల వర్గముల మొత్తము

$$=\left(\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{x_1}\right)^2+\left(\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{y_1}\right)^2+\left(\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{z_1}\right)^2$$

$$=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)^2\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{z_1^2}\right)$$

$$=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)^2\left(x_1^{-2}+y_1^{-2}+z_1^{-2}\right)=k^2$$

2.6.30 $\ell^2+m^2+n^2=1,\ p>0,\ \ell x+my+nz=p$ తలము π అనుకొనుము. X అక్షము, Y అక్షము మరియు Z అక్షములను π వరుసగా P, Q మరియు R వద్ద ఖండించును మరియు Δ PQR కేంద్రాభాసము G అనుకొనుము.

$$P=\left(\frac{p}{\ell},0,0\right),\ Q=\left(0,\frac{p}{m},0\right),\ R=\left(0,0,\frac{p}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\ G=\left(\frac{p}{3\ell},\frac{p}{3m},\frac{p}{3n}\right)$$

G వద్ద π కి లంబముగా ఉండే సరళరేఖ L అనుకొనుము.

L సమీకరణము $\dfrac{x-\frac{p}{3\ell}}{\ell}=\dfrac{y-\frac{p}{3m}}{m}=\dfrac{z-\frac{p}{3n}}{n}=t$ అనుకొనుము.

YZ - తలము $X=0$ ను L రేఖ A వద్ద ఖండించును.

కాబట్టి $GA=\left|\dfrac{0-p/3\ell}{\ell}\right|=\left|\dfrac{-p}{3\ell^2}\right|$

$$\Rightarrow \frac{1}{GA}=\frac{3\ell^2}{p},\quad (p>0)$$

అదే విధముగా $\dfrac{1}{GB}=\dfrac{3m^2}{p},\ \dfrac{1}{GC}=\dfrac{3n^2}{p}$

కాబట్టి $\dfrac{1}{GA}+\dfrac{1}{GB}+\dfrac{1}{GC}=\dfrac{3\ell^2+3m^2+3n^2}{p}=\dfrac{3}{p}$

2.6.31 తలము సమీకరణము $x+2y+z=6\ \cdots\ (1)$

సరళరేఖ L సమీకరణము $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}=t$ అనుకొనుము.

L సరళరేఖ గుండా పోయే ఏ తలముకైనా సమీకరణము

$$a(x-1)+b(y+1)+c(z-3)=0\ \cdots\ (2),$$

తలము అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c లు.

(2)లో L ఉన్నది కాబట్టి $2a-b+4c=0 \cdot \cdot \cdot (3)$

తలము (2) తలము (1)కి లంబముగా ఉంటే

$$a+2b+c=0 \cdot \cdot \cdot (4)$$

(3) మరియు (4)లను సాధించగా

$$\frac{a}{-1-8}=\frac{b}{4-2}=\frac{c}{4+1} \quad \text{అనగా} \quad \frac{a}{-9}=\frac{b}{2}=\frac{c}{5}$$

(2) నుండి $-9(x-1)+2(y+1)+5(z-3)=0$ వచ్చును.

అనగా $9x-2y-5z+4=0 \cdot \cdot \cdot (5)$

(1) మరియు (5) సమీకరణములు (1) పై సరళరేఖ L విక్షేపమును సూచిస్తాయి.

2.8 సారాంశము:

ఈ పాఠము చదివి ఉదాహరణలు మరియు అభ్యాసము చేసిన తరువాత విద్యార్థికి వివిధ రూపములలో సరళరేఖ సమీకరణములు, తలములు, సరళరేఖల మధ్య కోణములు మరియు ఒక బిందువు నుండి సరళరేఖకు లంబదూరము కనుగొనుటలో మంచి పరిజ్ఞానము కలుగును.

2.9 సాంకేతిక పదములు:

సౌష్ఠవ రూపము

లంబపాదము

విక్షేపము

2.10 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. $(2,-3,1),(3,-4,-5)$ గుండా పోయే సరళరేఖ $2x+y+z=7$ తలమును $(1,-2,7)$ వద్ద ఛేదించునని చూపుము,

2. $2x+4y+3z+3=0,\ x+2y+3z=0$ సరళరేఖను $\frac{x-3}{3}=\frac{2-y}{4}=\frac{z+1}{1}$ రేఖ $(9,-6,1)$ బిందువు వద్ద ఛేదించునని చూపుము.

3. $2x+5y-6z=16$ తలము పై $(3,-4,5)$ బిందువు యొక్క దూరమును 2, 1, -2కు అనుపాతముగా ఉండే దిక్ సంఖ్యలు గల సరళరేఖ పై కనుగొనుము.

4. $\frac{x}{\ell_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1}$; $\frac{x}{\ell_2}=\frac{y}{m_2}=\frac{z}{n_2}$ సరళరేఖలకు సమాంతరముగా ఉంటూ (x_1, y_1, z_1) గుండాపోయే తలము సమీకరణమును కనుగొనుము.

5. $(1, 6, 3)$ బిందువు నుండి $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$ సరళరేఖకు లంబముగా ఉండే రేఖ సమీకరణములు $x-1=0,\ \frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2}$ మరియు లంబపాదము $(1, 3, 5)$ మరియు లంబము పొడవు $\sqrt{13}$ అని చూపుము.

6. $2x+y-3z-4=0$ తలము పై $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ సరళరేఖ విక్షేపము రేఖకు సమీకరణము కనుగొనుము.

7. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+5}{5}$ సరళరేఖ $x+2y-z=0$ తలము పై ఉన్నదని చూపుము.

8. $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+4}{5}$ సరళరేఖ $-2x+3y+5z=0$ తలమునకు లంబముగా ఉండునని చూపుము.

9. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-4}{-1}$ మరియు $\frac{x+2}{-4}=\frac{y}{5}=\frac{z-3}{1}$ సమాంతర రేఖలున్న తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

10. $(-5, -3, 6)$ బిందువు గుండా పోతూ 1, 4, 9 దిక్ సంఖ్యలు గల సరళరేఖ పై (2, 4, -1) బిందువు నుండి లంబదూరమును కనుగొనుము.

2.11 అభ్యాసము:

1. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-4}$ సరళ రేఖ మరియు $x+y+z-3=0$ తలముల ఖండన బిందువు కనుగొనుము.

జ॥ (1, 1, 1).

2. $(2, -3, 1), (3, -4, 5)$ బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖ $2x+y+z=7$ తలమును ఛేదించే బిందువును కనుగొనుము.

జ॥ $(3, -4, 5)$

3. $2x-y+z=3$ తలము పై $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$ సరళరేఖకు సమాంతరముగా $(1, 3, 4)$ బిందువు నుండి దూరమును కనుగొనుము.

జ॥ 0

4. $(-1,-5,-10)$ బిందువు మరియు $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{12}$ సరళరేఖ మరియు $x-y+z=5$ తలముల ఖండన బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనుము.

జ॥ 13

5. $(0,2,3),(4,8,11)$ బిందువులను కలిపే రేఖ పై $(3,-1,11)$ బిందువు లంబపాదము మరియు లంబదూరము కనుగొనుము.

జ॥ $(2,5,7),\sqrt{53}$.

6. $3x+2y-z-4=0,\ 4x+y-2z+3=0$ సరళరేఖ సమీకరణములను సౌష్ఠవ రూపములో కనుగొనుము.

జ॥ $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-5}$

7. $(1,1,1)$ బిందువు గుండా పోతూ $x-y+z=2,\ 4x+3y-z+1=0$ సరళరేఖకు లంబముగా ఉండే తలము సమీకరణమును కనుగొనుము.

జ॥ $x-5y-11z+15=0$

8. $(2,4,-1)$ బిందువు నుండి $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-6}{-9}$ పై లంబపాదము మరియు లంబము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $(-4,1,-3),\ \dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{2}$

9. $x-2y+z=0=x+y-z-3$; $x+2y+z-5=0=8x+12y+5z$ సరళరేఖల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

జ॥ $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{8}{\sqrt{406}}\right)$

10. $2x+3y-4z=0=3x-4y+z-7$ సరళరేఖ $5x-y-3z+12=0=x-7y+5z-6$ రేఖకు సమాంతరని చూపుము.

11. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ సరళరేఖ $5x+2y-3z-17=0$ తలమునకు సమాంతరమని చూపుము.

12. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{3}$ సరళరేఖ $6x+3y+2z-6=0$ తలమునకు సమాంతరమని చూపుము.

13. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$ సరళరేఖ $x-2y+z+5=0$ తలమునకు లంబముగా ఉండునని చూపుము.

14. (x_1, y_1, z_1) బిందువు గుండా పోతూ $\ell_1 x + m_1 y + n_1 z = p_1$, $\ell_2 x + m_2 y + n_2 z = p_2$ రేఖకు సమాంతరముగా ఉండే సరళరేఖ యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $\dfrac{x - x_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1 \ell_2 - n_2 \ell_1} = \dfrac{z - z_1}{\ell_1 m_2 - \ell_2 m_1}$

15. $4x - 3y + 5 = 0 = y - 2z - 5$ సరళరేఖను కలిగియుండి $(2, -1, 1)$ బిందువు గుండా ఏయే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $4x - y - 4z = 0$

16. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-4}{-1}$; $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-3}{1}$ సమాంతర రేఖలను కలిగియున్న తలము సమీకరణమును కనుగొనుము.

జ॥ $x + 3y - 11z + 35 = 0$

17. $(1, 0, -1)$, $(0, -8, 1)$ బిందువుల గుండా పోతూ $6(x+1) = 3 - 3y = 2z + 4$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

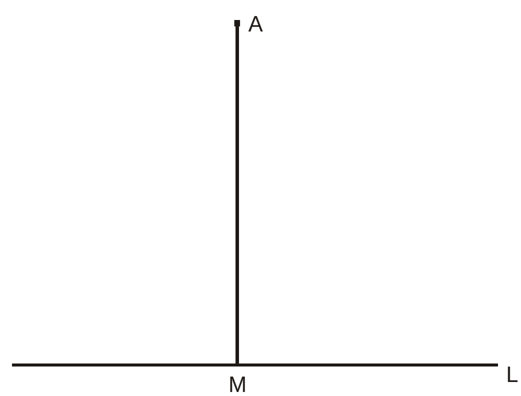
జ॥ $4x - y - 2z - 6 = 0$

2.12 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: $\dfrac{x-13}{5} = \dfrac{y+8}{-8} = \dfrac{z-31}{1}$ సరళరేఖ పై $(-1, 3, 9)$ బిందువు యొక్క లంబపాదము మరియు లంబదూరము కనుగొనుము.

నిర్వచనములు:

1. L సరళరేఖ మరియు A ఏదైనా బిందువు అయితే A గుండాపోయే లంబరేఖ, L ల ఖండన బిందువు M ను, L పై A యొక్క లంబపాదము అంటారు మరియు AM ను A నుండి L కు లంబము అంటారు.



ఉపయోగించిన సిద్ధాంతములు:

(i) $A(\alpha, \beta, \gamma)$ నుండి సరళరేఖ $L : \frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ కు లంబపాదము

$$Q = (x_1 + \ell t_1, y_1 + mt_1, z_1 + nt_1), \quad t_1 = \frac{\ell(\alpha - x_1) + m(\beta - y_1) + n(\gamma - z_1)}{\ell^2 + m^2 + n^2}$$

(ii) లంబరేఖ AQ సమీకరణము $\frac{x-\alpha}{x_1 - \alpha - \ell t_1} = \frac{y-\beta}{y_1 - \beta - m t_1} = \frac{z-\gamma}{z_1 - \gamma - n t_1}$

(iii) మరియు AQ పొడవు $AQ = \sqrt{(x_1 - \alpha - \ell t_1)^2 + (y_1 - \beta - mt_1)^2 + (z_1 - \gamma - nt_1)^2}$

సాధన:

ఇచ్చిన సరళరేఖ సమీకరణము $\frac{x-13}{5} = \frac{y+8}{-8} = \frac{z-31}{1} = t \quad \cdots \quad (1)$ (అనుకొనుము)

సరళరేఖ (1)పై ఏదైనా బిందువు $P = (5t+13, \ -8t-8, \ t+31)$

సరళరేఖ (1) పై $A(-1, 3, 9)$ యొక్క లంబపాదము P అయితే,

(1) పై P ఉంటుంది.

AP యొక్క దిక్ ఖ్యలు $5t+14, \ -8t-11, \ t+22$

సరళరేఖ (1) యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 5, -8, 1.

సరళరేఖ (1)కి AP లంబముగా ఉండాలంటే

$$5(5t+14) - 8(-8t-11) + 1(t+22) = 0$$

$$25t + 70 + 64t + 88 + t + 22 = 0$$

$$90t + 180 = 0$$

$t = -2$ జరిగి తీరాలి

సరళరేఖ (1) పై A లంబపాదము $P = (-10+13, 16-8, -2+31) = (3, 8, 29)$

సరళరేఖ (1) పై A లంబదూరము $AP = \sqrt{(3+1)^2 + (8-3)^2 + (29-9)^2}$

$$= \sqrt{16+25+400} = \sqrt{441} = 21$$ యూనిట్లు

పాఠ్యభాగ రచయిత

S.V.S. **గిరిజ**

పాఠము - 3

సరళరేఖలు - II

3.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠములో విద్యార్థికి ఒక తలము దృష్ట్యా ఒక బిందువు మరియు సరళరేఖల ప్రతి బింబము కనుగొనుట మరియు సరళరేఖల సతలీయతకు నియమములు పరిచయము చేయబడినవి. అత్యల్ప దూరము యొక్క భావమును మరియు అత్యల్ప దూరము కలిగిఉన్న సరళరేఖకు సమీకరణములు మరియు మూడు తలాల ఛేదనం గురించి చదువుతారు.

3.2 పాఠ్యాంశాలక్రమము:

ఈ పాఠములో క్రింది భాగాలు ఉన్నవి.

3.3 ఉపోద్ఘాతము:

ఒక బిందువు యొక్క బిందుపాదము యొక్క భావనలు తలము దృష్ట్యా ఒక బిందువు మరియు రేఖల ప్రతిబింబములు కనుగొనుటకు ఉపయగపడినవి. తరువాత మనం అంతరాళములో సరళరేఖల లక్షణములను మరియు సరళరేఖల సతలీయతకు నియమములను చదువుతాము. ఈ నియములను ఉపయోగించి ఏవేని రెండు సరళరేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరమునకు భావనలను కనుక్కుంటాము. చివరగా పాఠము 1 మరియు పాఠము 2ల నుండి తీసుకున్న నియమములు మరియు విషయములతో తలముల ఛేదనమును చదువుతాము. మూడు తలముల ఛేదనము యొక్క స్వభావము తెలియును.

3.4 ప్రతి బింబములు:

సరళరేఖ మరియు తలములో ఒక బిందువు యొక్క ప్రతి బింబమును నిర్వచిస్తాము.

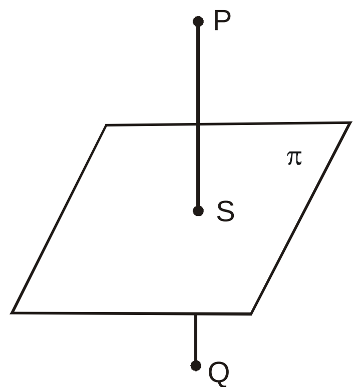
3.4.1 నిర్వచనము - తలములో (సరళరేఖ) బిందువు యొక్క ప్రతిబింబము: W సరళరేఖ లేక తలము మరియు W లో లేని బిందువు P మరియు W లో P యొక్క లంబపాదము S అనుకొనుము. $P \neq Q$ మరియు $PS = SQ$ అయ్యేటట్లుగా P, S లను కలిపే రేఖ పై Q ఒక బిందువు అయితే Q ను W లో P యొక్క ప్రతిబింబము అంటారు.

గమనిక: W లో P ఉంటే $P = S$ కాబట్టి $Q = S = P$. P దానికదే ప్రతిబింబము అవుతుంది. P యొక్క ప్రతిబింబము Q అయితే Q యొక్క ప్రతిబింబము P అవుతుంది.

3.4.2 సిద్ధాంతము: $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ తలము దృష్ట్యా $P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు యొక్క ప్రతిబింబము $Q(x_2, y_2, z_2)$ అయితే

$$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = \frac{z_2 - z_1}{c} = \frac{-2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

ఉపపత్తి: PQ రేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ మరియు π యొక్క అభిలంబమునకు PQ సమాంతరముగా ఉండును.



$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = \frac{z_2 - z_1}{c} = t$ అనుకొనుము.

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + at,\ y_2 = y_1 + bt,\ z_2 = z_1 + ct$$

PQ యొక్క మధ్య బిందువు $S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

π పై S ఉన్నది $\Rightarrow a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + c\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + d = 0$

$$\Rightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 + ax_2 + by_2 + cz_2 + 2d = 0$$

$$\Rightarrow \; ax_1 + by_1 + cz_1 + a(x_1 + at) + b(y_1 + bt) + c(z_1 + ct) + 2d = 0$$

$$\Rightarrow \; 2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) + t(a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{-2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = \frac{z_2 - z_1}{c} = \frac{-2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

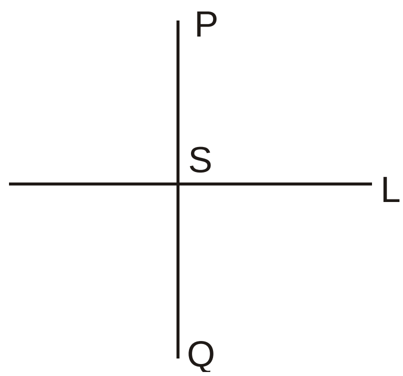
$(x_1 + at, \, y_1 + bt, \, z_1 + ct)$ బిందువు,

$t = \dfrac{-2(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$ విలువకు π తలము దృష్ట్యా $P(x_1, y_1, z_1)$ యొక్క ప్రతిబింబము అవుతుంది.

3.4.3 సిద్ధాంతము: సరళరేఖ L : $\dfrac{x - \alpha}{\ell} = \dfrac{y - \beta}{m} = \dfrac{z - r}{n}$ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు యొక్క ప్రతి బింబము $Q(x_2, y_2, z_2)$ అయితే $x_2 = 2(\alpha + \ell t) - x_1, \; y_2 = 2(\beta + mt) - y_1, \; z_2 = 2(r + nt) - z_1$,

$$t = -\left\{\frac{\ell(\alpha - x_1) + m(\beta - y_1) + n(\gamma - z_1)}{\ell^2 + m^2 + n^2}\right\}$$

ఉపపత్తి:



$\dfrac{x - \alpha}{\ell} = \dfrac{y - \beta}{m} = \dfrac{z - \gamma}{n} = t$ అనుకొనుము.

L రేఖ పై ఏదైనా బిందువు $\Rightarrow$ $(\alpha+\ell t, \beta+mt, \gamma+nt)$, $(t \in \mathbb{R})$ రూపంలో వుంటుంది.

PQ యొక్క మధ్య బిందువు $S=(\alpha+\ell t, \beta+mt, \gamma+nt)$ అయితే

$$\alpha+\ell t=\frac{x_1+x_2}{2},\ \beta+mt=\frac{y_1+y_2}{2},\ \gamma+nt=\frac{z_1+z_2}{2}$$

$$\Rightarrow x_2=2(\alpha+\ell t)-x_1,\ y_2=2(\beta+mt)-y_1,\ z_2=2(\gamma+nt)-z_1$$

PQ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $2(\alpha+\ell t-x_1), 2(\beta+mt-y_1), 2(\gamma+nt-z_1)$

L కు PQ లంబముగా ఉంటుంది కాబట్టి

$$2\ell(\alpha+\ell t-x_1)+2m(\beta+mt-y_1)+2n(\gamma+nt-z_1)=0$$

$$\Rightarrow \ell(\alpha-x_1)+m(\beta-y_1)+n(\gamma-z_1)+t\left(\ell^2+m^2+n^2\right)=0$$

$$\Rightarrow t=-\frac{\ell(\alpha-x_1)+m(\beta-y_1)+n(\gamma-z_1)}{\ell^2+m^2+n^2}$$

t యొక్క ఈ విలువకు

$(2(\alpha+\ell t)-x_1,\ 2(\beta+mt)-y_1,\ 2(\gamma+nt)-z_1)$ బిందువు L దృష్ట్యా P యొక్క ప్రతిబింబము.

π తలములో రేఖ యొక్క ప్రతిబింబము:

3.4.4 నిర్వచనము: π తలము దృష్ట్యా L పైని బిందువుల ప్రతిబింబాల బిందు పథమును π తలము పై L రేఖ యొక్క ప్రతిబింబము అంటారు.

3.4.5 సిద్ధాంతము: $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ తలము దృష్ట్యా $L:\dfrac{x-x_1}{\ell}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ రేఖ యొక్క ప్రతి బింబము

(i) π కు L సమాంతరమయితే $\dfrac{x-\alpha}{\ell}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}$ అవుతుంది.

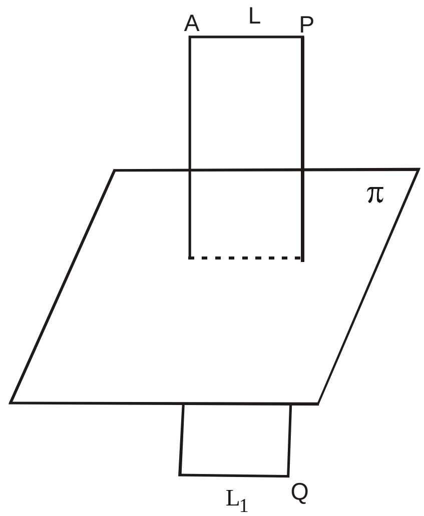
$$\alpha=x_1+at_0,\ \beta=y_1+bt_0,\ \gamma=z_1+ct_0 \text{ మరియు } t_0=\frac{-2(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$$

(ii) πకు L సమాంతరము కానప్పుడు ప్రతిబింబము $\dfrac{x-\alpha}{\alpha_1-\alpha}=\dfrac{y-\beta}{\beta_1-\beta}=\dfrac{z-\gamma}{\gamma_1-\gamma}$ అవుతుంది,

$\alpha_1 = x_1+\ell t,\ \beta_1 = y_1+mt,\ \gamma_1 = z_1+nt$

$t=\dfrac{-(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a\ell+bm+cn}$ మరియు α, β, γ లు (i)లో వలె ఉండును.

ఉపపత్తి: **Case (i):** $P=(x_1, y_1, z_1)$ అయినపుడు π దృష్ట్యా P యొక్క ప్రతిబింబము $Q=(\alpha, \beta, \gamma)$ అనుకొనుము.



సిద్ధాంతము నుండి π దృష్ట్యా L పైని P యొక్క ప్రతిబింబము

$$Q=(x_1+at_0,\ y_1+bt_0,\ z_1+ct_0),\quad t_0=\frac{-2(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$$

π దృష్ట్యా L యొక్క ప్రతిబింబము L_1 అనుకొనుము. L, L_1కు సమాంతరముగా ఉన్నది.

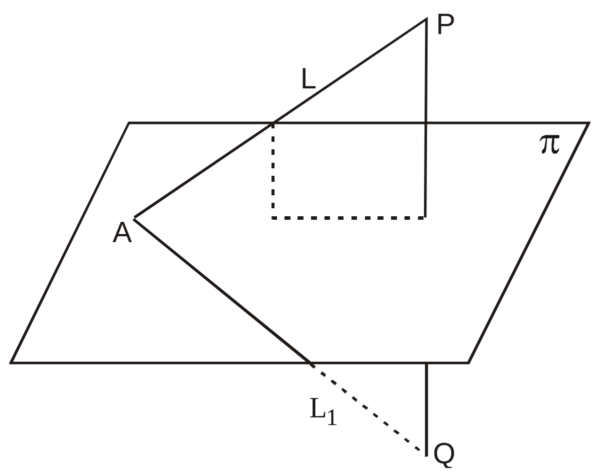
$\Rightarrow$ L_1 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు ℓ, m, n .

L_1 యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x-\alpha}{\ell}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

Case (ii): $a\ell + bm + cn \neq 0$ మరియు A వద్ద π ని L ఛేదించునని తీసుకొనుము.

$$A = (x_1 + \ell t,\ y_1 + mt,\ z_1 + nt) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \text{ అనుకొనుము.}$$



π పై A ఉన్నది కాబట్టి $a(x_1 + \ell t_0) + b(y_1 + mt_0) + c(z_1 + nt_0) + d = 0$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a\ell + bm + cn}$$

case (i)లో వలె P బిందువు యొక్క ప్రతిబింబము $Q\ (\alpha, \beta, \gamma)$. π తలము దృష్ట్యా AP యొక్క ప్రతిబింబము AQ.

$A = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ మరియు $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ AQ రేఖ యొక్క సమీకరణము $\dfrac{x-\alpha}{\alpha_1-\alpha} = \dfrac{y-\beta}{\beta_1-\beta} = \dfrac{z-\gamma}{\gamma_1-\gamma}$

ఉదాహరణలు:

3.4.6 $\pi \equiv 3x - 2y - z = 9$ తలములో $A(2,-1,3)$ యొక్క ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

సాధన: π తలము యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు 3, -2, -1.

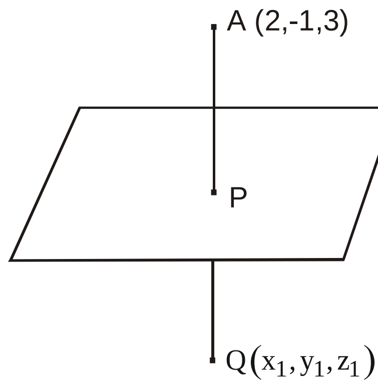
π కు లంబముగా ఉంటూ A గుండాపోయే సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1} = t \quad \cdots \quad (1)$$

(1) రేఖ పై ఏదైనా బిందువు $P = (3t+2, -2t-1, -t+3)\ (t \in \mathbb{R})$

π పై A యొక్క లంబపాదము P అయితే π పై P ఉంటుంది.

$$3(3t+2) - 2(-2t-1) - 1(-t+3) = 9$$



$$\Leftrightarrow \quad 9t+6+4t+2+t-3-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2}{7}$$

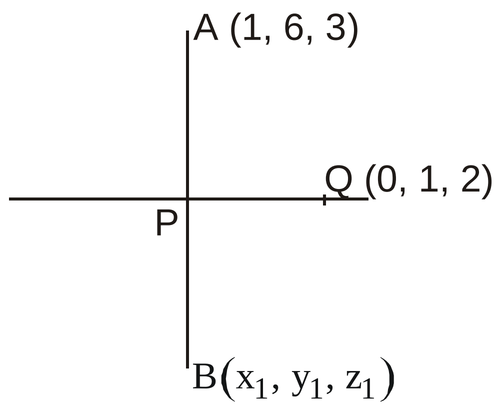
$$P = \left(\frac{6}{7}+2,\ \frac{-4}{7}-1,\ \frac{-2}{7}+3\right) = \left(\frac{20}{7}, \frac{-11}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

π లో A యొక్క ప్రతిబింబము Q అనుకొనుము.

$$Q = \left(\frac{40}{7}-2,\ \frac{-22}{7}+1,\ \frac{38}{7}-3\right) = \left(\frac{26}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

3.4.7 $L : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$ రేఖలో $A\,(1, 6, 3)$ బిందువు యొక్క ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

సాధన: (1) రేఖ పై ఏ బిందువైనా $P = (t, 2t+1, 3t+2)$ $(t \in \mathbb{R})$ రూపములో ఉండును.



(i) సరళరేఖ పై $A(1, 6, 3)$ యొక్క లంబపాదము P అయితే P బిందువు (1) పై ఉండును. L కు AP లంబముగా ఉండును.

AP యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $t-1,\ 2t-5, 3t-1$ మరియు (1) యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 1, 2, 3. మరియు L కు AP లంబముగా ఉన్నది.

$$1(t-1)+2(2t-5)+3(3t-1)=0 \Rightarrow 14t-14=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow P=(1,3,5).$$

(1)లో A యొక్క ప్రతిబింబము $B=(x_1, y_1, z_1)$. AB యొక్క మధ్య బిందువు P

$$\Rightarrow B=(2(1)-1,\ 2(3)-6,\ 2(5)-3)=(1,0,7)$$

3.4.8 సరళరేఖ $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ యొక్క ప్రతిబింబమును $\pi \equiv x+y+z-1=0$ తలములో కనుగొనుము.

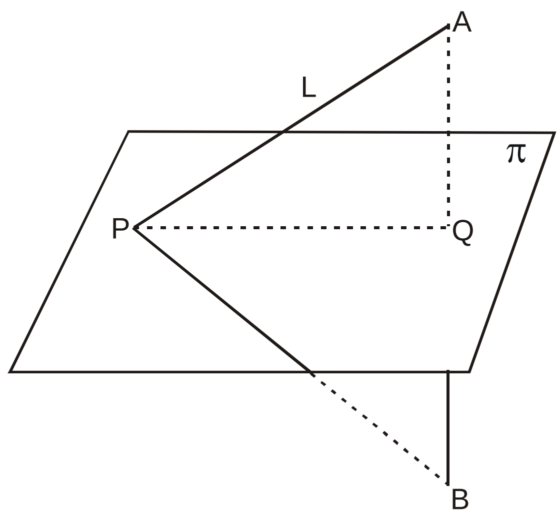
సాధన: $A=(1,2,3)$ బిందువు L పై ఉన్నది.

π లో A యొక్క ప్రతిబింబము B మరియు AB యొక్క మధ్య బిందువు Q అనుకొనుము.

$$B=(1+t_0,\ 2+t_0, 3+t_0)$$

$$t_0=\frac{-2(1+2+3-1)}{1+1+1}=\frac{-10}{3},\quad B=\left(\frac{-7}{3},\frac{-4}{3},\frac{-1}{3}\right),\quad P=(1+2t,\ 2+3t,\ 3+4t)$$

$$t=\frac{-(1+2+3-1)}{2+3+4}=\frac{-5}{9},\quad P=\left(\frac{-1}{9},\frac{1}{3},\frac{7}{9}\right)$$



π లో PA యొక్క ప్రతిబింబము PB.

PB యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $-\frac{1}{9}+\frac{7}{3}, \frac{1}{3}+\frac{4}{3}, \frac{7}{9}+\frac{1}{3}$ i.e. $\frac{20}{9}, \frac{15}{9}, \frac{10}{9}$

ఇవి **4, 3, 2**లకు అనుపాతములో ఉన్నవి.

PB యొక్క సమీకరణములు $\dfrac{x+\frac{7}{3}}{4} = \dfrac{y+\frac{4}{3}}{3} = \dfrac{z+\frac{1}{3}}{2}$

3.5 సతలీయ రేఖలు:

రెండు రేఖలు ఒకే తలములో (సతలీయములు) ఉంటాయి లేక ఒకే తలములో ఉండవు. సరళరేఖలు సతలీయాలైతే అవి ఖండించుకుంటాయి లేక సమాంతరముగా ఉంటాయి. ఇవి ఖండించుకొనక మరియు సమాంతరముగా లేకపోతే ఆ రేఖలను అసౌష్ఠవ రేఖలు అంటారు. మూడు సదిశలు $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు సతలీయములు $\Leftrightarrow \left[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right] = 0$ అని మనకు తెలుసును. రెండు రేఖల సతలీయతకు నియమాలను కనుగొనుటకు ఈ ఫలితమును ఉపయోగిస్తాము.

3.5.1 సిద్ధాంతము:

$\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ మరియు $\frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ సమీకరణములు వరుసగా L_1, L_2 సరళరేఖలు అనుకొనుము.

$$L_1, L_2 \text{ లు సతలీయములు } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

ఉపపత్తి: $A=(x_1, y_1, z_1)$ మరియు $B=(x_2, y_2, z_2)$ అనుకొనుము. L_1 పై A మరియు L_2 పై B ఉన్నాయి మరియు $\overline{BA}=(x_1-x_2,\ \ y_1-y_2,\ \ z_1-z_2)$

$\overline{n_1}=(\ell_1, m_1, n_1)$, $\overline{n_2}=(\ell_2, m_2, n_2)$ అనుకొనుము. L_1కు $\overline{n}_1$ సమాంతరము మరియు L_2 కు $\overline{n}_2$ సమాంతరముగా ఉంటాయి.

L_1, L_2 లు సతలీయములు $\Leftrightarrow$ $\overline{BA}$, $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$ లు సతలీయములు. $\Leftrightarrow \left[\overline{BA}\ \ \overline{n_1}\ \ \overline{n_2}\right]=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

3.5.2 ఉప సిద్ధాంతము: $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}$ మరియు $\bar{r}=\bar{c}+t\bar{d}$ రేఖలు సతలీయములు $\Leftrightarrow$ $\bar{a}-\bar{c}$, $\bar{b}$, $\bar{d}$ లు సతలీయములు $\Leftrightarrow \left[\bar{a}-\bar{c}\ \ \bar{b}\ \ \bar{d}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}\right]=\left[\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{d}\right]$

3.5.3 సిద్ధాంతము: $\dfrac{x-x_1}{\ell_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ మరియు $\dfrac{x-x_2}{\ell_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ సమీకరణములు గల రేఖలు వరుసగా L_1 మరియు L_2 అయితే L_1ను కలిగి యుండి L_2కు సమాంతరముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

ఉపపత్తి: $A=(x_1, y_1, z_1)$ $\overline{n_1}=(\ell_1, m_1, n_1)$, $\overline{n_2}=(\ell_2, m_2, n_2)$ అనుకొనుము.

L_1 ను కలిగి యుండి L_2 కు సమాంతరముగా ఉండే తలము π అనుకొనుము.

π తలము పై $P(x, y, z)$ ఏదేని బిందువనుకొనుము.

π తలము పై A ఉన్నది మరియు $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$ సదిశలు వరుసగా L_1, L_2 రేఖలకు సమాంతరముగా ఉంటాయి.

$\overline{AP}$, $\overline{n_1}$, $\overline{n_2}$ లు సతలీయములు. $\Leftrightarrow \left[\overline{AP}\ \ \overline{n_1}\ \ \overline{n_2}\right]=0$

π యొక్క సమీకరణము

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

3.5.4 ఉప సిద్ధాంతము: $\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ మరియు $\frac{x-x_2}{\ell_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ సమీకరణములు వరుసగా L_1 మరియు L_2 సతలీయ రేఖలు అయితే L_1, L_2లను కలిగియున్న తలము యొక్క సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

3.5.5 సిద్ధాంతము: $\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ మరియు $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ రేఖలు సతలీయములు

$$\Leftrightarrow \frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1}{a_1\ell+b_1m+c_1n}=\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2}{a_2\ell+b_2m+c_2n}$$

ఉపపత్తి: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ సరళరేఖ గుండా పోయే ఏ తలముకైనా సమీకరణము

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

i.e., $(a_1+\lambda a_2)x+(b_1+\lambda b_2)y+(c_1+\lambda c_2)z+d_1+\lambda d_2=0 \cdot\cdot\cdot (1)$

$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ సరళరేఖ (1) తలము పై ఉన్నది.

$$\Leftrightarrow (a_1+\lambda a_2)\ell+(b_1+\lambda b_2)m+(c_1+\lambda c_2)n=0$$

మరియు $(a_1+\lambda a_2)x_1+(b_1+\lambda b_2)y_1+(c_1+\lambda c_2)z_1+d_1+\lambda d_2=0$

$$\Leftrightarrow (a_1\ell+b_1m+c_1n)+\lambda(a_2\ell+b_2m+c_2n)=0$$

మరియు $(a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1)+\lambda(a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2)=0$

రెండు సమీకరణముల నుండి $\lambda:1$ నిష్పత్తిని తీసుకొనగా

$$\frac{-(a_1\ell+b_1m+c_1n)}{a_2\ell+b_2m+c_2n}=\frac{-(a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1)}{a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2}$$

$$\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1}{a_1\ell+b_1m+c_1n}=\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2}{a_2\ell+b_2m+c_2n}$$

3.5.6 సిద్ధాంతము: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ మరియు

$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0=a_4x+b_4y+c_4z+d_4$ సరళరేఖలు సతలీయములు

$$\Leftrightarrow \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0$$

ఉపపత్తి: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ లు L_1 రేఖను మరియు

$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0=a_4x+b_4y+c_4z+d_4$ లు L_2 రేఖను సూచిస్తున్నాయని అనుకొనుము.

L_1 గుండాపోయే తలము యొక్క సమీకరణము $a_1x+b_1y+c_1z+d_1+\lambda_1(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$

$$\Rightarrow \ (a_1+\lambda_1a_2)x+(b_1+\lambda_1b_2)y+(c_1+\lambda_1c_2)z+d_1+\lambda_1d_2=0 \ \cdot\cdot\cdot \ (1)$$

L_2 గుండాపోయే తలము యొక్క సమీకరణము $a_3x+b_3y+c_3z+d_3+\lambda_2(a_4x+b_4y+c_4z+d_4)=0$

$$\Rightarrow (a_3+\lambda_2a_4)x+(b_3+\lambda_2b_4)y+(c_3+\lambda_2c_4)z+(d_3+\lambda_2d_4)=0 \ \cdot\cdot\cdot \ (2)$$

ఇచ్చిన రేఖలు సతలీయములు $\Leftrightarrow \lambda\neq 0$ కు $a_1+\lambda_1a_2=\lambda(a_3+\lambda_2a_4)$, $b_1+\lambda_1b_2=\lambda(b_3+\lambda_2b_4)$

$c_1+\lambda_1c_2=\lambda(c_3+\lambda_2c_4)$, $d_1+\lambda_1d_2=\lambda(d_3+\lambda_2d_4)$

$\Leftrightarrow$ సమీకరణముల నికాయము $a_1+\lambda_1a_2-\lambda a_3-\lambda\lambda_2a_4-0$, $b_1+\lambda_1b_2-\lambda b_3-\lambda\lambda_2b_4=0$

$c_1+\lambda_1c_2-\lambda c_3-\lambda\lambda_2c_4=0$, $d_1+\lambda_1d_2-\lambda d_3-\lambda\lambda_2d_4=0$ కు శూన్యేతర సాధన ఉన్నది.

$$\Leftrightarrow \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0$$

3.5.7 ఇచ్చిన నియమాలను తృప్తిపరిచే సరళరేఖలను నిర్ధారించుట:

సరళరేఖ యొక్క సాధారణ సమీకరణములు $\dfrac{x-x_1}{\ell}=\dfrac{y-y_1}{m} \ \cdot\cdot\cdot \ (1)$, $\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n} \ \cdot\cdot\cdot \ (2)$.

(1)లోని ℓ, m లలో ఒకటి మరియు (2)లోని m, n లలో ఒకటి శూన్యేతరము కాబట్టి సార్వత్రికతకు భంగము లేకుండా (1)లో $m \neq 0$ మరియు (2)లో $n \neq 0$ అని తీసుకొనవచ్చును. (1) మరియు (2) సమీకరణములు వరుసగా

$$x = \frac{\ell}{m} y + \frac{(mx_1 - \ell y_1)}{m} \; ; \; y = \frac{m}{n} z + \frac{(ny_1 - mz_1)}{n}$$ కు సమానము.

అందువలన $\frac{\ell}{m}, \frac{m}{n}, \frac{mx_1 - \ell y_1}{m}, \frac{ny_1 - mz_1}{n}$ లు నాలుగు యాదృచ్ఛిక స్థిరాంకములు లేక పరామితులు. ఈ నాలుగు నిష్పత్తులు వివిధ నియమాల సమితులచే నిర్ధారింపబడును.

ఉదాహరణకు:

1. దత్త బిందువు గుండాపోతూ రెండు దత్త రేఖలను ఛేదించడము.
2. రెండు దత్త రేఖలను ఛేదించుట మరియు దత్త దిశను కలిగి యుండుట.
3. దత్త రేఖను లంబకోణములో ఛేదించుట మరియు దత్త బిందువు గుండాపోవుట.
4. రెండు దత్త రేఖలను లంబకోణములో ఛేదించుట.

ఉదాహరణలు:

3.5.8 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}; \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ రేఖలు సతలీయములని చూపుము. ఖండన బిందువును మరియు రేఖలను కలిగియున్న తలమును కనుగొనుము.

సాధన: L_1 రేఖ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = r \quad \cdots (1)$

మరియు L_2 రేఖ $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5} = s \quad \cdots (2)$ అనుకొనుము.

L_1 పై ఏదైనా బిందువు $P = (2r+1, 3r+2, 4r+3)$ L_2 పై ఏదైనా బిందువు $Q = (3s+2, \; 4s+3, 5s+4)$

P = Q అయితే $2r + 1 = 3s + 2 \;\Rightarrow\; 2r - 3s = 1 \cdots (3)$

$$3r + 2 = 4s + 3 \;\Rightarrow\; 3r - 4s = 1 \cdots (4)$$

$$4r + 3 = 5s + 4 \;\Rightarrow\; 4r - 5s = 1 \cdots (5)$$

(3) మరియు (4)లను సాధించగా $r = s = -1$

ఈ విలువలు సమీకరణము (5)ను తృప్తిపరుచును. L_1 మరియు L_2 లు ఛేదించుకుంటాయి. $\Rightarrow L_1$ మరియు L_2 లు సతలీయములు.

L_1 మరియు L_2 ల ఖండన బిందువు $(-1,-1,-1)$

L_1, L_2లను కలిగియున్న తలము π మరియు π యొక్క అభిలంబమునకు దిక్ సంఖ్యలు a, b, c అనుకొనుము.

L_1 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 2,3,4 $\Rightarrow 2a+3b+4c=0 \cdots (6)$

L_2 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 3, 4, 5 $\Rightarrow 3a+4b+5c=0 \cdots (7)$

(6) మరియు (7)ల నుండి $\frac{a}{-1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{-1}$ i.e. $\frac{a}{1}=\frac{b}{-2}=\frac{c}{1}$

π యొక్క సమీకరణము $1(x+1)-2(y+1)+1(z+1)=0$ i.e. $x-2y+z=0$.

3.5.9 $\frac{x+4}{3}=\frac{y+6}{5}=\frac{z-1}{-2}$; $3x-2y+z+5=0=2x+3y+4z-4$ రేఖలు సతలీయములని చూపుము. రేఖల ఖండన బిందువు మరియు రేఖలను కలిగియున్న తలమును కనుగొనుము.

సాధన: $\frac{x+4}{3}=\frac{y+6}{5}=\frac{z-1}{-2}$ సమీకరణములు L_1 రేఖను సూచిస్తున్నాయనుకొనుము.

L_1 పై ఏదైనా బిందువు $P=(3t-4,\ 5t-6,\ -2t+1)$, $t \in \mathbb{R}$

$3x-2y+z+5=0$ తలము π_1, $2x+3y+4z-4=0$ తలము π_2 మరియు $\pi_1 \cap \pi_2$ సరళరేఖ L_2 అనుకొనుము.

π_1 పై P ఉన్నట్లయితే $3(3t-4)-2(5t-6)+(-2t+1)+5=0 \Rightarrow 9t-12-10t+12-2t+6=0$

$\Rightarrow -3t+6=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow P=(2,4,-3)$ ఇది π_2 తలము యొక్క సమీకరణమును తృప్తిపరుచును.

π_1 మరియు π_2 ల ఛేదనము గుండాపోయే తలము π యొక్క సాధారణ సమీకరణము $\pi_1+\lambda\pi_2=0$.

$(3x-2y+z+5)+\lambda(2x+3y+4z-4)=0$

i.e. $(3+2\lambda)x+(-2+3\lambda)y+(1+4\lambda)z+(5-4\lambda)=0$

π రేఖ L_1 ను కలిగియున్నది $\Leftrightarrow (3+2\lambda)3+(-2+3\lambda)5+(1+4\lambda)-2=0 \Leftrightarrow 13\lambda-3=0$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3}{13}$

π తలము యొక్క సమీకరణము $45x - 17y + 25z + 53 = 0$

3.5.10 $x + y + z - 3 = 0 = 2x + 3y + 4z - 5 \cdots (1)$, $4x - y + 5z - 7 = 0 = 2x - 5y - z - 3 \cdots (2)$

రేఖలు సతలీయములని చూపుము. అవి ఉన్న తలమును కనుగొనుము.

సాధన:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -1 & 5 & -7 \\ 2 & -5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$c_2 \to c_2 - c_1,\ c_2 \to c_3 - c_1,\ c_4 \to c_4 + 3c_1$ ఉపయోగించగా

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 5 \\ -7 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$c_2 \to c_2 - 2c_1,\ c_3 \to c_3 - c_1$ ఉపయోగించగా

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 11 & 10 \\ -7 & 11 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

దత్త రేఖలు సతలీయములు

రేఖ (1) గుండాపోయే తలము యొక్క సమీకరణము $(x + y + z - 3) + \lambda(2x + 3y + 4z - 5) = 0 \cdots (3)$

రేఖ (2) గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము $(4x - y + 5z - 7) + \mu(2x - 5y - z - 3) = 0 \cdots (4)$

సమీకరణములు (3) మరియు (4) ఒకే తలమును సూచిస్తుంటే

$$1 + 2\lambda = k(4 + 2\mu) \cdots (5) \Rightarrow 1 + 2\lambda = 4k + 2\mu k$$

$$1 + 3\lambda = k(-1 - 5\mu) \cdots (6) \Rightarrow 1 + 3\lambda = -k - 5\mu k$$

$$1 + 4\lambda = k(5 - \mu) \cdots (7) \Rightarrow 1 + 4\lambda = 5k - \mu k$$

$$-3 - 5\lambda = k(-7 - 3\mu) \cdots (8) \Rightarrow -3 - 5\lambda = -7k - 3\mu k$$

(5), (7) మరియు (5), (8)ల నుండి μk ను లోపింపచేయగా $-14k+10\lambda+3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

$$2k-4\lambda-3=0 \cdot\cdot\cdot (10)$$

(9), (10)ల నుండి $k=-\frac{1}{2}, \lambda=-1$. ఈ విలువలను (7)లో ప్రతిక్షేపించగా $\mu=-1$. సమీకరణము (6)ను k, λ, μ విలువలు తృప్తిపరుచును.

కావలసిన తలము యొక్క సమీకరణము $-x-2y-3z+2=0 \Rightarrow x+2y+3z-2=0$

3.5.11 S.A.Q.:

$\frac{x-5}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{1}, \frac{x+5}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{2}$ రేఖలను ఛేదిస్తూ $\frac{x-5}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-10}{3}$ రేఖకు సమాంతరముగా ఉండే రేఖా సమీకరణములు కనుగొనుము.

3.5.12 S.A.Q.: $2x+y-1=0=x-2y+3z$; $3x-y+z+2=0=4x+5y-2z-3$ రేఖలను ఛేదిస్తూ

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ రేఖకు సమాంతరముగా ఉండే రేఖా సమీకరణములు కనుగొనుము.

3.5.13 S.A.Q.: $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}, \frac{x}{a\alpha}=\frac{y}{b\beta}=\frac{z}{c\gamma}, \frac{x}{\ell}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ రేఖలు ఒకే తలములో ఉండటానికి నియమము

$\left(\frac{\ell}{\alpha}\right)(b-c)+\left(\frac{m}{\beta}\right)(c-a)+\left(\frac{n}{\gamma}\right)(a-b)=0$ అని నిరూపించుము.

3.5.14 S.A.Q.: $2x+y-4=0=y+2z$; $x+3z=4, 2x+5z=8$ రేఖలను ఛేదిస్తూ $(2,-1,1)$ బిందువు గుండా పోయే రేఖ యొక్క సమీకరణములు కనుగొనుము.

3.6 రెండు అసౌష్ఠవ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము:

3.6.1 అసౌష్ఠవ రేఖలు:

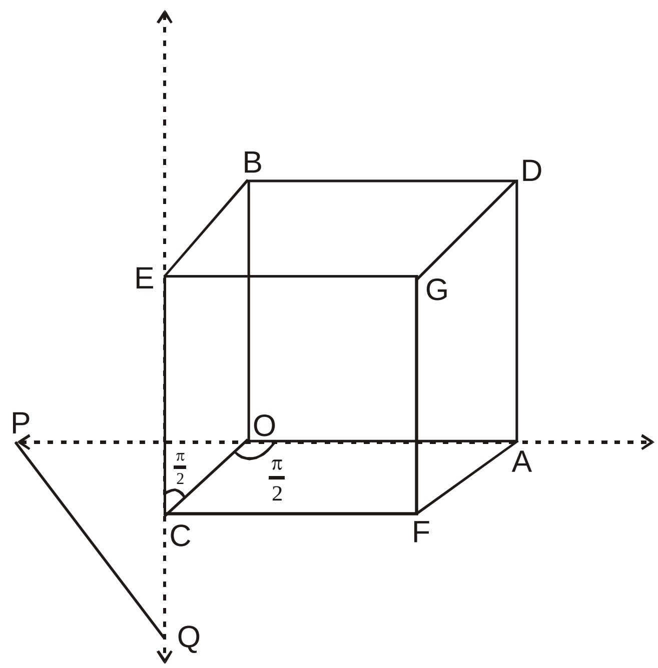
నిర్వచనము: ఏ రెండు సరళరేఖలైనా ఛేదించుకోకుండా మరియు సమాంతరముగా లేకుండా (అతలీయములు) ఉంటే వాటిని అసౌష్ఠవ రేఖలు అంటారు.

రెండు రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరమును కనుగొంటాము. రెండు రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము అనగా దత్త రేఖల మధ్య లంబ దూరము. రెండు రేఖలు

(i) ఛేదించుకుంటే, వాటి మధ్య అత్యల్ప దూరము సున్న అవుతుంది.

(ii) అసౌష్ఠవ రేఖలయితే, ఆ రెండింటిని లంబకోణములో ఛేదించే రేఖ పై అత్యల్ప దూరము ఉండును.

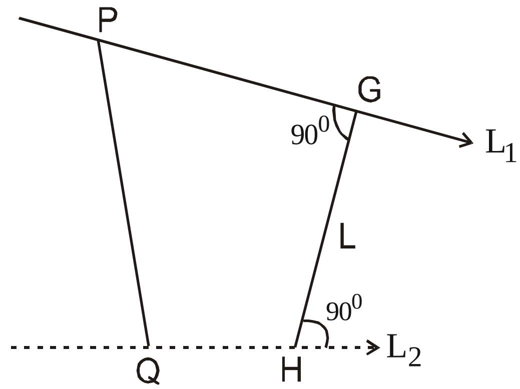
(iii) సమాంతరమయితే, ఒక రేఖ మీది ఏ బిందువు నుండి అయినా వేరొక రేఖ మీదికి లంబదూరము అత్యల్ప దూరము అగును.



పటము నుండి OA, CE లు అతలీయ రేఖలు. OA మరియు CE రెండింటికి OC లంబముగా ఉన్నది. OA పై P మరియు CE పై Q బిందువులు తీసుకొనుము. PQ = OC అయ్యేటట్లుగా PQ పొడవును మారిస్తే PQ అత్యల్పమవుతుంది. ఈ క్రింది సిద్ధాంతమును నిరూపించుదాము.

3.6.2 **సిద్ధాంతము:** L_1, L_2 లు అతలీయ రేఖలు. L అనే వేరొక రేఖ L_1, L_2 లను వరుసగా G, H ల వద్ద ఖండించును మరియు L_1, L_2 రెండింటికి L లంబముగా ఉన్నది. L_1 మరియు L_2 ల మధ్య GH పొడవు అత్యల్ప దూరము అవుతుంది.

ఉపపత్తి: L_1, L_2 ల పై రెండు బిందువులు వరుసగా P, Q అనుకొనుము.



L రేఖ L_1, L_2 లను వరుసగా G, H ల వద్ద ఖండించునని అనుకొనుము.

$GH \perp L_1$ మరియు $GH \perp L_2$

PQ మరియు GH ల మధ్య కోణము θ అయితే GH పొడవు $\overline{GH}$ పై $\overline{PQ}$ యొక్క విక్షేపము పొడవు అవుతుంది.

$$GH = \frac{\left|\overline{PQ} \cdot \overline{GH}\right|}{\left|\overline{GH}\right|} = \frac{\left|\overline{PQ}\right| \left|\overline{GH}\right| \left|\mathrm{Cos}\left(\overline{PQ}, \overline{GH}\right)\right|}{\left|\overline{GH}\right|}$$

$$GH = \left|\overline{PQ}\right| \left|\mathrm{Cos}\,\theta\right| = PQ\left|\mathrm{Cos}\,\theta\right| \le PQ \qquad \left(\because \left|\mathrm{Cos}\,\theta\right| \le 1\right)$$

L_1 మరియు L_2 ల మధ్య అత్యల్ప దూరము GH.

3.6.3 సిద్ధాంతము: π_1లో L_1 మరియు π_2 లో L_2 ఉండేటట్లుగా ఏకైకముగా నిర్ధారింపబడే π_1, π_2 అనే సమాంతర తలములు వ్యవస్థితమయ్యేటట్లుగా L_1, L_2 లు దత్త అసౌష్ఠవ రేఖలు.

ఉపపత్తి: L_1 సమీకరణములు $\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ మరియు L_2 సమీకరణములు $\frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ అనుకొనుము.

అటువంటి తలములు π_1, π_2 వ్యవస్థితమైతే వాటి అభిలంబములకు ఒకే దిక్ కొసైన్‌లు ఉండును.

π_1, π_2 సమీకరణములు వరుసగా $\pi_1 \equiv ax + by + cz + d_1 = 0$, $\pi_2 \equiv ax + by + cz + d_2 = 0$ గా తీసుకొనవచ్చును.

π_1లో L_1 ఉండుటకు నియమము $a\ell_1 + bm_1 + cn_1 = 0$ మరియు $ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1 = 0$

అదే విధముగా $a\ell_2 + bm_2 + cn_2 = 0$ మరియు $ax_2 + by_2 + cz_2 + d_2 = 0$

ఈ నియమాలు సరిపోవడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము

$$\frac{a}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{b}{n_1\ell_2 - n_2\ell_1} = \frac{c}{\ell_1m_2 - \ell_2m_1}$$

$m_1n_2 - m_2n_1 = \alpha,\ n_1\ell_2 - n_2\ell_1 = \beta,\ \ell_1m_2 - \ell_2m_1 = \gamma$ అనుకొనుము.

$L_1,\ L_2$ లు అసోష్ఠవ రేఖలు కాబట్టి $\ell_1 : m_1 : n_1 \neq \ell_2 : m_2 : n_2$

α, β, γ లలో కనీసం ఒకటి శూన్యేతరము. తలములు వ్యవస్థితము మరియు $\pi_1 \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + d_1 = 0$

$\pi_2 \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + d_2 = 0$

L_1 పై (x_1, y_1, z_1) మరియు L_2 పై (x_2, y_2, z_2) స్థిరీకరించుట వలన d_1, d_2లను ఏకైకముగా చెప్పవచ్చును.

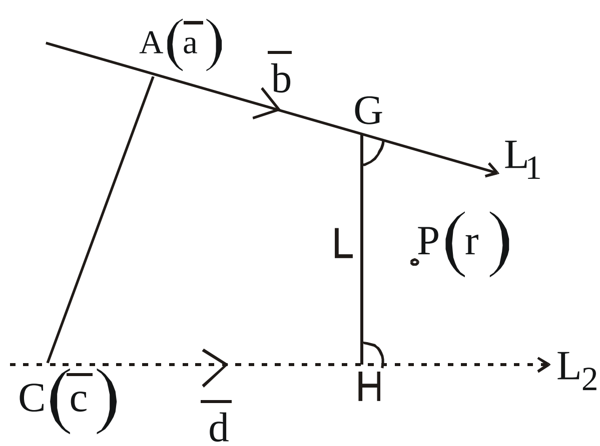
3.6.4 సిద్ధాంతము: $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b} \cdots (1);\ \bar{r} = \bar{c} + s\bar{d} \cdots (2)$ సమీకరణములు అసోష్ఠవ రేఖలను అయితే వాటి మధ్య అత్యల్ప దూరం $\dfrac{\left|(\bar{a} - \bar{c}) \cdot (\bar{b} \times \bar{d})\right|}{\left|\bar{b} \times \bar{d}\right|}$ మరియు ఉమ్మడి లంబముగా ఉండే రేఖ యొక్క సమీకరణము

$$\left[\bar{r} - \bar{a}\ \ \bar{b}\ \ \bar{b} \times \bar{d}\right] = 0 = \left[\bar{r} - \bar{c}\ \ \bar{d}\ \ \bar{b} \times \bar{d}\right]$$

ఉపపత్తి:

$\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$, $\bar{r} = \bar{c} + s\bar{d}$ సమీకరణములు వరుసగా L_1, L_2 రేఖలను సూచిస్తున్నాయని అనుకొనుము.

L_1, L_2లకు లంబముగా ఉంటూ అత్యల్ప దూరం ఉండే రేఖ L మరియు L_1, L_2లను L వరుసగా G, Hల వద్ద ఖండించునని అనుకుందాము.



L_1 మరియు L_2లు రెండిటిని L లంబముగా ఉన్నది.

అదిశ μకు $\overline{GH} = \mu\left(\bar{b} \times \bar{d}\right)$

L_1, L_2 ల మధ్య అత్యల్ప దూరము $=$ $\overline{GH}$ పై $\overline{AC}$ యొక్క విక్షేపము పొడవు $= \dfrac{\left|\overline{AC} \cdot \overline{GH}\right|}{\left|\overline{GH}\right|}$

$$= \frac{\left|\left(\bar{c} - -a\right) \cdot u\left(\bar{b} \times \bar{d}\right)\right|}{\left|u\left(\bar{b} \times \bar{d}\right)\right|} = \frac{\left|\left(\bar{a} - \bar{c}\right) \cdot \left(\bar{b} \times \bar{d}\right)\right|}{\left|\bar{b} \times \bar{d}\right|} = \frac{\left|\left[\bar{a} - \bar{c} \quad \bar{b} \quad \bar{d}\right]\right|}{\left|\bar{b} \times \bar{d}\right|}$$

L_1 మరియు GHలను కలిగియున్న తలము π మరియు L_2 మరియు GHలను కలిగియున్న తలము π' అనుకొనుము. π, π'లు GHలో ఖండించుకొనును. GH యొక్క సమీకరణం $\pi = 0 = \pi'$

π తలము పై $\bar{r}$ స్థాన సదిశ గల బిందువు P అనుకొనుము.

$P \in \pi \Leftrightarrow \overline{AP},\ \bar{b}, \overline{GH}$ లు సతలీయములు $\Leftrightarrow \left[\overline{AP} \quad \bar{b} \quad \overline{GH}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\bar{r} - \bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{b} \times \bar{d}\right] = 0$

π యొక్క సమీకరణము $\left[\bar{r} - \bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{b} \times \bar{d}\right] = 0$, π' యొక్క సమీకరణము $\left[\bar{r} - \bar{c} \quad \bar{d} \quad \bar{b} \times \bar{d}\right] = 0$

కాబట్టి GH సమీకరణము $\left[\bar{r} - \bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{b} \times \bar{d}\right] = 0 = \left[\bar{r} - \bar{c} \quad \bar{d} \quad \bar{b} \times \bar{d}\right]$

3.6.5 సిద్ధాంతము: $L_1 : \dfrac{x - x_1}{\ell_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ మరియు $L_2 : \dfrac{x - x_2}{\ell_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$లు దత్త రేఖలు.

L_1, L_2 ల మధ్య అత్యల్ప దూరము

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\sum\left(m_1 n_2 - m_2 n_1\right)^2}} \quad . \ . \ . \ (1)$$

యొక్క పరమ మూల్యము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ m_1 n_2 - m_2 n_1 & n_1 \ell_2 - n_2 \ell_1 & \ell_1 m_2 - \ell_2 m_1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ m_1 n_2 - m_2 n_1 & n_1 \ell_2 - n_2 \ell_1 & \ell_1 m_2 - \ell_2 m_1 \end{vmatrix} \cdots (2)$$

ఉపపత్తి: సిద్ధాంతము 3.6.4 లో $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}=(\ell_1, m_1, n_1)$, $\bar{c}=(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{d}=(\ell_2, m_2, n_2)$ మరియు $\bar{r}=(x, y, z)$ అనుకొనుము.

$\bar{b}\times\bar{d}=(m_1n_2-m_2n_1,\ \ n_1\ell_2-n_2\ell_1,\ \ \ell_1m_2-\ell_2m_1)$, $|\bar{b}\times\bar{d}|=\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}$,

$\bar{a}-\bar{c}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$, $\bar{r}-\bar{a}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$,

$\bar{r}-\bar{b}=(x-x_2,\ y-y_2,\ z-z_2)$

సిద్ధాంతము **3.6.4** నుండి L_1, L_2 ల మధ్య అత్యల్ప దూరమునకు సూత్రము **(1)** మరియు అత్యల్ప దూరము కలిగి వున్న రేఖా సమీకరణమునకు సూత్రము **(2)** అవుతుంది.

ఉదాహరణలు:

3.6.6 $A=(1,-2,-1)$, $B=(4,0,-3)$, $C=(1,2,-1)$, $D=(2,-4,-5)$ అయితే AB మరియు CD ల మధ్య దూరమును కనుగొనుము.

సాధన: AB యొక్క సమీకరణము $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}$, $\bar{a}=\overline{OA}=(1,-2,-1)$ మరియు

$\bar{b}=\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(3,2,-2)$

CD యొక్క సమీకరణము $\bar{r}=\bar{c}+s\bar{d}$, $\bar{c}=\overline{OC}=(1,2,-1)$ మరియు $\bar{d}=\overline{CD}=(1,-6,-4)$

$\bar{a}-\bar{c}=\overline{OA}-\overline{OC}=(0,-4,0)$

$$\left[\bar{a}-\bar{c}\ \ \bar{b}\ \ \bar{d}\right]=\begin{vmatrix}0 & -4 & 0\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & -6 & -4\end{vmatrix}=4(-12+2)=-40$$

$$\bar{b}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & -6 & -4\end{vmatrix}=(-8-12)\bar{i}-(-12+2)\bar{j}+(-18-2)\bar{k}=-20\bar{i}+10\bar{j}-20\bar{k}$$

$$|\bar{b}\times\bar{d}|=\sqrt{400+100+400}=\sqrt{900}=30$$

$\overline{AB}$ మరియు $\overline{CD}$ ల మధ్య అత్యల్ప దూరము

$$\frac{\left|\left[\bar{a}-\bar{c}\ \ \bar{b}\ \ \bar{d}\right]\right|}{|\bar{b}\times\bar{d}|}=\frac{40}{30}=\frac{4}{3}\ \text{unit}$$

3.6.7 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1} \cdots (1), \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2} \cdots (2)$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము కలిగియున్న రేఖా సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: రేఖ (1) పై బిందువు $O=(0,0,0)$ మరియు రేఖ (2) పై బిందువు $A=(2,1,-2)$

రేఖ (1) యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $2,-3,1 \Rightarrow$ (1) పై సదిశ $\bar{a}=(2,-3,1)$

రేఖ (2) యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $3,-5,2 \Rightarrow$ (2) పై సదిశ $\bar{b}=(3,-5,2)$. $\overline{OA}=(2,1,-2)$

(1) మరియు (2) రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము PQ అనుకొనుము.

(1) పై బిందువు P మరియు (2) పై బిందువు Q.

(1) మరియు (2) రెండింటికి PQ లంబముగా ఉన్నది. $\Rightarrow \bar{a}\times\bar{b}$ కు PQ సమాంతరము.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{vmatrix}=-\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$$

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

PQ దిశలో యూనిట్ సదిశ $\frac{-\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}}{\sqrt{3}}$

అత్యల్ప దూరం $=PQ=PQ$ పై OA యొక్క విక్షేపము $=\left|\overline{OA}\cdot(\text{PQ దిశలో యూనిట్ సదిశ})\right|$

$$=\frac{\left|\overline{OA}\cdot\overline{PQ}\right|}{\left|\overline{PQ}\right|}=\frac{\left|(2,1,-2)\cdot(-1,-1,-1)\right|}{\sqrt{3}}=\frac{|-2-1+2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

అత్యల్ప దూరము కలిగియున్న రేఖా సమీకరణము

రేఖ (1) మరియు PQ రేఖ కలిగియున్న తలము యొక్క సమీకరణము

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4x+y-5z=0$$

రేఖ (2) మరియు PQ కలిగియున్న తలము యొక్క సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+2 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7x+y-8z-31=0$$

అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము $4x+y-5z=0=7x+y-8z-31$

ఈ రకమైన సమస్యలను ఈ క్రింది పద్ధతిలో సాధిద్దాము.

3.6.8 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{2}\,;\ \dfrac{x-4}{4}-\dfrac{y-5}{5}=\dfrac{z-2}{3}$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరమును మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త రేఖలు $L_1 : \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{2}=t$ అనుకొనుము

మరియు $L_2 : \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-5}{5}=\dfrac{z-2}{3}=s$ అనుకొనుము

L_1 పై ఏదేని బిందువు $(3t+2,\, 4t+3,\, 2t+1)$ మరియు L_2 పై ఏదేని బిందువు $(4s+4,\, 5s+5,\, 3s+2)$

$G=(3t+2,\, 4t+3,\, 2t+1)$ మరియు $H=(4s+4,\, 5s+5,\, 3s+2)$ మరియు L_1, L_2లు రెండిటికి GH లంబముగా ఉంటే

GH యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $3t-4s-2,\, 4t-5s-2,\, 2t-3s-1$

$$GH \perp L_1 \Rightarrow 3(3t-4s-2)+4(4t-5s-2)+2(2t-3s-1)=0$$

$$GH \perp L_2 \Rightarrow 4(3t-4s-2)+5(4t-5s-2)+3(2t-3s-1)=0$$

$29t-38s-16=0$ మరియు $38t-50s-21=0$

ఈ రెండు సమీకరణములను సాధించగా

$$\frac{t}{(-38)(-21)-(-50)(-16)}=\frac{s}{(-16)(38)-(-21)(29)}=\frac{1}{(29)(-50)-(-38)(38)}$$

i.e. $\dfrac{t}{-2}=\dfrac{s}{1}=\dfrac{1}{-6} \Rightarrow t=\dfrac{1}{3},\ \ s=\dfrac{-1}{6} \Rightarrow G=\left(3, \dfrac{13}{3}, \dfrac{5}{3}\right) \qquad H=\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{25}{6}, \dfrac{3}{2}\right)$

$$\Rightarrow GH=\sqrt{\left(\frac{10}{3}-3\right)^2+\left(\frac{13}{3}-\frac{25}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow$ GH యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}$ i.e. 2, 1, 1

అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖ GH సమీకరణము $\frac{x-3}{2}=\frac{y-\frac{13}{3}}{1}=\frac{z-\frac{5}{3}}{1}$

i.e. $\frac{x-3}{2}=\frac{3y-13}{3}=\frac{3z-5}{3}$

3.6.9 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ మరియు $x+y+2z-3=0=2x+3y+3z-4$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: దత్త రేఖలు $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}=t \quad \cdot\cdot\cdot \quad (1)$ అనుకొనుము

మరియు $x+y+2z-3=0=2x+3y+3z-4 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (2)$

(2) గుండా ఏ తలముకైనా సమీకరణము $x+y+2z-3+\lambda(2x+3y+3z-4)=0$

$\Rightarrow (1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(2+3\lambda)z+(-3-4\lambda)=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (3)$

తలము (3) రేఖ (1)కి సమాంతరముగా ఉంటే $1(1+2\lambda)+2(1+3\lambda)+1(2+3\lambda)=0$

$\Rightarrow 11\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-5}{11}$

తలము (3) యొక్క సమీకరణము $\frac{1}{11}x-\frac{4}{11}y+\frac{7}{11}z--\frac{13}{11}=0 \Rightarrow x-4y+7z-13=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (4)$

(1) మరియు (2)ల మధ్య అత్యల్ప దూరము

$(0,0,0)$ నుండి తలము (4)పైన ఉన్న రేఖ (1) పైకి లంబము పొడవు $=\frac{|-13|}{\sqrt{1+9+49}}=\frac{13}{\sqrt{59}}$ యూనిట్లు

అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుట.

రేఖ (1) గుండాపోతూ తలము (4)కు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 18x - 6y - 6z = 0 \quad \Rightarrow 3x - y - z = 0 \quad \cdots \quad (5)$$

సమీకరణము (3) తలము (4)కు లంబముగా ఉండే తలము అయితే

$$1(1+2\lambda) - 4(1+3\lambda) + 7(2+3\lambda) = 0 \;\Rightarrow 11\lambda + 11 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

రేఖ (2) గుండా పోతూ తలము (4)కు లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము

$$-x - 2y - z + 1 = 0 \;,\quad x + 2y + z - 1 = 0 \quad \cdots \quad (6)$$

అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణములు $3x - y - z = 0 = x + 2y + z - 1 = 0$

3.6.10 $3x - 9y + 5z = 0 = x + y - z\,;\quad 6x + 8y + 3z - 10 = 0 = x + 2y + z - 3$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: దత్తరేఖలు $3x - 9y + 5z = 0 = x + y - z \quad \cdots \quad (1)$

మరియు $6x + 8y + 3z - 10 = 0 = x + 2y + z - 3 \quad \cdots \quad (2)$

(1) గుండా పోయే ఏ తలము అయినా $(3x - 9y + 5z) + \lambda(x + y - z) = 0$

$$\Rightarrow (3+\lambda)x + (-9+\lambda)y + (5-\lambda)z = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

(2) గుండా పోయే ఏ తలము అయినా $(6x + 8y + 3z - 10) + \mu(x + 2y + z - 3) = 0$

$$\Rightarrow (6+\mu)x + (8+2\mu)y + (3+\mu)z + (-10-3\mu) = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

(3) మరియు (4) సమాంతరమైతే $3 + \lambda = k(6+\mu) \Rightarrow \lambda - 6k - k\mu = -3 \quad \cdots \quad (5)$

$$-9 + \lambda = (8 + 2\mu) \Rightarrow \lambda - 8k - 2k\mu = 9 \quad \cdots \quad (6)$$

$$5 - \lambda = k(3+\mu) \Rightarrow \lambda + 3k + k\mu = 5 \quad \cdots \quad (7)$$

(5) మరియు (7)ల నుండి $2\lambda - 3k = 2$ మరియు (5) మరియు (6)ల నుండి $\lambda - 4k = -15$

సాధించగా $5k = 32 \Rightarrow k = \dfrac{32}{5},\quad \lambda = \dfrac{53}{5},\qquad \mu = \dfrac{1}{k}(3+\lambda) - 6 = \dfrac{5}{32}\left(3 + \dfrac{53}{5}\right) - 6 = \dfrac{-31}{8}$

(1) మరియు (2)ల గుండాపోతూ (3) మరియు (4)ల నుండి ఒకదానికొకటి సమాంతరముగా ఉండే తలముల సమీకరణములు $17x+2y-7z=0 \cdot \cdot \cdot (8)$, $17x+2y-7z-13=0 \cdot \cdot \cdot (9)$.

(8) పై బిందువు $(0,0,0)$

(1) మరియు (2)ల మధ్య అత్యల్ప దూరము $=(0\,,0\,,0)$ నుండి (9) పైకి దూరము

$$=\left|\frac{-13}{\sqrt{289+4+49}}\right|=\frac{13}{3\sqrt{38}}$$

(8)కి (3) లంబముగా ఉంటే $17(3+\lambda)+2(-9+\lambda)-7(5-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{13}$

అదే విధముగా $\mu=\frac{-97}{14}$ $\Rightarrow$ (1) గుండాపోతూ (8)కి లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము

$$3x-9y+5z+\frac{1}{13}(x+y+z)=0 \Rightarrow 10x-29y+16z=0 \cdot \cdot \cdot (10)$$

(2) గుండాపోతూ (8)కి లంబముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము

$$13x+82y+55z-151=0 \cdot \cdot \cdot (11)$$

అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణములు $10x-29y+16z=0=13x+82y+55z-151=0$

3.6.11 S.A.Q.: $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0$ రేఖను కలిగియుండి $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=1,\ y=0$ రేఖకు సమాంతరముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$ అని చూపుము, మరియు అత్యల్ప దూరము $2d$ అయితే $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ అని నిరూపించుము.

3.6.12 S.A.Q.: OX, OY గుండాపోయే తలముల మధ్య కోణము α. వాటి ఛేదన రేఖలు $z\left(x^2+y^2+z^2\right)=x^2y^2\tan^2\alpha$ శంకువు పై ఉండునని చూపుము.

3.6.13 S.A.Q.: ఒక దీర్ఘ ఘనములోని కర్ణములు మరియు వాటిని ఛేదించని అంచుల మధ్య అత్యల్ప దూరములు $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}, \frac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}}, \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ అని చూపుము. ఇక్కడ a, b, c లు అంచుల పొడవులు.

3.7 మూడు తలముల ఛేదనము:

అంతరాళములోని రెండు విభిన్న తలములు సమాంతరముగా గాని లేక ఒక రేఖలో ఛేదించుకుంటూ గాని ఉంటాయని మనకు తెలుసు. మూడు తలముల ఛేదనము గురించి చర్చిద్దాము.

ఏ రెండు తలములు సమాంతరము కానటువంటి మూడు విభిన్న దత్త తలములు ఉన్నవి. వాటి ఛేదనమునకు సంబంధించి ఈ క్రింది మూడు అవకాశములు ఉన్నవి

మూడు తలములు.

(i) ఒక ఉమ్మడి బిందువు కలిగి ఉంటాయి.

(ii) ఒక ఉమ్మడి రేఖ ఉంటుంది. మూడు తలములు సహాక్ష తలములు అవుతాయి.

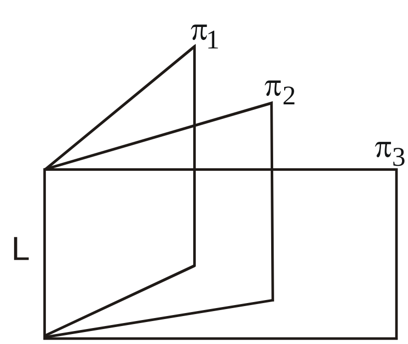
(iii) (i) మరియు (ii) జరుగప్పుడు త్రిభుజ పట్టకము ఏర్పడును మరియు త్రిభుజ పట్టకమును ఈ క్రింది విధముగా నిర్వచిస్తాము.

3.7.1 నిర్వచనము: ఏ రెండు తలములు సమాంతరముగా లేకుండా మరియు ఒక బిందువు వద్ద అనుషక్తములు కావు మరియు ఒక రేఖ గుండా పోనటువంటి మూడు తలములతో ఏర్పడే ప్రదేశమును త్రిభుజ పట్టకము అంటారు.

3.7.2 సిద్ధాంతము: మూడు తలములుగా ఖండించుకుంటే వాటి మూడు ఛేదన రేఖలు ఏకీభవించుతాయి, అనుషక్తములు లేక సమాంతరములు.

ఉపపత్తి: π_1, π_2, π_3 లు మూడు తలములు అనుకొనుము, ప్రతి ఒకటి మిగిలిన రెండిటిని ఛేదిస్తుంది.

Case (i): π_1 తలము π_2 మరియు π_3 లను ఒకే రేఖ L లో ఛేదిస్తే, π_1, π_2, π_3 తలములలో L ఉంటుంది.



$\Rightarrow$ π_1, π_2 మరియు π_3 ల ఛేదనము.

మూడు తలముల ఛేదన ఏకీభవించే రేఖ L.

Case (ii): π_1 తలము π_2 మరియు π_3 లను రెండు సరళరేఖలు వరుసగా L_2 మరియు L_3 లలో ఖండించును.

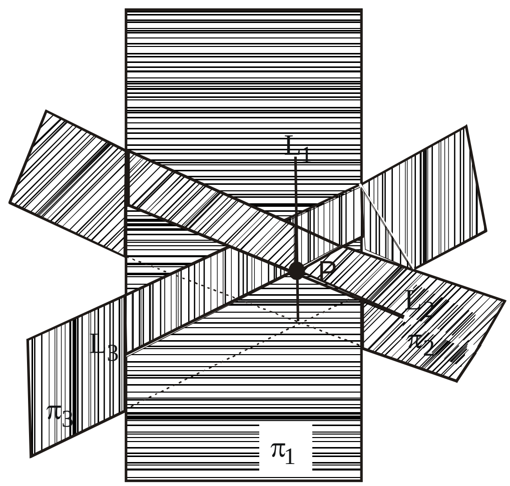
π_2 మరియు π_3 తలములు L_1 రేఖలో ఖండించుకుంటాయని అనుకొనుము.

L_2 మరియు L_3 ల ఖండన బిందువు P అనుకొనుము.

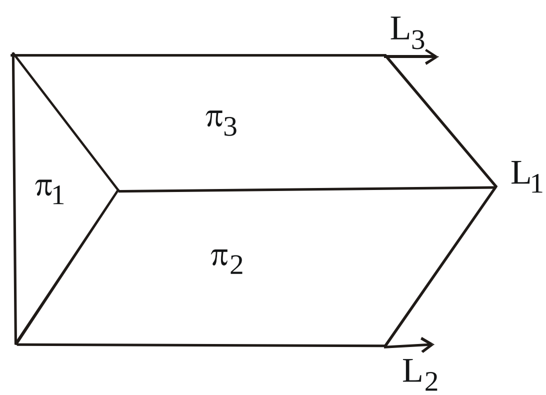
$\Rightarrow$ L_2 పై P ఉన్నది మరియు L_3 పై P ఉన్నది. $\Rightarrow$ π_2 పై P ఉన్నది మరియు π_3 పై P ఉన్నది.

$\Rightarrow$ π_2 మరియు π_3 ల ఖండన రేఖ పై P ఉన్నది. $\Rightarrow$ L_1 పై P ఉన్నది.

మూడు రేఖలు L_1, L_2 మరియు L_3 లు P వద్ద అనుషక్తములు.



Case (iii): π_1 తలము π_2 మరియు π_3 లను వరుసగా L_2 మరియు L_3 అనే రెండు సమాంతర రేఖలలో ఖండించునని అనుకొనుము.



π_2 మరియు π_3 తలములు L_1 రేఖలో ఖండించుకుంటాయని అనుకొనుము.

ఒక్కొక్క రేఖ రెండు ఛేదన తలాల పై ఉండేటట్లుగా L_2 , L_3 లు రెండు సమాంతర రేఖలు. సిద్ధాంతము 1.6.11 నుండి π_2 , π_3 తలముల ఖండన రేఖ L_1 కు ఆ తలముల పై ఉన్న రేఖలు వరుసగా L_2 , L_3 లు సమాంతరముగా ఉంటాయి. కాబట్టి L_1 , L_2 మరియు L_3 లు ఒకదానికొకటి సమాంతరము.

మన సౌకర్యము కోసం క్రింది సంకేతాలను ఉపయోగిస్తాము.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ అనుకొనుము.

3.7.3 సిద్ధాంతము: $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \cdot \cdot \cdot (1)$, $\pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \cdot \cdot \cdot (2)$, $\pi_3 \equiv a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \cdot \cdot \cdot (3)$ లు ఏ రెండూ సమాంతరములు కాని తలములు అనుకొనుము. తలములు (1), (2) మరియు (3)

(i) ఏకైక బిందువు వద్ద ఛేదించుకుంటాయి $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

(ii) ఒక రేఖలో ఖండించుకుంటాయి $\Leftrightarrow \Delta = 0,\ \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$

(iii) త్రిభుజ పట్టకమును ఏర్పరుచును $\Leftrightarrow \Delta = 0$ మరియు $\Delta_1 \neq 0$ లేక $\Delta_2 \neq 0$ లేక $\Delta_3 \neq 0$.

ఉపపత్తి: π_1 మరియు π_2 తలములు సమాంతరముకాదని తీసుకుందాము.

కాబట్టి $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ సమీకరణములు ఒక రేఖను సూచిస్తాయి.

π_1 మరియు π_2 ల ఖండన రేఖ యొక్క సమీకరణము (Z = 0 తీసుకుంటే)

$$\frac{x - (b_1d_2 - b_2d_1)/(a_1b_2 - a_2b_1)}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y - (a_2d_1 - a_1d_2)/(a_1b_2 - a_2b_1)}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1} \cdot \cdot \cdot (4)$$

(i) π_1, π_2 మరియు π_3 తలములు ఏకైక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

$\Leftrightarrow$ రేఖ (4) π_3 కి సమాంతరము కాదు. $\Leftrightarrow$ రేఖ (4) కు π_3 యొక్క అభిలంబము లంబముగా లేదు.

$\Leftrightarrow$ (a_3, b_3, c_3) సదిశ $(b_1c_2 - b_2c_1,\ c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ కు లంబముగా లేదు.

$\Leftrightarrow$ $a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

(ii) $\pi_1,\ \pi_2$ మరియు π_3 తలములు ఒక రేఖలో ఖండించుకుంటాయి.

$\Leftrightarrow$ π_3 తలములో సరళరేఖ (4) ఉన్నది

$\Leftrightarrow$ సరళరేఖ (4) తలము π_3 కి సమాంతరముగా ఉన్నది మరియు

$P = \left(\dfrac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \dfrac{d_1a_2 - d_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ 0 \right)$ π_3 తలము పై ఉన్నది.

$\Leftrightarrow$ π_3 యొక్క అభిలంబము రేఖ (4)కు అలంబముగా ఉన్నది మరియు π_3లో P ఉన్నది.

$\Leftrightarrow$ (a_3, b_3, c_3) సదిశ $(b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1,\ a_1b_2 - a_2b_1)$ కు లంబముగా ఉన్నది మరియు

$$a_3\left(\frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right) + b_3\left(\frac{d_1a_2 - d_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right) + c_3(0) + d_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

మరియు $a_3\,(b_1d_2 - b_2d_1) + d_3(d_1a_2 - d_2a_1) + d_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\Delta = 0$ and $\Delta_3 = 0$

అదే విధముగా $x = 0$ మరియు $y = 0$ అయినపుడు వరుసగా $\Delta_1 = 0$ మరియు $\Delta_2 = 0$ వచ్చును.

(iii) మూడు తలములు π_1, π_2 మరియు π_3 లు త్రిభుజ పట్టకమును ఏర్పరుచును.

$\Leftrightarrow$రేఖ (4) తలములో లేకుండా π_3 తలమునకు సమాంతరముగా ఉన్నది.

$\Leftrightarrow$ π_3 యొక్క అభిలంబము రేఖ (4)కు లంబముగా ఉన్నది మరియు π_3 లో P లేదు.

$\Leftrightarrow$ (a_3, b_3, c_3) సదిశ $(b_1c_2 - b_2c_1,\ \ c_1a_2 - c_2a_1,\ \ a_1b_2 - a_2b_1)$ కు లంబముగా ఉంది మరియు

$$a_3\left(\frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right) + b_3\left(\frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \right) + c_3(0) + d_3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow\ a_3\,(b_2c_1 - b_1c_2) + b_3(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

మరియు $a_3\ (b_1d_2 - b_2d_1) + b_3(a_2d_1 - a_1d_2) + d_3(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$

$\Leftrightarrow\ \Delta = 0$ మరియు $\Leftrightarrow\ \Delta_3 \neq 0$

అదే విధముగా $x = 0$ మరియు $y = 0$ అయినపుడు వరుసగా $\Delta_1 \neq 0$ మరియు $\Delta_2 \neq 0$ వచ్చును.

మూడు తలములు π_1, π_2 మరియు π_3 త్రిభుజ పట్టకమును ఏర్పరుచును.

$\Leftrightarrow\ \Delta = 0$ మరియు

$\Delta_1 \neq 0$ లేక $\Delta_2 \neq 0$ లేక $\Delta_3 \neq 0$

3.7.4 **గమనిక:** మూడు తలములు ఏకైక బిందువులో ఛేదించుకుంటే ఆ బిందువు $\left(\frac{-\Delta_1}{\Delta}, \frac{-\Delta_2}{\Delta}, \frac{-\Delta_3}{\Delta}\right)$ అని నిరూపించవచ్చును.

ఉదాహరణలు:

3.7.5 $\pi_1 \equiv x - y + z = 0,\ \pi_2 \equiv 2x + 5y + 3z = 0,\quad \pi_3 \equiv 3x - 2y - 6z + 1 = 0$ తలముల ఛేదన స్వభావమును పరీక్షించుము.

సాధన: $a_1 = 1,\ b_1 = -1,\ c_1 = 1$

$a_2 = 2, b_2 = 5, c_2 = 3$

$a_3 = 3, b_3 = -2, c_3 = -6$ ఇవ్వబడినవి.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 1(-30+6) + 1(-12-9) + 1(-4-15)$$

$$= -24 - 21 - 19 = -64 \neq 0$$

కాబట్టి దత్త తలములు ఒక బిందువులో ఖండించుకొనును.

3.7.6 $\pi_1 \equiv x - y + z - 4 = 0\ ,\ \pi_2 \equiv 2x - y - z + 4 = 0\ ,\ \pi_3 \equiv x + y - 5z + 14 = 0$ తలముల ఛేదన స్వభావమును పరీక్షించుము.

సాధన: $a_1 = 1 \qquad b_1 = -1 \qquad c_1 = +1 \qquad d_1 = -4$

$a_2 = 2 \quad b_2 = -1 \quad c_2 = -1 \quad d_2 = 4$

$a_3 = 1 \quad b_3 = 1 \quad c_3 = -5 \quad d_3 = 14$ ఇవ్వబడినవి.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 1(5+1)+1(-10+1)+1(2+1) = 6-9+3=0$$

$$\text{Let } \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 14 \end{vmatrix} = 1(-14-4)+1(28-4)-4(2+1)$$

$$= -18+24-12 = -6 \neq 0$$

దత్త తలములు పట్టకమును ఏర్పరుచును.

3.7.7 $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 4 = 0, \quad \pi_2 \equiv 5x + 7y + 2z = 0, \quad \pi_3 \equiv 3x + 4y - 2z + 3 = 0$ తలముల ఛేదన స్వభావమును పరీక్షించుము.

సాధన:

$a_1 = 2, \quad b_1 = -1 \quad c_1 = 1, \quad d_1 = -4$
$a_2 = 5, \quad b_2 = 7, \quad c_2 = 2, \quad d_2 = 0$
$a_3 = 3, \quad b_3 = 4, \quad c_3 = -2, \quad d_3 = 3$ ఇవ్వబడినవి

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(-14-8)+1(-10-6)+1(20-21) = 44-16-1 = -61 \neq 0$$

$\Rightarrow$ మూడు తలములు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును.

3.7.8 $\pi_1 \equiv x + y + z + 6 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + 2y + 2z + 6 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 3z + 6 = 0$ తలముల ఛేదన స్వభావమును పరీక్షించుము.

సాధన: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

మూడు తలములకు ఉమ్మడి రేఖ ఉన్నది.

3.7.9 λ యొక్క ఏ విలువలకు $\pi_1 \equiv x - y + z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv \lambda x + 3y + 2z - 3 = 0$, $\pi_3 \equiv 3x + \lambda y - z - 2 = 0$.
(i) ఒక బిందువు వద్ద ఛేదించుకుంటాయి, (ii) పట్టకము ఏర్పరుచును.

సాధన:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 3 & 2 \\ 3 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

(i) తలములు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$

$$\Leftrightarrow -3 - 2\lambda + (-\lambda - 6) + \lambda^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 18 \neq 0$$

$\lambda = -3$ మరియు 6 కు $\Delta = 0$

$\therefore$ -3 మరియు 6 లకు తప్ప λ యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు తలములు బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

(ii) $\lambda = -3$ మరియు 6 విలువలకు $\Delta = 0 \Rightarrow$ తలములు పట్టకమును ఏర్పరుచును.

3.7.10 $\pi_1 \equiv x - cy - bz = 0$, $\pi_2 \equiv az + cx - y = 0$, $\pi_3 \equiv bx + ay - z = 0$ తలములు ఒక రేఖ గుండా పోవాలంటే $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, అని నిరూపించుము మరియు ఛేదన రేఖ యొక్క సమీకరణములు

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}$$ అని చూపుము.

సాధన:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1, & b_1 = -c, & c_1 = -b, & d_1 = 0 \\ a_2 = -c, & b_2 = 1, & c_2 = -a, & d_2 = 0 \\ a_3 = -b, & b_3 = -a, & c_3 = 1, & d_3 = 0 \end{array}$$ ఇవ్వబడినవి

దత్త తలములకు ఉమ్మడి రేఖ ఉన్నది.

$$\Rightarrow \Delta = 0, \ \Delta_1 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ -c & 1 & -a \\ -b & -a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 - a^2 + c(-c - ab) - b(ac + b) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc = 0 \quad \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$$

మూడు తలములు మూల బిందువు గుండా పోతున్నాయి కాబట్టి ఉమ్మడి రేఖ L కూడా మూల బిందువు గుండా పోతుంది.

ఉమ్మడి రేఖ L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు ℓ, m, n అనుకొనుము.

$L \perp \pi_1,\ L \perp \pi_2, L \perp \pi_3 \ \Rightarrow \ell - mc - bn = 0 \ \cdots \ (1)$

$-c\ell + m - an = 0 \ \cdots \ (2), \quad -b\ell - am + n = 0 \ \cdots \ (3)$

(1) మరియు (2)లను సాధించగా $\dfrac{\ell}{ac+b} = \dfrac{m}{bc+a} = \dfrac{n}{1-c^2} \ \cdots \ (4)$

(2) మరియు (3)లను సాధించగా $\dfrac{\ell}{1-a^2} = \dfrac{m}{ab+c} = \dfrac{n}{ca+b} \ \cdots \ (5)$

(3) మరియు (1)లను సాధించగా $\dfrac{\ell}{ab+c} = \dfrac{m}{1-b^2} = \dfrac{n}{bc+a} \ \cdots \ (6)$

(5) మరియు (6)లలో మొదటి రెండు పదాలను తీసుకుని గుణకారము చేయగా

$$\frac{\ell^2}{(ab+c)\left(1-a^2\right)} = \frac{m^2}{(ab+c)\left(1-b^2\right)} \Rightarrow \frac{\ell^2}{1-a^2} = \frac{m^2}{1-b^2}$$

అదే విధముగా $\dfrac{m^2}{1-b^2} = \dfrac{n^2}{1-c^2}$

కాబట్టి $\dfrac{\ell^2}{1-a^2} = \dfrac{m^2}{1-b^2} = \dfrac{n^2}{1-c^2} \Rightarrow \dfrac{\ell}{\sqrt{1-a^2}} = \dfrac{m}{\sqrt{1-b^2}} = \dfrac{n}{\sqrt{1-c^2}}$

L యొక్క సమీకరణము $\dfrac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \dfrac{z}{\sqrt{1-c^2}}$

3.7.11 $a\ell + bm + cn = 0$ అయితే $bx - ay = n,\ cy - bz = \ell,\ az - cx = m$ తలములు ఒక రేఖలో ఖండించుకుంటాయని చూపుము.

సాధన: దత్త తలములు $\pi_1 \equiv bx - ay - oz - n = 0$, $\pi_2 \equiv cy - bz - \ell = 0$, $\pi_3 \equiv -cx + oy + az - m = 0$

π_1, π_2 & π_3 లు ఒక రేఖలో ఖండించుకుంటే $\Delta = 0, \Delta_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \text{ మరియు } \begin{vmatrix} b & -a & -n \\ 0 & c & -\ell \\ -c & 0 & -m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad b(-mc) + a(-c\ell) - n\left(c^2\right) = 0 \Rightarrow -cbm - ca\ell - c^2 n = 0 \Rightarrow a\ell + bm + cn = 0$$

3.8 S.A.Q.లకు సమాధానములు:

3.5.11 S.A.Q.: L_1 రేఖ $\frac{x-5}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{1}=r$ మరియు L_2 రేఖ $\frac{x+5}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{2}=s$ అనుకొనుము.

L_1 పై ఏదైనా బిందువు $P=(r+5, r, r+5)$ మరియు L_2 పై ఏదైనా బిందువు $Q=(s-5, s, 2s-5)$

PQ రేఖ L_3కు సమాంతరముగా ఉంటే $\frac{x-5}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-10}{3}$

$$\frac{r-s+10}{2}=\frac{r-s}{1}=\frac{r-2s+10}{3}=\lambda$$ తీసుకొనుము

$\Rightarrow 10+r-s=2\lambda \cdots (1)$ $r-s=\lambda \cdots (2)$ $r-2s+10=3\lambda \cdots (3)$

(1) - (2) $\Rightarrow \lambda=10 \Rightarrow \lambda=10$

(1) - (3) $\Rightarrow s=-10$, $r=0$

$\Rightarrow P=(5,0,5)$ $Q=(-15,-10,-25)$

PQ , L_3కు సమాంతరము $\Rightarrow$ PQ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు 2, 1, 3

$\Rightarrow$ P, Q ల గుండా పోతూ L_3 కు సమాంతరముగా ఉండే సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{3}$$

3.5.12 S.A.Q.: $\pi_1 \equiv 2x+y-1=0$, $\pi_2 \equiv x-2y+3z=0$ తలము L_1రేఖను మరియు

$\pi_3 \equiv 3x-y+z+2=0$, $\pi_4 \equiv 4x+5y-2z-3=0$ తలములు L_2 రేఖను సూచిస్తున్నాయని అనుకొనుము.

L_1 గుండా పోయే ఏ తలముకైనా సమీకరణము $\pi_1+\lambda\pi_2=0$

$(2x+y-1)+\lambda(x-2y+3z)=0 \Rightarrow (2+\lambda)x+(1-2\lambda)y+3\lambda z+(-1)=0 \cdots (1)$

L_2 గుండా పోయే ఏ తలముకైనా సమీకరణము $\pi_3+\mu\pi_4=0$

$(3x-y+z+2)+\mu(4x+5y-2z-3)=0 \Rightarrow$

$(3+4\mu)x+(-1+5\mu)y+(1-2\mu)z+(2-3\mu)=0 \cdots (2)$

సమీకరణములు (1) మరియు (2) కావలసిన రేఖను సూచిస్తే, L రేఖకు π సమాంతరముగా ఉంటుంది.

$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$.

$\Rightarrow$ తలము (1)కి L సమాంతరము మరియు తలము (2)కు L సమాంతరము

$$\Rightarrow 1(2+\lambda)+2(1-2\lambda)+3(3\lambda)=0 \ \& \ (3+4\mu)1+(-1+5\mu)2+(1-2\mu)3=0$$

$\Rightarrow \lambda=-\dfrac{2}{3}$ మరియు $\mu=-\dfrac{1}{2}$

కావలసిన రేఖ యొక్క సమీకరణములు $4x+7y-6z=3,\ 2x-7y+4z=-7$.

3.5.13 S.A.Q.: $\alpha\beta\gamma \neq 0$ తీసుకొనుము.

దత్త రేఖలు $L_1, \dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{\gamma}$, $L_2, \dfrac{x}{a\alpha}=\dfrac{y}{b\beta}=\dfrac{z}{c\gamma}$, $L_3, \dfrac{x}{\ell}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$

L_1, L_2, L_3 రేఖలు $(0, 0, 0)$ వద్ద అనుషక్తములు.

L_1, L_2 మరియు L_3 దిశలో సదిశలు వరుసగా $(\alpha, \beta, \gamma), (a\alpha, b\beta, c\gamma), (\ell, m, n)$

L_1, L_2 మరియు L_3 సతలీయములు.

$$\Rightarrow \left[(\alpha,\beta,\gamma),(a\alpha,b\beta,c\gamma),(\ell,m,n)\right]=0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \\ \ell & m & n \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \ell\beta\gamma(c-b)-m\alpha\gamma(c-a)+n\alpha\beta(b-a)=0 \ \Rightarrow \frac{\ell}{\alpha}(b-c)+\frac{m}{\beta}(c-a)+\frac{n}{\gamma}(a-b)=0$$

3.5.14 S.A.Q.: λ_1 , λ_2 యొక్క అన్ని విలువలకు $2x+y-4+\lambda_1(y+2z)=0$,

$x+3z-4+\lambda_2(2x+5z-8)=0$ రేఖ దత్త రేఖలను ఖండించును.

$-1+\lambda_1=0$ మరియు $1+\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_1=1$ మరియు $\lambda_2=-1$ అయితే రేఖ $(2,-1,1)$ గుండా పోవును.

కావలసిన రేఖ యొక్క సమీకరణము $x+y+z=2$ and $x+2z=4$

3.6.11 S.A.Q.: దత్త రేఖలు $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}-1=0, x=0 \ \cdot\ \cdot\ \cdot \ (1)$

మరియు $\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}-1=0, y=0 \ \cdot\ \cdot\ \cdot \ (2)$

$$\Rightarrow \frac{x-a}{a}=\frac{z}{c},\ y=0$$

రేఖ (1) గుండాపోయే తలము యొక్క సమీకరణము $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1+\lambda x=0 \quad \cdots \quad (3)$

ఈ తలము రేఖ (2)కు సమాంతరముగా ఉంటే $\lambda a+\frac{1}{b}(0)+\frac{1}{c}\cdot c=0 \Rightarrow \lambda a+1=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{a}$

రేఖ (1)ని కలిగియుండి (2)కు సమాంతరముగా ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1-\frac{x}{a}=0 \Rightarrow \frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0 \quad \cdots \quad (4)$$

రేఖ (2)పై బిందువు $(a, 0, 0)$. (1), (2)ల మధ్య అత్యల్ప దూరము $2d$ కాబట్టి $2d=(a,\ 0,\ 0)$ నుండి తలము (4)కు దూరము

$$\Rightarrow 2d=\frac{\left|\frac{a}{a}-\frac{0}{b}-\frac{0}{c}+1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}} \Rightarrow \frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

3.6.12 S.A.Q.: OX రేఖ యొక్క సమీకరణములు $y=0, z=0$.

OX గుండాపోయే తలము యొక్క సమీకరణము $y+\lambda_1 z=0 \quad \cdots \quad (1)$

అదే విధముగా OY గుండా పోయే తలము యొక్క సమీకరణము $x+\lambda_2 z=0 \quad \cdots \quad (2)$

(1) మరియు (2) తలముల మధ్య కోణము α కాబట్టి

$$\text{Cos}\ \alpha=\frac{0+0+\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\ \sqrt{1+\lambda_2^2}} \Rightarrow \left(1+\lambda_1^2\right)\left(1+\lambda_2^2\right)=\lambda_1^2\lambda_2^2\ \text{Sec}^2\alpha$$

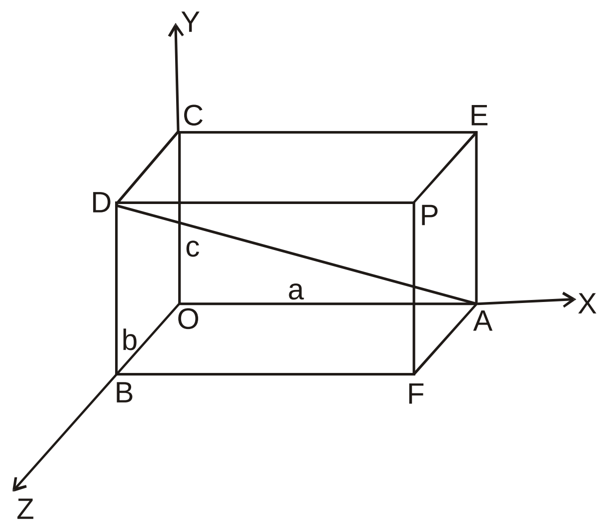
$$\Rightarrow 1+\lambda_1^2+\lambda_2^2=\lambda_1^2\lambda_2^2\left(\text{Sec}^2\alpha-1\right)=\lambda_1^2\lambda_2^2\,\text{Tan}^2\alpha \quad \cdots \quad (3)$$

(1), (2)ల నుండి $\lambda_1=\frac{-y}{z}, \lambda_2=\frac{-x}{z}$

(3) లో ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా $1+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}=\frac{y^2x^2}{z^4}\tan^2\alpha$

$$\Rightarrow z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)=x^2y^2\ \tan^2\alpha .$$

3.6.13 S.A.Q.: ఒక దీర్ఘ ఘనములోని ఒకే ఆంత్య బిందువు కలిగిన మూడు అంచులను నిరూపకాక్షములుగా తీసుకొనుము $OA = a$, $OB = b$ మరియు $OC = c$ తీసుకొనుము. విభిన్న శీర్షముల నిరూపకములు ఈ క్రింది విధముగా ఉంటాయి.



$O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, $D(0,b,c)$, $E(a,0,c)$, $F(a,b,0)$, $P(a,b,c)$

దీర్ఘ ఘనము యొక్క కర్ణము AD మరియు AD ని ఖండించని అంచు OB. AD మరియు OB ల మధ్య అత్యల్ప దూరమును కనుగొనాలి.

AD యొక్క సమీకరణము $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y}{b-0} = \frac{z}{c-0} \Rightarrow \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \cdots \quad (1)$

OB యొక్క సమీకరణము $\frac{x}{0} = \frac{y-b}{1} = \frac{z}{0} \quad \cdots \quad (2)$

రేఖ (1) పై సదిశ $(-a,b,c)$ రేఖ (2) పై సదిశ $(0,1,0)$

(1) మరియు (2) రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖ L అనుకొనుము.

రేఖలు (1) మరియు (2)లకు L లంబముగా ఉన్నది కాబట్టి L పై సదిశ $(0,1,0)\times(-a,b,c)$ అవుతుంది.

$$(0,1,0)\times(-a,b,c) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & b & c \end{vmatrix} = c\bar{i} + o\bar{j} + a\bar{k} = (c,0,a)$$

L పై యూనిట్ సదిశ $= \dfrac{(c,0,a)}{\sqrt{c^2+a^2}}$

AD మరియు OB ల మధ్య L యొక్క పొడవు = L పై $(a,0,0)$ మరియు $(0,b,0)$ లను కలుపు రేఖ యొక్క విక్షేపము.

$$= \frac{(a-0,\, 0-b,\, 0)\cdot(c,0,a)}{\sqrt{c^2+a^2}} = \frac{ac-b(0)+0(a)}{\sqrt{c^2+a^2}} = \frac{ac}{\sqrt{c^2+a^2}}$$

అదే విధముగా మిగిలిన సరళరేఖల జతల మధ్య అత్యల్ప దూరములను $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ గా పొందవచ్చును.

3.9 సారాంశము:

ఈ పాఠము చదివిన తరువాత విద్యార్థికి తలము పై ఒక బిందువు మరియు సరళరేఖ యొక్క ప్రతి బింబము, రెండు సరళరేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు తలముల ఛేదనము యొక్క స్వభావముల గురించి మంచి జ్ఞానము వచ్చును.

3.10 సాంకేతిక పదములు:

ప్రతిబింబము

సతలీయత

అసౌష్ఠవ రేఖలు

అత్యల్ప దూరము

త్రిభుజ పట్టకము

3.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. A $(2,-1,3)$ బిందువుకు $\pi \equiv 3x-2y-z=9$ తలములో ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

2. $A(1,6,3)$ బిందువుకు $L: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ రేఖలో ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

3. $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ రేఖకు $\pi \equiv x+y+z+1=0$ తలములో ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

4. $\frac{x+5}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-7}{-2}$; $3x+2y+z-2=0$, $x-3y+2z-13=0$ రేఖలు సతలీయములని చూపుము. అవి ఉండే తలము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

5. $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1}$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2}$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

6. $\frac{x}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$; $5x-2y-3z+6=0=x-3y+2z-3$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

7. z అక్షము మరియు $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0=a_2x+b_2y+c_2z+d_2$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరమును కనుగొనుము.

8. $2x+y+z-3=0$, $x-y+2z-4=0$, $x+z-2=0$ పట్టకము యొక్క లంబ ఛేదనము యొక్క ంచుల పొడవులు మరియు వైశాల్యము కనుగొనుము.

9. $2x-3y-7z=0$, $3x-14y-13z=0$, $8x-31y-33z=0$ తలములు ఒక రేఖ గుండాపోవునని చూపి దాని సమీకరణము కనుగొనుము.

10. $x+y+z+3=0$, $3x+y-2z+2=0$, $2x+4y+7z-7=0$ తలముల ఛేదన స్వభావమును పరీక్షించండి.

3.12 అభ్యాసము:

1. $(1,3,4)$ బిందువుకు $2x-y+z+3=0$ తలములో ప్రతి బింబము కనుగొనుము.

జ॥ $(-3, 5, 2)$

2. $(-2, 1, 3)$ బిందువుకు $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-6}{2}$ రేఖలో ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

జ॥ $(2, -3, 5)$

3. $\frac{x-1}{9}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-3}$ రేఖకు $3x-3y+10z-26=0$ తలములో ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

జ॥ $\frac{x-4}{9}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-7}{-3}$

4. $x=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{3}$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-3}{4}$ రేఖలు సతలీయములని చూపుము. ఖండన బిందువు మరియు రేఖలు ఉన్న తలమును కనుగొనుము.

జ॥ $(2,6,3),\ x-2y+z+7=0$

5. $x=2y=2z$ మరియు $3x+4y=1,\ 4x+5z=2$ రేఖలను ఖండిస్తూ $(1\,,0\,,-1)$ బిందువు గుండాపోయే సరళరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $x-3y+z=0=16x-12y+11z-5$.

6. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{5}$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

జ॥ $\frac{1}{\sqrt{6}},\ 11x+2y-7z+6=0=7x+y-5z+7$

7. $2x-3y+4z=0=x-y+z$; $x+y+2z-3=0=2x+3y+3z-4$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణమును కనుగొనుము.

జ॥ $\frac{13}{\sqrt{66}},\ 3x-y-z=0=x+2y+z-1$

8. ఘనములోని కర్ణము మరియు దానిని ఖండించని అంచుల మధ్య అత్యల్ప దూరము $a/\sqrt{2}$ అని చూపుము.

జ॥

9. $3x+2y-15z-8=0,\quad 3x-y-3z+32=0$ రేఖకు అతి దగ్గరగా ఉండేట్లు

$(-6\,,1\,,-10),(-3\,,7\,,-13)$ బిందువుల గుండా పోయే రేఖ పై బిందువు కనుగొనుము.

జ॥ $\left(\frac{-3433}{321},\frac{-2113}{321},\frac{-1693}{321}\right)$

10. $2x-5y+z=3,\quad x+y+4z=5,\ x+3y+6z=1$ తలముల ఛేదన స్వభావమును పరీక్షించుము.

జ॥ తలములు పట్టకమును ఏర్పరుచును.

11. $2x-3y-7z=0,\ 3x-14y-13z=0,\ 8x-31y-33z=0$ తలములు ఒకే రేఖ గుండా పోవునని చూపి వాటి సమీకరణములు కనుగొనుము.

జ॥ $\frac{x}{59}=\frac{y}{-5}=\frac{3}{19}$

3.13 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{2};\ \frac{x-4}{4}=\frac{y-5}{5}=\frac{z-2}{3}$ అత్యల్ప దూరమును మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

నిర్వచనములు:

1. **అసౌష్ఠవ రేఖలు:** ఏ రెండు సరళరేఖలైనా ఛేదించుకోకుండా మరియు సమాంతరముగా లేకుండా (అతలీయములు) ఉంటే వాటిని అసౌష్ఠవ రేఖలు అంటారు.

2. **అత్యల్ప దూరము:** దత్త రేఖల మధ్య లంబ దూరమును రెండు రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము అంటారు.

ఉపయోగించిన ఫలితములు:

1. L_1, L_2 లు అతలీయ రేఖలు. L అనే వేరొక రేఖ L_1, L_2లను వరుసగా G, H ల వద్ద ఖండించును మరియు L_1, L_2 రెండిటికి L లంబముగా ఉన్నది. L_1 మరియు L_2 ల మధ్య GH పొడవు అత్యల్ప దూరము అవుతుంది.

2. $L_1:\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ మరియు $L_2:\frac{x-x_2}{\ell_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ లు దత్తరేఖలు. L_1, L_2 ల మధ్య అత్యల్ప దూరము

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\sum(m_1n_2-m_2n_1)^2}}$$ యొక్క పరమ మూల్యము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా

సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ m_1n_2-m_2n_1 & n_1\ell_2-n_2\ell_1 & \ell_1m_2-\ell_2m_1 \end{vmatrix}=0=\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ m_1n_2-m_2n_1 & n_1\ell_2-n_2\ell_1 & \ell_1m_2-\ell_2m_1 \end{vmatrix}$$

దత్త రేఖలు సౌష్ఠవ రూపములో ఉన్నాయి.

Step (1): రెండు బిందువులను కలుపు రేఖ దత్త రేఖలకు లంబముగా ఉండేటట్లుగా దత్త రేఖల మీద బిందువులు వరుసగా G , H లను కనుగొనుట.

Step (2): రెండు రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము అగునట్లు G మరియు H ల మధ్య దూరమును కనుగొనుట

Step (3): G మరియు H లను కలిపే రేఖా సమీకరణమును కనుగొనుట.

సాధన: Step (1): దత్త రేఖలు $L_1 : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{2} = t$ (అనుకొనుము)

$$L_2 : \frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-2}{3} = s \quad \text{(అనుకొనుము)}$$

L_1 పై ఏదేని బిందువు $(3t+2,\ 4t+3,\ 2t+1) \qquad (t \in \mathbb{R})$

L_2 పై ఏదేని బిందువు $(4s+4,\ 5s+5,\ 3s+2) \qquad (s \in \mathbb{R})$

$G = (3t+2,\ 4t+3,\ 2t+1)$ మరియు $H = (4s+4,\ 5s+5,\ 3s+2)$ మరియు L_1, L_2 లను GH లంబముగా ఉంటే

GH యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $3t-4s-2,\ 4t-5s-2,\ 2t-3s-1$

$$GH \perp L_1 \Rightarrow 3(3t-4s-2)+4(4t-5s-2)+2(2t-3s-1)=0$$

$$GH \perp L_2 \Rightarrow 4(3t-4s-2)+5(4t-5s-2)+3(2t-3s-1)=0$$

$$29t-38s-16=0, \quad 38t-50s-21=0$$

ఈ రెండు సమీకరణములను సాధించగా

$$\frac{t}{-2} = \frac{s}{1} = \frac{1}{-6} \Rightarrow t = \frac{1}{3},\ s = -\frac{1}{6}$$

$$G = \left(3,\ \frac{13}{3},\ \frac{5}{3}\right),\ H = \left(\frac{10}{3},\ \frac{25}{6},\ \frac{3}{2}\right)$$

Step (2): $GH = \sqrt{\left(\dfrac{10}{3}-3\right)^2 + \left(\dfrac{13}{3}-\dfrac{25}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Step (3): GH యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}$ i.e. $2,1,.$

అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖ GH యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-\frac{13}{3}}{1} = \frac{z-\frac{5}{3}}{1} \quad \text{i.e.} \quad \frac{x-3}{2} = \frac{3y-13}{3} = \frac{3z-5}{3}$$

పాఠ్యభాగ రచయిత

S.V.S. **గిరిజ**

పాఠము - 4

గోళము - 1 గోళ సమీకరణాలు

4.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత విద్యార్థి దత్త వ్యాసార్ధము కేంద్రము గల గోళ సమీకరణాన్ని, x , y , z లలో రెండవ తరగతి సమీకరణం గోళాన్ని సూచించడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమాలు, ఒకే తలంలో లేని నాలుగు బిందువుల గుండా పోయే గోళ సమీకరణం మరియు దత్త వృత్తం గుండాపోయే గోళ సమీకరణాలు కనుగొనే పద్ధతులు తెలుసుకోగలడు.

4.2 పాఠ్యాంశాలక్రమము:-

ఈ పాఠంలో క్రింది భాగాలు ఉన్నవి.

4.3 ఉపోద్ఘాతము:

తలంలోని ఒక స్థిర బిందువు నుండి, స్థిర దూరంలో చలించే బిందు పదం ఒక వృత్తము. దీనిని $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$ అనే వర్గ సమీకరణంతో సూచిస్తాము. సహజంగా ఈ బిందు పదాన్ని త్రి పరిమాణ అంతరాళంలో కూడ పరిగణన చేయవచ్చు. త్రి పరిమాణ అంతరాళంలోని ఈ బిందుపదాన్ని గోళం అంటాము. పై నిర్వచనం ప్రకారం గోళానికి సమీకరణము, నాలుగు బిందువుల గుండా పోయే గోళ సమీకరణం, ఒక గోళము తలముల ఛేదకము, రెండు గోళాల ఛేదకముల గురించి ఈ పాఠంలో చర్చిస్తాము.

4.4 గోళ సమీకరణాలు:

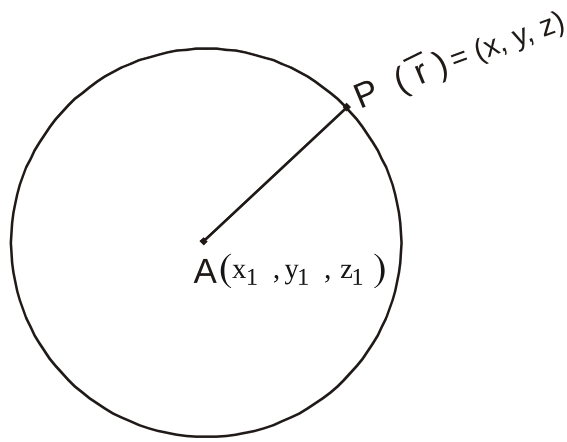
4.4.1 నిర్వచనము: అంతరాళంలో స్థిర బిందువు నుండి స్థిర దూరంలో చలించే బిందువు యొక్క బిందుపదాన్ని గోళము అంటాము. స్థిర బిందువులను గోళ కేంద్రం అని, స్థిర దూరమును గోళ వ్యాసార్థమని అంటాము.

4.4.2 నిర్వచనము: శూన్య వ్యాసార్థ గోళమును బిందు గోళం అంటాము.

4.4.3 సిద్ధాంతము: $A(x_1, y_1, z_1) = \bar{d}$ కేంద్రంగాను, $a > 0$ వ్యాసార్థంగాను ఉండే గోళ సదిశా సమీకరణం $\left|\bar{r} - \bar{d}\right|^2 = a^2$ మరియు కార్టీషియన్ (Cartesian) రూపంలో సమీకరణం

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2$$

ఉపపత్తి: $P(x, y, z)$ గోళం మీద ఏదైనా బిందువు



$$\overline{OA} = \bar{d}, \overline{OP} = \bar{r} \quad \text{మరియు}$$

$$\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} = \bar{r} - \bar{d}.$$

P గోళం మీద బిందువు $\Leftrightarrow AP = a$

$$\Leftrightarrow \left|\overline{AP}\right| = a$$

$$\Leftrightarrow \left|\bar{r} - \bar{d}\right| = a$$

$$\Leftrightarrow \left|\bar{r} - \bar{d}\right|^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow |\bar{r}|^2 - 2\,\bar{r}\cdot\bar{d} + |\bar{d}|^2 - a^2 = 0$$

$A(\bar{d})$ కేంద్రం గాను, $a > 0$ వ్యాసార్థం గాను ఉండే గోళ సదిశా సమీకరణం

$$\boxed{|\bar{r} - \bar{d}|^2 = a^2}$$

మరియు కార్టీషియన్ రూపంలో గోళ సమీకరణం

$$\boxed{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2}$$

4.4.4 Corollary: మూల బిందువు కేంద్రం గాను, $a > 0$ వ్యాసార్థం గాను ఉండే గోళ సదిశా సమీకరణం $|\bar{r}|^2 = a^2$ మరియు కార్టీషియన్ రూపంలో గోళ సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

4.4.5 గమనిక: గోళ సమీకరణంకు సంబంధించి క్రింది విషయాలను గమనించవచ్చు.

(i) ఇది x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమీకరణం.

(ii) x^2, y^2, z^2 గుణకాలు సమానం మరియు xy, yz, zx పదాలు లోపిస్తాయి.

(iii) గోళ సమీకరణం ఈ క్రింది రూపంలో ఉంటుంది.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

మరింత ఖచ్చితంగా కింది సిద్ధాంతం చెప్తుంది.

4.4.6 సిద్ధాంతము : $u^2 + v^2 + w^2 - d > 0$ అయితే సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$(-u, -v, -w)$ కేంద్రం గాను, $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ వ్యాసార్థంగా గల గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

ఉపపత్తి: ఇచ్చిన సమీకరణం $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2ux + u^2 + y^2 + 2uy + v^2 + z^2 + 2wz + w^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d$$

$$\Rightarrow (x + u)^2 + \left(y + v^2\right) + (z + w)^2 = \left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left[x-(-u)\right]^2+\left[y-(-v)\right]^2+\left[z-(-w)\right]^2=\left(\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}\right)^2$$

ఇది $(-u,-v,-w)$ కేంద్రం గాను, $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ వ్యాసార్థంగా గల గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

4.4.7 సిద్ధాంతము:

$$S=S(x,y,z)\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

సమీకరణము ధనాత్మక వ్యాసార్థం గల ఒక గోళాన్ని సూచించడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమములు

(i) $a=b=c\neq 0$ (ii) $f=g=h=0$ (iii) $u^2+v^2+w^2-d>ad$

ఉపపత్తి: ఆవశ్యకత:

$S=0$ సమీకరణం $A=(\xi,\eta,\zeta)$ కేంద్రం గాను, $r(>0)$ వ్యాసార్థం గాను ఉండే గోళాన్ని సూచిస్తుందని అనుకొనుము. $(x^1,\ y^1,\ z^1)$ మూల బిందువయ్యేటట్లు అక్ష సమాంతర పరివర్తన చేస్తే, బిందువు (x,y,z) యొక్క నిరూపకాలు

$x=x^1+\xi,\ y=y^1+\eta,\ z=z^1+\zeta$ గా మారతాయి.

$S=0$ సమీకరణము

$$S\left(x^1,\ y^1,\ z^1\right)\equiv ax^{1^2}+by^{1^2}+cz^{1^2}+2fy^1z^1+2gz^1x^1+2hx^1y^1$$

$$+2x^1(a\xi+h\eta+g\zeta+u)$$

$$+2y^1(h\xi+b\eta+f\zeta+v)$$

$$+2z^1(g\xi+f\eta+e\zeta+w)+S(\xi,\eta,\zeta)=0\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (1)$$ గా మారుతుంది.

θ అన్ని విలువలకు

$(r\ \mathrm{Cos}\ \theta,\ r\ \mathrm{Sin}\ \theta, 0)$, $(0,0,0)$ల మధ్య దూరము $=r$

$\therefore \theta$ అన్ని విలువలకు $(r\ \mathrm{Cos}\ \theta,\ r\ \mathrm{Sin}\ \theta,\ 0),\ \forall\ \theta$ బిందువు కేంద్రంగాను 'r' వ్యాసార్థంగా గల గోళం పై ఉండే సమీకరణం (1) సూచించే గోళం పై ఉంటుంది.

$\xi_1=a\xi+h\eta+g\zeta+u$

$\eta_1=h\xi+b\eta+f\zeta+v$

$\zeta_1 = f\xi + f\eta + e\zeta + w$

$d_1 = S(\xi, \eta, \zeta)$ అని వ్రాస్తే ప్రతి θకు

$x^1 = r\cos\theta,\ y^1 = r\sin\theta,\ z^1 = 0$ లు (1)లో ప్రతిక్షేపించితే

$$r^2\left(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + 24\sin\theta\cos\theta\right) + 2r\left(\xi_1\cos\theta + \eta_1\sin\theta\right) + d_1 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

అవుతుంది.

ఇదే విధముగా $x^1 = r\cos(\theta+\pi),\ y^1 = r\sin(\theta+\pi),\ z^1 = 0$ లు (1)లో ప్రతిక్షేపించితే

$$r^2\left(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + 24\sin\theta\cos\theta\right) - 2r\left(\xi_1\cos\theta + \eta_1\sin\theta\right) + d_1 = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

అవుతుంది.

(2), (3)ల నుండి $\xi_1\cos\theta + \eta_1\sin\theta = 0 \quad \cdots \quad (4)$ అగును.

అపుడు సమీకరణం (2)

$$r^2\left(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta\right) + d_1 = 0,\ \forall\,\theta \quad \cdots \quad (5)$$ గా మారును.

$\theta = 0$ మరియు $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ లకు సమీకరణం (5)

$ar^2 + d_1 = 0,\ br^2 + d_1 = 0 \Rightarrow a = b$ గా మారును.

a $=0$ అయితే $d_1 = 0 \Rightarrow S(\xi, \eta, \zeta) = 0 \Rightarrow S = 0$ పై (ξ, η, ζ) ఉంటుంది. i.e. $r = 0,\ r \neq 0$ కాబట్టి ఇది అసంభవము.

$\therefore\ a = 0$

సమీకరణం (5) నుండి $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ మరియు $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$

$$\Rightarrow\ r^2\left(\frac{a+b}{2} + h\right) + d_1 = 0,\ r^2\left(\frac{a+b}{2} - h\right) + d_1 = 0 \Rightarrow h = 0$$

ఇట్లాగే $(0, r\cos\theta, r\sin\theta)$, $(r\cos\theta, 0, r\sin\theta)$ బిందువులు తీసుకొని $b = c,\ f = 0,\ g = 0$ అని చూపవచ్చు. అప్పుడు $S = 0$ సమీకరణాన్ని

$$S \equiv a\left(x^2+y^2+z^2\right)+2ux+2vy+2wz+d$$

$$\equiv a\left\{\left[x+\frac{u}{a}\right]^2+\left(y+\frac{v}{a}\right)^2+\left(x+\frac{w}{a}\right)^2-\frac{u^2+v^2+w^2-ad}{a^2}\right\} \quad \cdots \quad (6)$$ గా వ్రాయవచ్చును.

$$\Rightarrow \frac{u^2+v^2+w^2-ad}{a^2}=r^2>0$$

$$\therefore\ u^2+v^2+w^2-ad>0$$

పర్యాప్తత:

$a=b=e\neq 0,\ f=g=h=0$ అయితే $S=0$ సమీకరణం

$$S \equiv x^2+y^2+z^2+\frac{2u}{a}x+\frac{2v}{a}y+\frac{2w}{a}z+\frac{d}{a}=0$$ అవుతుంది.

$u^2+v^2+w^2>ad,\ \dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{a^2}+\dfrac{w^2}{a^2}-\dfrac{d}{a}=\dfrac{u^2+v^2+w^2-ad}{a^2}>0$ కావడం వల్ల

$S = 0$ సమీకరణం

$$S \equiv \left(x+\frac{u}{a}\right)^2+\left(y+\frac{v}{a}\right)^2+\left(z+\frac{w}{a}\right)^2=\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{a^2}+\frac{w^2}{a^2}-\frac{d}{a}$$ అవుతుంది.

$$=\frac{u^2+v^2+w^2-ad}{a^2}>0$$

$$\Rightarrow S \equiv \left[x-\left(\frac{-u}{a}\right)\right]^2+\left[y-\left(\frac{-v}{a}\right)\right]^2+\left[z-\left(\frac{-w}{a}\right)\right]^2=\left(\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2-ad}}{a^2}\right)^2$$ అవుతుంది.

ఇది $\left(\dfrac{-u}{a},\dfrac{-v}{a},\dfrac{-w}{a}\right)$ కేంద్రం గాను $\dfrac{\sqrt{u^2+v^2+w^2-ad}}{a}$ వ్యాసార్థం గాను ఉండే గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

4.4.8 ఉదాహరణ: ఈ క్రింది గోళాలకు కేంద్రము, వ్యాసార్థములను కనుగొనుము.

(i) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+1=0$

(ii) $x^2+y^2+z^2+2x-2y-6z+5=0$

(iii) $2\left(x^2+y^2+z^2\right)-2x+4y+2z+3=0$

సాధన:

(i) కేంద్రము $=(3,-4,5)$ మరియు వ్యాసార్థము $=\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2-1}=7$

(ii) కేంద్రము $=(-1,2,3)$ మరియు వ్యాసార్థము $=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2-5}=3$

(iii) ఇచ్చిన సమీకరణమును

$$x^2+y^2+z^2-x+2y+z+\frac{3}{2}=0$$ గా వ్రాయవచ్చును.

కేంద్రం $=\left(\frac{1}{2},-1,\frac{-1}{2}\right)$, వ్యాసార్థము $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}}=0$

4.4.9 **ఉదాహరణ:** ఒక బిందువు P నుండి సమ ఘనము యొక్క ఆరు తలాలకు గల దూరాల వర్గాల మొత్తం స్థిర సంఖ్య అయితే P బిందు పదము ఒక గోళము అని చూపుము.

సాధన: సమ ఘనము యొక్క కేంద్రమును మూల బిందువు గాను మరియు సమ ఘనము యొక్క తలాలకు సమాంతరంగా మూల బిందువు గుండాపోయే తలాలను నిరూపక తలాలుగా తీసుకొనుము. ఘనము యొక్క అంచు పొడవు $2a$ అనుకొనుము. అప్పుడు ఘనము యొక్క తలాల సమీకరణాలు

$$x=a,\ x=-a,\ y=a,\ y=-a,\ z=a,\ z=-a$$

$P(f,g,h)$ బిందు పదము మీద బిందువు

$$\Leftrightarrow (f-a)^2+(f+a)^2+(g-a)^2+(h-a)^2+(h+a)^2=k^2 \qquad (k \text{ స్థిర సంఖ్య})$$

$$\Leftrightarrow 2\left(f^2+g^2+h^2+3a^2\right)=k^2$$

P యొక్క బిందు పదము $2\left(x^2+y^2+z^2+3a^2\right)=k^2$

ఇది ఒక గోళము.

4.4.10 **ఉదాహరణ:** ఒక తలం (a, b, c) అనే స్థిర బిందువు గుండా పోతుంది. మూల బిందువు నుంచి తలానికి గీసిన లంబ పాదం

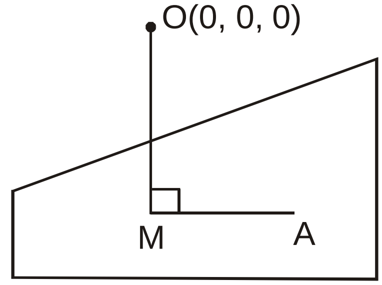
$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$$

అను గోళం పై ఉంటుందని చూపండి.

సాధన: దత్త తలము π పై $A = (a, b, c)$ స్థిర బిందువు.

$O = (0, 0, 0)$ అనుకుందాము. O నుంచి తలానికి గీసిన లంబపాదం $M(x_1, y_1, z_1)$ అనుకుందాము.

$\underline{|OMA} = 90^0$



OM దిక్ సంఖ్యలు x_1, y_1, z_1

MA దిక్ సంఖ్యలు $= a - x_1, b - y_1, c - z_1$

$OM \perp MA$

$\Leftrightarrow x_1(a - x_1) + y_1(b - y_1) + z_1(c - z_1) = 0$

$\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$

$\Leftrightarrow$ లంబపాదం $M(x_1, y_1, z_1)$ గోళం

$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$ పై ఉంటుంది.

గమనిక: పై ఉదాహరణను ఈ క్రింది విధముగా చెప్పవచ్చును.

మూల బిందువు గుండాపోతూ నిరూపకాక్షాల మీది a, b, c అంతర్ ఖండాలు చేసే గోళ సమీకరణము $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$ అవుతుంది అని చూపుము.

4.4.11 ఉదాహరణ: P అనే బిందువు నుండి మూడు పరస్పరం లంబరేఖలను గీయుము. ఒకటి $Z-$ అక్షము మీద గల స్థిర బిందువు C గుండా పోవును. మిగిలిన రెండు రేఖలు X, Y అక్షములను వరుసగా ఖండించిన P యొక్క బిందుపదము, C కేంద్రంగా గల గోళము అని చూపుము.

సాధన: $P(x_1, y_1, z_1)$ గోళము మీద ఏదైన బిందువు అనుకొనుము.

P బిందువు నుండి PA, PB, PC అనే మూడు పరస్పర లంబ రేఖలను గీయుము. ఇవి దత్తాంశమును తృప్తిపరుచును.

PA, PB, PC రేఖలు X, Y, Z అక్షాలను $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ బిందువుల వద్ద వరుసగా తాకుతాయి అనుకొనుము.

PA దిక్ సంఖ్యలు $(x_1 - a, y_1, z_1)$

PB దిక్ సంఖ్యలు $(x_1, y_1 - b, z_1)$

PC దిక్ సంఖ్యలు $(x_1, y_1, z_1 - c)$

P బిందుపదము పై ఉన్నది $\Leftrightarrow$ PA, PB, PC పరస్పర మూడు లంబ రేఖలు

$\Leftrightarrow PA \perp PB, PB \perp PC$ మరియు $PC \perp PA$

$\Leftrightarrow (x_1 - a)x_1 + y_1(y_1 - b) + z_1^2 = 0$,

$x_1^2 + y_1(y_1 - b) + z_1(z_1 - c) = 0$ మరియు $x_1(x_1 - a) + y_1^2 + z_1(z_1 - c) = 0$

(లేక) $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - ax_1 - by_1 = 0 \cdots (1)$

$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - by_1 - cz_1 = 0 \cdots (2)$

$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - ax_1 - cz_1 = 0 \cdots (3)$

$\Leftrightarrow (2) + (3) - (1) \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2cz_1 = 0$

$\Leftrightarrow$ గోళము (x_1, y_1, z_1) బిందువు $C(0,0,c)$ కేంద్రముగా గల గోళము $x^2 + y^2 + z^2 - 2cz = 0$ పై ఉన్నది.

4.4.12 నిర్వచనము: గోళము పై గల A, B బిందువులు నిర్దేశించే రేఖ ఆ గోళము కేంద్రము గుండా పోతే AB ని గోళము యొక్క వ్యాసము (Diameter) అంటాము.

4.4.13 నిర్వచనము: ఒకే కేంద్రం గల గోళాలను ఏక కేంద్ర గోళాలు లేక సమ కేంద్ర గోళాలు అంటారు.

4.4.14 ఉదాహరణ: వ్యాసార్థం 4, మరియు $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ గోళంతో ఏక కేంద్రంగా చేసే గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త గోళము యొక్క కేంద్రము $(1,1,1)$.

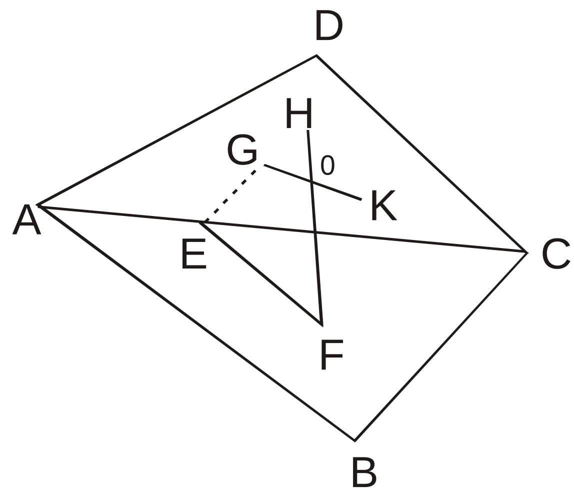
కావలసిన గోళము యొక్క సమీకరణము

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$$

4.4.15 సిద్ధాంతము: ఒకే తలము లేని నాలుగు బిందువుల గుండా పోయే గోళము ఒకే ఒక్కటి ఉంటుంది.

ఉపపత్తి:



ఒకే తలంలో లేని నాలుగు బిందువులు A, B, C, D అనుకొనుము.

ABC, ADC త్రిభుజాల పరివృత్త కేంద్రములు వరుసగా F, G అనుకొనుము.

ABC, ADC తలములకు F, G ల గుండా లంబములు వరుసగా FH, GK అనుకొనుము.

FH రేఖ మీది ప్రతి బిందువు A, B, C ల నుండి సమాన దూరంలోనూ, GK మీది ప్రతి బిందువు A, D, C ల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి. అందుచేత FH, GK ల మీది ప్రతి బిందువు A, C ల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది. A, C ల నుండి సమాన దూరంలో ఉండే బిందు పదం FH, GK రేఖలను కలిగి ఉండే తలం మరియు ఆ రేఖలు లంబంగా లేవు కనుక అవి ఒకే ఒక బిందువు 'O' వద్ద ఖండించుకొనును. అప్పుడు 'O' బిందువు A, B, C, D లకు సమాన దూరంలో ఉండును.

'O' కేంద్రంగాను OA $(=OB=OC=OD)$ వ్యాసార్ధం గాను గల గోళం దత్త బిందువులు A, B, C, D ల గుండా పోతుంది.

4.4.16 సిద్ధాంతము: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ మరియు $D(x_4, y_4, z_4)$ అనే సతలీయాలు కాని నాలుగు బిందువుల గుండాపోయే గోళం సమీకరణం

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+x_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdots (I)$$

సాధన: A, B, C, D బిందువులు గుండా పోయే గోళం సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (\mathrm{I}) \text{ అనుకొందాం.}$$

గోళము (1) A, B, C, D బిందువులు గుండా పోవును $\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1u + 2y_1v + 2z_1w + 1\cdot d &= S_1 \\ 2x_2u + 2y_2v + 2z_2w + 1\cdot d &= S_2 \\ 2x_3u + 2y_3v + 2z_3w + 1\cdot d &= S_3 \\ 2x_4u + 2y_4v + 2z_4w + 1\cdot d &= S_4 \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (\mathrm{II})$$

ఇక్కడ $S_i = -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2;\ i = 1, 2, 3, 4.$

పై సరణికి ఏకైక సాధన ఉంటుంది $\Leftrightarrow$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

A, B, C, D సతలీయాలు కానందున ఇది నిజము

సరణి (II) కి (u, v, w, d) ఏకైక సాధన అయితే

$$u = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ v = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ w = \frac{\Delta_3}{\Delta},\ d = \frac{\Delta_4}{\Delta} \text{ అగును.}$$

ఇచ్చుట Δ_i విలువ Δ లో i వ కాలమునకు బదులు (S_1, S_2, S_3, S_4) కాలమును వ్రాయగా వచ్చిన నిర్ధారకము విలువ. $i = 1, 2, 3, 4$.

(1)లో u, v, w, d లకు వరుసగా $\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta}$ మరియు $\frac{\Delta_4}{\Delta}$ లను ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించితే సమీకరణం (I) వచ్చును.

4.5 ఉదాహరణ సమస్యలు:

4.5.1 ఉదాహరణ: $(4,-1,2), (0,-2,3), (1,-5,-1), (2,0,1)$ బిందువుల గుండాపోయే గోళ సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ గోళం పై ఉంటే

$$8u - 2v + 4w + d = -21 \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$-4v + 6w + d = -13 \cdot \cdot \cdot (2)$$

$$2u - 10v - 2w + d = -27 \cdot \cdot \cdot (3)$$

$4u + 2w + d = -5 \cdot \cdot \cdot (4)$ వచ్చును.

$(1),(2),(3)$ మరియు (4) లను సాధించగా

$u = -2, v = 3, w = -1, d = 5$ వచ్చును.

$\therefore$ కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 5 = 0$$

4.5.2 **ఉదాహరణ:** $(0,0,0,), (-a,b,c), (a,-b,.c), (a,b,-c)$ బిందువులు గుండాపోయే గోళ సమీకరణం మరియు గోళ వ్యాసార్థాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: ఇచ్చిన బిందువులు $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ గోళము పై ఉండే

$$d = 0 \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$-2au + 2bv + 2wc = -\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \cdot \cdot \cdot (2)$$

$$2au - 2bv + 2wc = -\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \cdot \cdot \cdot (3)$$

$2au + 2bv - 2wc = -\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \cdot \cdot \cdot (4)$ వచ్చును.

(2), (3), (4) లను సాధించగా

$u = \dfrac{-\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{2a}, \; v = \dfrac{-\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{2b}, \; w = \dfrac{-\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{2c}$ వచ్చును.

కావలసిన గోళ సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0.$$

వ్యాసార్థము = $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d} = \sqrt{\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4a^2}+\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{4b^2}+\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{4c^2}-0}$

$$= \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

4.5.3 ఉదాహరణ: $x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \cdots \quad (1)$ తలాలు ముఖాలుగా గల చతుర్ముఖి పరిబద్ధ గోళం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: (1)లోని నాలుగు సమీకరణాలను సాధించగా చతుర్ముఖి యొక్క నాలుగు శీర్షాలు వచ్చును. అవి

$$(0,0,0),\ (a,0,0),\ (0,b,0),\ (0,0,c).$$

గోళ సమీకరణం

$$S \equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$ అయితే,

ఇది చతుర్ముఖి యొక్క నాలుగు శీర్షాల గుండా పోవును. అప్పుడు

$$d=0,$$

$$2au=-a^2 \Rightarrow u = {}^{-a}\!/_{2}.$$

అదే విధముగా $v = {}^{-b}\!/_{2}, \quad w = {}^{-c}\!/_{2}$

కావలసిన గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$$

4.5.4 ఉదాహరణ: $(3,0,2),\ (-1,1,1,),\ (2,-5,4)$ బిందువుల గుండాపోతూ కేంద్రం $2x+3y+4z-6=0$ తలం పై ఉన్న గోళ సమీకరణం $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ అని చూపండి.

సాదన: గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2uy+2wz+d=0 \quad \cdots \quad (1)$$ అనుకొనుము

గోళం (1) $(3,0,2),\ (-1,1,1),\ (2,-5,4)$ బిందువుల గుండాపోతే

$$6u + 4w + d = -13 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

$$-2u + 2v + 2w + d = -3 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

$4u - 10v + 8w + d = -45 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$ వచ్చును.

కేంద్రం $(-u, -v, -w)$, తలం $2x + 3y + 4z = 6$ మీద ఉండే

$-2u - 3v - 4w = 6 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (5)$ వచ్చును.

(2), (3), (4) మరియు (5) లను సాధించగా

$u = 0, v = 2, w = -3, d = -1$ వచ్చును.

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 6z - 1 = 0 \cdot$$

4.5.5 **ఉదాహరణ:** $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ బిందువుల గుండా పోతూ వీలైనంత తక్కువ వ్యాసార్థం గల గోళం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: గోళ సమీకరణం

$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$ అనుకొనుము.

గోళం (1) $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ బిందువుల గుండాపోతే

$$1 + 2u + d = 0 \Rightarrow u = \frac{-(d+1)}{2},$$

$$1 + 2v + d = 0 \Rightarrow v = \frac{-(d+1)}{2},$$

$1 + 2w + d = 0 \Rightarrow w = \frac{-(d+1)}{2}$ వచ్చును.

$$\Rightarrow u = v = w = \frac{-(d+1)}{2}.$$

గోళ వ్యాసార్థం $r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$ అనుకొనుము.

$$\Rightarrow r^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d = \left(\frac{-(d+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{-(d+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{-(d+1)}{2}\right)^2 - d$$

$$= \frac{3}{4}(d+1)^2 - d.$$

$r^2 = f(d) = \frac{3}{4}(d+1)^2 - d$ అనుకొనుము.

r కనిష్ఠము అయితే r^2 కూడ కనిష్ఠము అగును. i.e. f కనిష్ఠము

కావున $\frac{df}{dd} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}2(d+1) - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{-1}{3}$.

మరియు $d = -1/3$ వద్ద $\frac{d^2f}{dd^2}$ ధనాత్మకము. $\Rightarrow d = -1/3$ వద్ద f కనిష్ఠము.

$$u = v = w = \frac{-\left(\frac{-1}{3}+1\right)}{2} = \frac{-1}{3}$$

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}(x+y+z) - \frac{1}{3} = 0$$

i.e., $3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x+y+z) - 1 = 0$

4.5.6 **ఉదాహరణ:** $(0,-2,-4)$, $(2,-1,-1)$ బిందువుల గుండాపోతూ కేంద్రం $5y + 2z = 0 = 2x - 3y$ సరళరేఖ పై ఉన్న గోళం సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన: గోళ సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \cdots \quad (1)$$ అనుకొనుము.

కేంద్రము $(-u,-v,-w)$ దత్త సరళరేఖ పై ఉన్నది. అప్పుడు

$$-5v - 2w = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$2u - 3v = 0 \quad \cdots \quad (3)$$ అగును.

గోళము $(0,-2,-4)$, $(2,-1,-1)$ బిందువు గుండాపోయిన

$$-4v-8w+d=-20 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (4)$$

$$4u-2v-2w+d=-6 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (5)$$ వచ్చును.

(2), (3), (4) మరియు (5) లను సాధించగా

$u=-3,\ v=-2,\ w=+5,\ d=12$ వచ్చును.

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y+10z+12=0.$$

4.5.7 **ఉదాహరణ:** ఒక గోళపు కేంద్రం ధన అష్టకం మీద ఉంటుంది. అది మూలబిందువు గుండాపోతూ $x=0\ y=0,\ z=0$ తలాలను వరుసగా $a\sqrt{2},\ b\sqrt{2},\ c\sqrt{2}$ వ్యాసార్థాలు గల వృత్తాలలో ఖండిస్తే ఆ గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2-2\sqrt{\left(b^2+c^2-a^2\right)}\ x-2\sqrt{\left(c^2+a^2-b^2\right)}\ y-2\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)}z=0$$

సాధన: మూల బిందువు గుండా పోయే గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (1)$$

కేంద్రం $(-u,-v,-w)$ ధన అష్టకం పై ఉంటుంది. కావున కేంద్రం నిరూపకాలు $-u,-v,-w$ లు ధన సంఖ్యలు. గోళం (1) $z=0$ తలాన్ని ఖండిస్తుంది. కాబట్టి (1)లో $z=0$ ప్రతిక్షేపిస్తే

$x^2+y^2+2ux+2vy=0$ ఇది XY తలములో $\sqrt{u^2+w^2}$ వ్యాసార్థం గల వృత్తం.

$$\therefore \sqrt{u^2+v^2}=c\sqrt{2} \ \Rightarrow\ u^2+v^2=2c^2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (2)$$

ఇదే విధముగా $v^2+w^2=2a^2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (3)$

$$u^2+w^2=2b^2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (4)$$

(2), (3) మరియు (4) లను కలిపితే $u^2+v^2+w^2=a^2+b^2+c^2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (5)$

(5) నుంచి (2), (3), (4)లను తీసివేస్తే

$$u^2=b^2+c^2-a^2,\quad v^2=c^2+a^2-b^2,\quad w^2=a^2+b^2-c^2$$

u, v, w లు ఋణాత్మకాలు కావున

$$u = -\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}, \quad v = -\sqrt{c^2 + a^2 - b^2}, \quad w = -\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}x - 2\sqrt{\left(c^2 + a^2 - b^2\right)}\,y - 2\sqrt{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}z = 0$$

4.5.8 **ఉదాహరణ:** ఒక తలం స్థిర బిందువు (a, b, c) గుండాపోతూ అక్షాలను A, B, Cల వద్ద ఖండిస్తోంది. అప్పుడు OABC గోళ కేంద్రపు బిందుపదం $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ అని చూపండి.

సాధన: దత్త తలము ఏ ఒక్క నిరూపక తలాలు కాదు కావున దత్త తలమును

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \cdots\cdots\cdots (1)$$

తలముగా తీసుకొనవచ్చును. (1) అక్షాలను $A(\alpha, 0, 0), B(0, \beta, 0)$, $c\,(0, 0, \gamma)$ వద్ద ఖండిస్తుంది.

OABC గుండా పోయే గోళ సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 - \alpha x - \beta y - \gamma z = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$P(x_1, y_1, z_1)$ అంతరాళంలో ఏదేని ఒక బిందువు అనుకొనుము.

గోళం (2) యొక్క కేంద్రం $P\,(x_1, y_1, z_1)$

$$\Leftrightarrow (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2x_1, \ \beta = 2y_1, \ \gamma = 2z_1$$

తలము (1) యొక్క సమీకరణం

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} + \frac{z}{2z_1} = 1 \text{ గా మారును.}$$

ఈ తలము స్థిర బిందువు (a, b, c) గుండా పోవును కాబట్టి

$$\frac{a}{2x_1} + \frac{b}{2y_1} + \frac{c}{2z_1} = 1 \text{ వచ్చును}$$

లేక $\frac{a}{x_1}+\frac{b}{y_1}+\frac{c}{z_1}=2$

$\Leftrightarrow$ $P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు తలము

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$ మీద ఉన్నది.

ఇది కావలసిన బిందు పదము.

4.5.9 **ఉదాహరణ:** r స్థిర వ్యాసార్థం గల గోళం 'O' మూల బిందువు గుండా పోతూ నిరూపకాక్షాలను A, B, C ల వద్ద ఖండిస్తుంది. 'O' నుంచి ABC తలానికి లంబ పాదము యొక్క బిందుపదాన్ని కనుగొనుము.

సాధన: ABC తల సమీకరణం

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \cdots (1)$$ అనుకొనుము

$\therefore$ $A=(a,0,0)$, $B=(0,b,0)$, $C=(0,0,c)$

O,A,B,C గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0 \cdots (2)$$

దీని వ్యాసార్థం $r^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}$ (r^2 యివ్వడమైంది)

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=4r^2 \cdots (3)$$

$(0, 0, 0)$ గుండా పోతూ తలం (1)కు లంబంగా ఉండే సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x-0}{1/a}=\frac{y-0}{1/b}=\frac{z-0}{1/c}=\lambda \cdots (4)$$ అనుకొనుము.

సరళరేఖ (4) పై ఏదైనా బిందువు $\left(\frac{\lambda}{a},\frac{\lambda}{b},\frac{\lambda}{c}\right)$.

ABC తలంలో మూల బిందువు యొక్క లంబపాదం $P(x_1, y_1, z_1)$ అనుకొనుము.

మూల బిందువు యొక్క లంబ పాదం P $\Leftrightarrow$ లంబపాదము P సరళరేఖ (4) పై ఉంటుంది. మరియు P బిందువు $\left(\frac{\lambda}{a},\frac{\lambda}{b},\frac{\lambda}{c}\right)$ రూపంలో ఉండును.

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{\lambda}{a},\ y_1=\frac{\lambda}{b},\ z_1=\frac{\lambda}{c}.$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{\lambda}{x_1},\ b=\frac{\lambda}{y_1},\ c=\frac{\lambda}{z_1} \cdots (5)$$

(3), (5)ల నుండి $\frac{\lambda^2}{x_1^2}+\frac{\lambda^2}{y_1^2}+\frac{\lambda^2}{z_1^2}=4r^2$

$$\Rightarrow \lambda^2\left[\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{z_1^2}\right]=4r^2 \quad \cdots \quad (6)$$

i.e. $\lambda^2\left[x_1^{-2}+y_1^{-2}+z_1^{-2}\right]=4r^2$

P బిందువు తలం (1) పై ఉన్నది $\Rightarrow \frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}+\frac{z_1}{c}=1$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{\lambda}+\frac{y_1^2}{\lambda}+\frac{z_1^2}{\lambda}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)=1 \quad \cdots \quad (7)$$

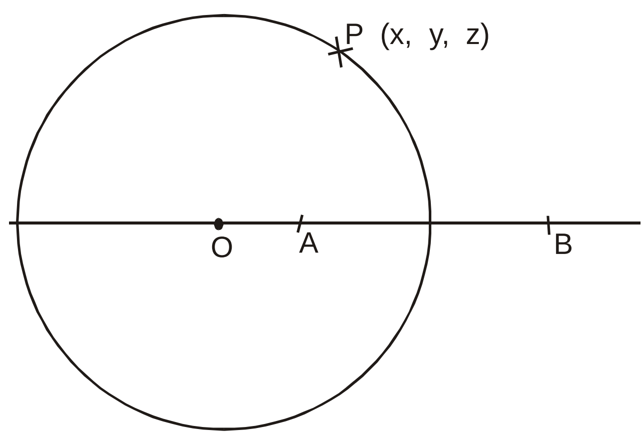
(6), (7)ల నుండి $\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)^2\left(x_1^{-2}+y_1^{-2}+z_1^{-2}\right)=4r^2$

లంబపాద బిందుపదము

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\left(x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}\right)=4r^2$$

4.5.10 ఉదాహరణ: 'O' కేంద్రంగాను, ఒక యూనిట్ వ్యాసార్థం గల వృత్తంలో 'O' గుండా పోయే సరళరేఖ మీద $OA\cdot OB=1$ అగునట్లు A, Bలు రెండు బిందువులు. P బిందువు గోళము పై చల బిందువు అయితే $PA\cdot PB=$ స్థిర సంఖ్య అని చూపుము.

సాధన: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$లు దత్త బిందువులు అనుకొనుము.



మూల బిందువు 'O' కేంద్రంగాను, ఒక యూనిట్ వ్యాసార్థంగా గల గోళం పై $P(x, y, z)$ ఏదైన బిందువు. అప్పుడు

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

OA యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $x_1-0,\ y_1-0,\ z_1-0=x_1,\ y_1, z_1$

OB యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $x_2-0,\ y_2-0,\ z_2-0=x_2, y_2, z_2$

O, A, B లు సరేఖీయాలు కావున $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{z_2}{z_1}=k$ (అనుకొనుము) అగును.

$$\Rightarrow\ x_2=kx_1,\ y_2=ky_1,\ z_2=kz_1$$

$$OA^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2, \quad OB^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2=k^2\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)=k^2OA^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

దత్తాంశము నుండి $OA\cdot OB=1 \Rightarrow OA^2\cdot OB^2=1$

$$\Rightarrow\ OA^2\cdot K^2OA^2=1$$

$$\Rightarrow \boxed{OA^2=\frac{1}{k}} \quad \text{మరియు} \quad \boxed{OB^2=k}.$$

ఇప్పుడు,

$$\frac{PA^2}{PB^2}=\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2(xx_1+yy_1+zz_1)}{x^2+y^2+z^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2(xx_2+yy_2+zz_2)}$$

$$=\frac{1+OA^2-2(xx_1+yy_1+zz_1)}{1+OB^2-2(xkx_1+yky_1+zkz_1)} \qquad \text{((1), (2)ల నుండి)}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{k}-2(xx_1+yy_1+zz_1)}{1+k-2k(xx_1+yy_1+zz_1)} \qquad \left(\because\ OA^2=\frac{1}{k},\ OB^2=k\right)$$

$$=\frac{1+\frac{1}{k}-2(xx_1+yy_1+zz_1)}{k\left[\frac{1}{k}+1-2(xx_1+yy_1+zz_1)\right]}=\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{PA^2}{PB^2} = \frac{1}{k} = \text{ స్థిర సంఖ్య}$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PB} = \sqrt{\frac{1}{k}} = \text{ స్థిర సంఖ్య}$$

$$\Rightarrow PA : PB = \text{ స్థిర సంఖ్య}$$

4.5.11 **ఉదాహరణ:** $2k$ స్థిర వ్యాసార్థం కలిగి మూల బిందువు గుండా పోయే గోళం అక్షాలను A, B, C ల వద్ద ఖండిస్తుంది. $OABC$ చతుర్ముఖి కేంద్ర బాసం బిందుపదం $x^2 + y^2 + z^2 = 4k^2$ అని చూపండి.

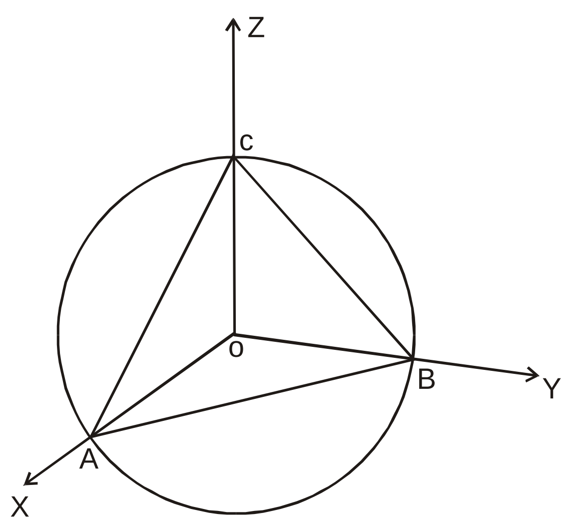
సాధన: $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ అనుకొనుము.

OABC చతుర్ముఖి కేంద్రాభాసం $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$.

O, A, B, C గోళ సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$$

i.e., $x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by + cz) = 0$



వ్యాసార్థం $= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$

$$\Rightarrow \quad 2k = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \; 4k^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$

కేంద్రబాసం $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$,

$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$ అను గోళం పై ఉన్నది.

4.6 గోళ సమతల ఛేదనం (Plane Section of a Sphere):

4.6.1 నిర్వచనం: ఒక గోళం ఒక తలం c ఉమ్మడి బిందువుల సమితిని గోళపు సమతల ఛేదనం అంటాం.

4.6.2 సిద్ధాంతము: గోళపు సమతల ఛేదనం వృత్తము లేదా శూన్య సమితి.

ఉపపత్తి: π ఒక తలము $'O'$ కేంద్రంగాను, $r(\geq 0)$ వ్యాసార్థంగా గల గోళము σ.

σ, π ల ఛేదకము శూన్య సమితి కాకపోతే ఒక వృత్తమని నిరూపించవలె.

$r = 0$ అయితే సిద్ధాంతము స్పష్టమే.

$r > 0$ అని, σ, π లకు P ఒక ఉమ్మడి బిందువనీ అనుకోండి.

$'O'$ నుంచి π తలానికి లంబపాదము $'N'$ అనీ $N', 'O'$లు వేరు వేరు బిందువులని అనుకోండి.

(i) $N = P$ అయితే $\therefore$ దత్త గోళం పై N ఉంటుంది.

$\therefore ON = OP = r$

$'N'$ కాకుండా σ, π లకు Q ఉమ్మడి బిందువు

$\Rightarrow ON \perp NQ$

$\Rightarrow \; NQ^2 = OQ^2 - ON^2 = r^2 - r^2 = 0$ ఇది అసంభవము

$\therefore$ σ, π లకు $'N'$ ఒక్కడే ఉమ్మడి బిందువు

ఇది బిందు వృత్తము.

(ii) $N \neq P$ అయితే π, $\overleftrightarrow{ON}$, $\overleftrightarrow{NP}$ లు పరస్పర లంబరేఖలు

$$\Rightarrow ON \perp NP \Rightarrow OP^2 = ON^2 + NP^2 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\Rightarrow NP = \sqrt{OP^2 - ON^2} = \sqrt{r^2 - ON^2}$$

O, N లు స్థిర బిందువులు కాబట్టి (1) నుంచి P యొక్క అన్ని విలువలకు NP స్థిరం.

$\therefore$ P యొక్క బిందుపదం N కేంద్రంగా $\sqrt{r^2 - ON^2}$ వ్యాసార్ధంగా గల వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

4.6.3 నిర్వచనం: గురు వృత్తం: గోళ కేంద్రం గుండా పోయే తలం, గోళాల ఛేదక వృత్తాన్ని గురు వృత్తం అంటాం. గురువృత్తపు కేంద్రం, వ్యాసార్ధం వరుసగా గోళ కేంద్రం, వ్యాసార్ధాలు అవుతాయి.

4.6.4 నిర్వచనం: లఘు వృత్తం: గురువృత్తం కాని వృత్తాన్ని లఘు వృత్తం అంటాం.

4.6.5 గమనిక: ఒక తలము, గోళము ఖండించుకుంటాయి $\Leftrightarrow$ గోళ కేంద్రం నుండి తలమునకు గల లంబదూరము $\leq$ గోళ వ్యాసార్థం.

i.e. గోళం $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$,

తలం $\ell x + my + nz + p = 0$ లు ఖండించుకుంటాయి.

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\ell-(u)+m(-v)+n(-w)+P}{\ell^2+m^2+n^2} \right| \leq \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$$

4.6.6 గోళ సమతల ఛేధన సమీకరణం: ఒక తలం, దాని గుండాపోయే గోళాల ఛేదకం వృత్తం కాబట్టి వృత్త సమీకరణం కావాలంటే గోళ సమీకరణం, తలం సమీకరణంలను బట్టి నిర్థారించవచ్చు.

4.7 రెండు గోళాల ఛేదకము (Intersection of Two Spheres):

4.7.1 సిద్ధాంతము: రెండు విభిన్న గోళాల ఉమ్మడి బిందువుల సమితి శూన్య సమితి గాని, ఒక వృత్తంగాని అవుతుంది.

ఉపపత్తి: $S = 0, S^1 = 0$ లు దత్త గోళాల ఉమ్మడి బిందువుల సమితి శూన్య సమితి, కాకపోతే $S - S^1 = 0$ ఒక సమతలం (π) అవుతుంది.

$$\left\{ (x,y,z) / S = 0, S^1 = 0 \right\} = \left\{ (x,y,z) / S = 0, S - S^1 = 0 \right\} \quad \cdots \quad (1)$$

కాని $S = 0$ గోళానికి, π కి గల ఉమ్మడి బిందువుల సమితి ఒక వృత్తము.

$\therefore$ (1) నుంచి $S = 0, S^1 = 0$ ల ఉమ్మడి బిందువుల సమితి అదే వృత్తం అవుతుంది.

4.7.2 సిద్ధాంతము: మూడు బిందువులు A, B, C గుండా పోయే వృత్తము ఆ మూడు బిందువులు గుండా పోయే ఏ గోళము మీదనైనా పూర్తిగా ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: A, B, C ల గుండా ఒక వృత్తం 'σ' పోతుంది. కనుక A, B, C లు సరేఖీయాలు కావు.

$\pi = \overleftrightarrow{ABC}$ తలము అనుకుందాము.

A, B, C ల గుండా పోయే ఒక గోళాన్ని S అనుకొందాము.

S, π లకు ఉమ్మడి బిందువులు ఉన్నాయి. ($\because$ A, B, C లు ఉమ్మడి బిందువులు)

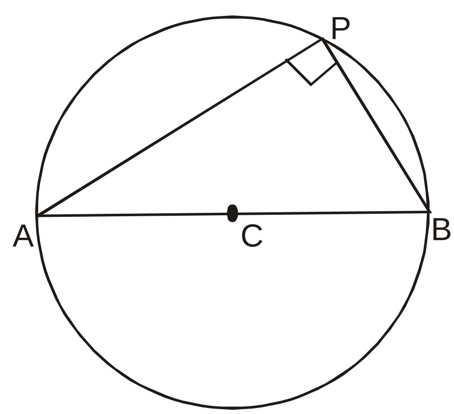
$\therefore$ S, π ల ఛేదకము ఒక వృత్తము

అది A, B, C ల గుండా పోవలె కాబట్టి 'σ' అవుతుంది.

$\therefore \sigma$ వృత్తము S గోళము పై ఉంటుంది.

4.7.3 సిద్ధాంతము: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ లు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళము సమీకరణము $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$.

ఉపపత్తి: A, B లు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళము σ అనుకొందాము.



$P(x,y,z) \in \sigma \Leftrightarrow$ P = A లేదా P = B లేదా AB వ్యాసంగా గల వృత్తం పై P ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow PA \perp PB$

$\Leftrightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$

$\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$

4.7.4 సిద్ధాంతము: $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \cdots \quad (1)$

గోళాన్ని

$$\pi \equiv \ell x + my + nz + p = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

తలం 'C' అనే వృత్తంలో ఖండిస్తే λ అన్ని విలువలకు $S + \lambda\pi = 0$ సమీకరణం C వృత్తాన్ని కలిగి ఉండే గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

ఉపపత్తి: $S + \lambda\pi = 0$

$$\Rightarrow \quad S + \lambda\pi = x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d + \lambda(\ell x + my + nz + p)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + (2u + \lambda\ell)x + (2v + \lambda m)y + (2w + \lambda n)z + d + \lambda P$$

$S = 0, \pi = 0$ ఖండించుకొనేవయితే వాటి ఉమ్మడి బిందువులు λ అన్ని వాస్తవ విలువలకు $S + \lambda\pi = 0$ కూడ ఋజువు చేస్తాయి.

కాని $S + \lambda\pi = 0$, x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమీకరణము, x^2, y^2, z^2 ల గుణకాలు సమానము మరియు xy, yz, zx గుణకాలు శూన్యము.

$S = 0$ గోళము, $\pi = 0$ తలము ఖండించుకొన్నప్పుడు $S + \lambda\pi = 0$ సమీకరణం గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

గమనిక: (1) $S = 0, S^1 = 0$ రెండు ఖండించుకొనే గోళాలైతే $S = 0, S^1 = 0$ ల ఛేదక వృత్తం గుండా $\lambda_1 S + \lambda_2 S^1 = 0$ పోతుంది $(\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0)$.

(2) ఇంకా $S + \lambda(S - S^1) = 0$ సమీకరణం λ యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్య అయితే, $S = 0, S^1 = 0$ ల ఛేదక వృత్తం గుండా పోయే గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

(3) $S = 0$ గోళం, $\pi = 0$ తలాన్ని ఖండించినప్పుడు మాత్రమే $S + \lambda\pi = 0$, λ యొక్క అన్ని విలువలకు గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

4.8 ఉదాహరణలు:

4.8.1 ఉదాహరణలు: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y + 6 = 0,\ x - 2y + 4z - 9 = 0$ అనే వృత్తం గుండాను,

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ గోళ కేంద్రం గుండా పోయే గోళం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం గుండా పోయే గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2+2x+3y+6+\lambda(x-2y+4z-9)=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$$ గోళ కేంద్రము $(1,-2,3)$.

గోళం (1), $(1,-2,3)$ బిందువు గుండాపోవును. కాబట్టి

$$1+4+9+2-6+6+\lambda(1+4+12-9)=0$$

$$\Rightarrow \quad 16+8\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2$$

$\therefore$ కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2+2x+3y+6+(-2)(x-2y+4z-9)=0$$

i.e. $$x^2+y^2+z^2+2x+3y+6-2x+4y-8z+18=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2+7y-8z+24=0$$

4.8.2 ఉదాహరణ: $x^2+y^2+z^2-2x-3y+4z+8=0$, $x^2+y^2+z^2+4x+5y-6z+2=0$ వృత్తాన్ని కలిగి ఉన్న ఒక గోళ కేంద్రం $4x-5y-z=3$ తలం మీద ఉండే ఆ గోళ సమీకరణం $x^2+y^2+z^2+7x+9y-11z-1=0$ అని చూపండి.

సాధన: దత్త తలము $4x-5y-z=3 \quad \cdots \quad (1)$

దత్త గోళములు

$$S \equiv x^2+y^2+z^2-2x-3y+4z+8=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$S^1 \equiv x^2+y^2+z^2+4x+5y-6z+2=0 \quad \cdots \quad (3)$$

$S=0, S^1=0$ లతో ఏర్పడు సమతల ఛేదన సమీకరణం $S-S^1=0$

i.e. $$-6x-8y+10z+6=0$$

$$3x+4y-5z-3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$\therefore$ కావలసిన గోళ సమీకరణము $S+\lambda\left(S-S^1\right)=0$.

i.e., $x^2+y^2+z^2-2x-3y+4z+8+\lambda(3x+4y-5z-3)=0$

i.e. $x^2+y^2+z^2+(-2+3\lambda)x+(-3+4\lambda)y+(4-5\lambda)z+8-3\lambda=0$

కేంద్రము $\left(\left(\dfrac{-2+3\lambda}{2}\right), \dfrac{-(-3+4\lambda)}{2}, \dfrac{-(4-5\lambda)}{2}\right)$

కేంద్రము తలము (1) పై ఉన్నది కావున

$$-4\left(\frac{-2+3\lambda}{2}\right)+5\left(\frac{-3+4\lambda}{2}\right)+\left(\frac{4-5\lambda}{2}\right)=3$$

$$\Rightarrow \quad 8-12\lambda-15+20\lambda+4-5\lambda=6$$

$$\Rightarrow \quad 3\lambda=9 \Rightarrow \lambda=3$$

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2-2x-3y+4z+8+3(3x+4y-5z-3)=0$$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+7x+9y-11z-1=0$.

4.8.3 **ఉదాహరణ:** $x^2+y^2+z^2+10y-4z-8=0,\ x+y+z=3$ వృత్తము గురు వృత్తముగా గల గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: దత్త వృత్తము గుండా పోయే గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2+10y-4z-8+\lambda(x+y+z-3)=0.$$

i.e. $x^2+y^2+z^2+\lambda x+(10+\lambda)y+(-4+\lambda)z-8-3\lambda=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

కేంద్రము $=\left(\dfrac{-\lambda}{2}, \dfrac{-(10+\lambda)}{2}, \dfrac{-(-4+\lambda)}{2}\right)$

దత్త వృత్తము గురువృత్తం అయితే గోళము (1) యొక్క కేంద్రం $x+y+z-3=0$ తలము పై ఉండును.

i.e. $\dfrac{-\lambda}{2}-\dfrac{(10+\lambda)}{2}-\dfrac{(-4+\lambda)}{2}-3=0$

$$\Rightarrow -\lambda-10-\lambda+4-\lambda-6=0$$

$$\Rightarrow -3\lambda-12=0 \Rightarrow \lambda=-4$$

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2+(-4)x+(10-4)y+(-4-4)z-8-3(-4)=0$$

i.e. $$x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+4=0$$

4.8.4 **ఉదాహరణ:** A $(0,1,0)$, $B(3,-5,2)$ వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళం S. ఈ గోళం Sతోను $5x-2y+4z+7=0 \cdot \cdot \cdot (1)$ తలంతోను ఏర్పడే వృత్తం గురువృత్తంగా గల గోళ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: AB వ్యాసముగా గల గోళ సమీకరణం

$$S\equiv(x-0)(x-3)+(y-1)(y+5)+(z-0)(z-2)=0$$

$$S\equiv x^2+y^2+z^2-3x+4y-2z-5=0 \cdot \cdot \cdot (2)$$

తలము (1), గోళము (2) వృత్తాన్ని ఛేదకంగా గల గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2-3x+4y-2z-5+\lambda(5x-2y+4z+7)=0\ (\lambda\in\mathbb{R})$$

i.e. $$x^2+y^2+z^2\ (-3+5\lambda)x+(4-2\lambda)y+(-2+4\lambda)z-5+7\lambda=0-(3)$$

దీని కేంద్రము $=\left(-\frac{(-3+5\lambda)}{2}, \frac{-(4-2\lambda)}{2}, \frac{-(-2+4\lambda)}{2}\right)$

సమతల ఛేదనం గురు వృత్తం కావున కేంద్రము తలము (1) పై ఉండును.

$$-5\left(\frac{-3+5\lambda}{2}\right)+2\left(\frac{4-2\lambda}{2}\right)-4\left(\frac{-2+4\lambda}{2}\right)+7=0$$

$$\Rightarrow -45\lambda+45=0 \qquad \Rightarrow \lambda=1$$

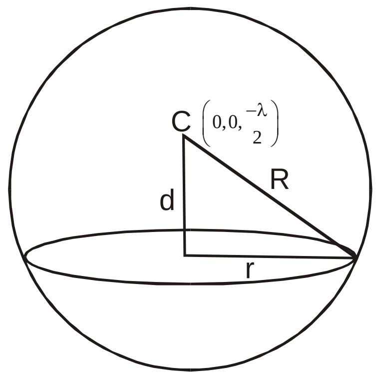
కావలసిన గోళము

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+2=0$$

4.8.5 **ఉదాహరణ:** $x^2+y^2+z^2=4,\ z=0$ వృత్తం గుండాపోతూ $x+2y+2z=0$ తలంతో 3 యూనిట్లు వ్యాసార్థం గల వృత్తాన్ని ఛేదకంగా గల గోళాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం గుండాపోయే గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2+\lambda z-4=0 \cdot \cdot \cdot (1) \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$



కేంద్రము $=\left(0,0,\frac{-\lambda}{2}\right)$, వ్యాసార్థము $=\mathbb{R}=\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+4}$

దత్త తలము $\quad x+2y+2z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

గోళము తలము (2)ను ఖండించుచున్నది

$\Rightarrow$ కేంద్రము $C\left(0,0,\frac{-\lambda}{2}\right)$ నుండి తలము (2)కు లంబదూరము $d=$ గోళ వ్యాసార్థము

$$\Rightarrow d=\frac{|-\lambda|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\lambda}{3}$$

వృత్త వ్యాసార్థం $r=3$ కావున

$$R^2=d^2+3^2$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^2}{4}+4=\frac{\lambda^2}{9}+9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\lambda^2=5$$

$$\Rightarrow \frac{5\lambda^2}{36}=5 \qquad \Rightarrow \lambda^2=36 \Rightarrow \lambda=\pm 6$$

కావలసిన గోళ సమీకరణము $\quad x^2+y^2+z^2 \pm 6z-4=0$.

4.8.6 **ఉదాహరణ:** $2\left(x^2+y^2+z^2\right)+8x-13y+17z-17=0, \quad 2x+y-3z+1=0$;

$$x^2+y^2+z^2+3x-4y+3z=0, \quad x-y-2z-4=0$$

వృత్తాలు ఒకే గోళం మీద ఉంటాయని చూపి ఆ గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $x^2+y^2+z^2+4x-\frac{13}{2}y+\frac{17}{2}, z-\frac{17}{2}=0,\ 2x+y-3z+1=0$ వృత్తాల గుండా పోయే గోళ సమీకరణం

$$\left(x^2+y^2+z^2+4x-\frac{13}{2}y+\frac{17}{2}z-\frac{17}{2}\right)+\lambda_1(2x+y-3z+1)=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (1)$$

$x^2+y^2+z^2+3x-4y+3z=0,\ x-y+2z-4=0$ వృత్తం గుండా పోయే గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2+3x-4y+3z+\lambda_2(x-y+2z-4)=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (2)$$

దత్త వృత్తాలు ఒకే గోళం మీద ఉండే λ_1, λ_2 ల సమాన విలువలకు (1), (2) సమీకరణాలు ఒకే గోళాన్ని సూచిస్తాయి.

(1), (2) సమీకరణాలలో x, y, z గుణకాలు మరియు స్థిరాంకాలను పోల్చగా

$$4+2\lambda_1=3+\lambda_2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (3)$$

$$\frac{-13}{2}+\lambda_1=-4-\lambda_2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (4)$$

$$\frac{17}{2}-3\lambda=3+2\lambda_2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (5)$$

$$\frac{-17}{2}+\lambda_1=-4\lambda_2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (6)$$

సాధించగా

(3) + (4) $\quad \Rightarrow \frac{-5}{2}+3\lambda_1=-1 \quad \Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}$

(3) $\quad \Rightarrow 4+1=3+\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2=2$

$\lambda_1=\frac{1}{2},\ \lambda_2=2$ విలువలు (5), (6) సమీకరణాలను తృప్తి పరుస్తున్నాయి.

$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \ \lambda_2 = 2$ లకు దత్త వృత్తాలు ఒకే గోళం మీద ఉంటాయి.

దత్త వృత్తం గుండా పోయే గోళ సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4y + 3z + 2(x - y + 2z - 4) = 0 \qquad (\lambda_2 = 2)$$

i.e., $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 6y + 7z - 8 = 0$

4.9 సారాంశము:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత విద్యార్థికి గోళము, గోళ సమీకరణము, గోళము యొక్క సమతల ఛేదనము, రెండు గోళాల ఛేదనము మొదలైన భావనల గురించి స్పష్టమైన అవగాహన కలిగి, గోళంతో ఒక సమతలము ఒకటి గాని, ఎక్కువ గాని బిందువులలో ఛేదనము కలిగి యున్నప్పుడు పరిస్థితిని ఆకళింపు చేసుకోకలిగి ఉండాలి.

4.10 సాంకేతిక పదాలు:

సమతల ఛేదనం

గురు వృత్తము

లఘు వృత్తము

గోళ వ్యాసము

గోళ వ్యాసార్థము

గోళ కేంద్రము

4.11 అభ్యాసములు:

1. క్రింది బిందువుల గుండాపోయే గోళం సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

   (i) $(0,0,0), \ (0,1,-1), (-1,2,0), (1,2,3)$

   (ii) $(4,-1,2), \ (0,-2,3), (1,5,-1), (2,0,1)$

   (iii) $(0,0,0), \ (-a,b,c), (a,-b,c), \ (a,b,-c)$

2. క్రింది బిందువుల గుండా పోయే గోళం సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

   (i) $(1,-4,3), \ (1,-5,2), \ (1,-3,0)$ మరియు కేంద్రము తలం $x + y + z = 0$ పై ఉండును.

   (ii) $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ మరియు వీలైనంత తక్కువ వ్యాసార్థం కలిగినవి.

   (iii) $(0,-2,-4), \ (2,-1,-1)$ మరియు కేంద్రము $2x - 3y = 0 = 5y + 2z$ సరళరేఖ పై ఉండును.

3. ఈ క్రింది బిందువులు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళం సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

(i) $(2,3,-1),\ (1,-2,-1)$

(ii) $(1,2,3),\ (2,3,4)$

(iii) $(1,-2,3),\ (-2,3,-1)$

4. $x^2+y^2+z^2=9,\ 2x+3y+4z=5$ వృత్తం గుండా మరియు $(1,2,3)$ బిందువు గుండా పోయే గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

5. క్రింది గోళాల కేంద్రాన్ని, వ్యాసార్థాన్ని కనుక్కోండి.

(i) $x^2+y^2+z^2=25,\ \ 2x+y+2z=9$

(ii) $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z-19=0,\ x+2y+2z+7=0$

6. క్రింది ఛేదక వృత్తాలు గురు వృత్తాలుగా గల గోళ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

(i) $x^2+y^2+z^2-4x+16y-8z+4=0,\ x+y+z=3$

(ii) $x^2+y^2+z^2+10y-4z=8,\ x+y+z=3$

7. తలం $x+2y+2z=15$ గోళం $x^2+y^2+z^2-2y-4z-11=0$ ను ఖండించుకొనును అని చూపండి. ఆ వృత్త కేంద్రము మరియు వ్యాసార్థములను కనుగొనుము.

8. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ తలమునకు సమాంతరముగా ఉండే చల తలం అక్షములను A, B, C వద్ద తాకిన A, B, C ల గుండా పోయే వృత్తం $yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$ శంకం పై ఉండునని చూపుము.

9. ఈ క్రింది వృతాత్తులు ఒకే గోళం పై ఉంటాయని చూపి, ఆ గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

$$x^2+y^2+z^2-y+2z=0,\quad x-y+z-2=0 \qquad \text{మరియు}$$

$$x^2+y^2+z^2+x-3y+z-5=0,\quad 2x-y+4z-1=0$$

4.12 జవాబులు:

1. (i) $7\left(x^2+y^2+z^2\right)-15x-25y-11z=0$

   (ii) $x^2+y^2+z^2-4x-14y-22z+25=0$

   (iii) $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$

2. (i) $x^2+y^2+z^2-4x+7y-3z+15=0$

   (ii) $3\left(x^2+y^2+z^2\right)-2(x+y+z)=1$

   (iii) $x^2+y^2+z^2-6x-4y+10z+12=0$

3. (i) $x^2+y^2+z^2-3x-y+2z-3=0$

   (ii) $x^2+y^2+z^2-3x-5y-7z+20=0$

   (iii) $x^2+y^2+z^2+x-y-2z-11=0$

4. $3\left(x^2+y^2+z^2\right)-2x-3y-4z-22=0$

5. (i) $(2,1,2)$, 4

   (ii) $\left(\frac{-7}{3},\frac{-5}{3},\frac{-2}{3}\right)$, 3

6. (i) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+4=0$

   (ii)

7. $(1,3,4)$, $\sqrt{7}$, $x^2+y^2+z^2-2x-6y-8z+19=0$

4.13 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. గోళము, గోళ కేంద్రము మరియు వ్యాసార్థమును నిర్వచింపుము.

2. (x_1, y_1, z_1) కేంద్రం గాను $a > 0$ వ్యాసార్థంగా గల గోళ సమీకరణం

   $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=a^2$ అని చూపుము.

3. ఈ క్రింది బిందువులు గుండాపోయే గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

$$(0,0,0),\ (-a,b,c),\ (a,-b,c),\ (a,b,-c)$$

4. గోళ సమతల ఛేదనం వృత్తం అని చూపుము.

5. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$లు వ్యాసాగ్రాలుగా గల గోళ సమీకరణం

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$ అని చూపండి.

4.13 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: $x^2+y^2+z^2-y+2z=0,\ x-y+z=2 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (1)$

$x^2+y^2+z^2+x-3y+z-5=0,\ 2x-y+4z-1=0 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (2)$

వృత్తాలు ఒక గోళం పై ఉంటాయని చూపి ఆ గోళ సమీకరణం కనుక్కోండి.

AIM: దత్త వృత్తాలు ఒకే గోళం పై ఉంటాయని చూపి, ఆ గోళ సమీకరణం కనుక్కోవడం.

నిర్వచనాలు మరియు సిద్ధాంతాలు:

(1) ఒక గోళం, ఒక తలం ల ఉమ్మడి బిందువుల సమితిని గోళపు సమతల ఛేదనం అంటాం.

(2) గోళపు సమతల ఛేదనం వృత్తము లేక శూన్యము.

(3) $S=0$ గోళాన్ని $U=0$ తలం 'C' అనే వృత్తంలో ఖండిస్తే λ అన్ని విలువలకు $S+\lambda U=0$ సమీకరణం 'C' వృత్తాన్ని కలిగి ఉండే గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

సాధన: మొదటి వృత్తం గుండా పోయే గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2-y+2z+\lambda(x-y+z-2)=0$$

i.e., $x^2+y^2+z^2+\lambda x-(1+\lambda)y+(\lambda+2)z-2\lambda=0 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (3)$

రెండో వృత్తం గుండాపోయే గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2+x-3y+z-5+\mu(2x-y+4z-1)=0$$

i.e., $x^2+y^2+z^2+(2\mu+1)x-(3+\mu)y+(4\mu+1)z-5-\mu=0 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (4)$

కాని రెండు వృత్తాలు ఒకే గోళం పై ఉండాలి అంటే (1), (2)లు ఒకే గోళాన్ని సూచించాలి.

కాబట్టి λ, μ లు కింది సంబంధాలను పాటించాలి.

$$\lambda = 2\mu + 1 \text{ i.e. } \lambda - 2\mu - 1 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (i)$$

$$\lambda + 1 = 3 + \mu \text{ i.e. } \lambda - \mu - 2 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (ii)$$

$$\lambda + 2 = 4\mu + 1 \text{ i.e. } \lambda - 4\mu + = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (iii)$$

$$-2\lambda = -\mu - 5 \text{ i.e. } 2\lambda - \mu - 5 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (iv)$$

(iii), (iv) ల నుంచి $\lambda = 3, \ \mu = 1$

ఇది (i), (ii) లను కూడ తృప్తి పరుస్తాయి.

$\therefore$ కావలసిన గోళ సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4y + 5z - 6 = 0$$

పాఠ్యభాగ రచయిత

డా॥ B. రామి రెడ్డి

పాఠము - 5

గోళము - 2 స్పర్శ రేఖీయత మరియు సంయుగ్మత

5.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత విద్యార్థులు

- గోళం దృష్ట్యా బిందువు స్థితి
- గోళానికి స్పర్శ రేఖ మరియు స్పర్శ తలం
- గోళం దృష్ట్యా బిందువు యొక్క బిందు శక్తిల గురించి అవగాహన చేసుకుంటారు.

5.2 పాఠ్యాంశాలక్రమము:-

ఈ పాఠంలో క్రింది భాగాలు ఉన్నవి.

5.3 ఉపోద్ఘాతము:

నాల్గవ పాఠంలో ప్రారంభించిన గోళం గురించి చర్చ ఈ పాఠంలో కొనసాగిస్తాము. ఇక్కడ స్పర్శ రేఖలు, స్పర్శ తలాలు, స్పర్శ బిందు తలం, ధ్రువము, ధ్రువ తలముల పై కేంద్రీకరిస్తూ రెండు గోళాలు పరస్పరం స్పృశించుకోవడానికి కావలసిన నియమాల గురించి కూడ చర్చిస్తాము.

5.3.1 సంకేతాలు: క్రింది సంకేతాలను ఈ పాఠములో వాడతాం.

$$S \equiv S(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d$$

$$S_i \equiv xx_i + yy_i + zz_i + zu(x + x_i) + 2v(y + y_i) + 2w(z + z_i) + d$$

$$S_{11} \equiv S(x_1, y_1, z_1) \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d$$

$$S_{ij} \equiv x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j + 2u(x_i + x_j) + 2v(y_i + y_j) + 2w(z_i + z_j) + d$$

$$\bar{r} = (x,y,z), \quad F(\bar{r}) = S = S(x,y,z)$$

$$F(\bar{r}) = |\bar{r} - \bar{c}|^2 - a^2 = |\bar{r}|^2 - 2(\bar{r} \cdot \bar{c}) + |\bar{c}|^2 - a^2$$

ఇక్కడ $\bar{c} = (u\ v\ w)$

5.4 గోళం, రేఖల ఛేదనం (Intersection of a sphere and a line):

5.4.1 సిద్ధాంతము: $F(\bar{r}) = 0$ సమీకరణంగా గల గోళం S కేంద్రం $C(\bar{c})$ మరియు యూనిట్ సదిశ $\bar{b}$కు సమాంతరంగా స్థిర బిందువు $D(\bar{d})$ గుండాపోయే సరళరేఖ L అనుకొనుము.

(i) $\left|\bar{b}(\bar{c} - \bar{d})\right| > \sqrt{F(\bar{d})}$ అయితే రేఖ L గోళము Sను రెండు విభిన్న బిందువులలో ఖండిస్తుంది.

(ii) $\left|\bar{b} \cdot (\bar{c} - \bar{d})\right| = \sqrt{F(\bar{d})}$ అయితే రేఖ L గోళము Sను స్పృశిస్తుంది.

(iii) $\left|\bar{b} \cdot (\bar{c} - \bar{d})\right| < \sqrt{F(\bar{d})}$ అయితే రేఖ L గోళము Sలకు ఉమ్మడి బిందువులు ఉండవు.

ఉపపత్తి: గోళము S వ్యాసార్థము $a(\geq 0)$ అనుకొనుము. అప్పుడు గోళం S యొక్క సదిశా సమీకరణం

$$F(\bar{r}) = |\bar{r}|^2 - 2\bar{r} \cdot \bar{c} + |\bar{c}|^2 - a^2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$ అగును.

యూనిట్ సదిశ $\bar{b}$కు సమాంతరంగా స్థిర బిందువు $D(\bar{d})$ గుండాపోయే సరళరేఖ

$\bar{r} = \bar{d} + t\bar{b} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$ అనుకొనుము.

(1) మరియు (2)లు $\bar{r} = \bar{d} + t\bar{b}$ వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

$$\Leftrightarrow \left|\left(\bar{d}+t\bar{b}\right)\right|^2 - 2\left(\bar{d}+t\bar{b}\right)\cdot\bar{c} + \left|\bar{c}\right|^2 - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)\right] + F\left(\bar{d}\right) = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

(3) t లో వర్గ సమీకరణం కావడం వల్ల 't'కి రెండు మూలాలు t_1, t_2 లుంటాయి.

కాని సమీకరణం (3) యొక్క విచక్షిణి (Diseriminent) $\left|\bar{b}\cdot\left(\bar{c}-\bar{d}\right)\right|^2 - F\left(\bar{d}\right)$

సందర్భం(i): $\left|\bar{b}\cdot\left(\bar{c}-\bar{d}\right)\right|^2 \geq F\left(\bar{d}\right) \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$ అయితే t_1, t_2లు వాస్తవాలు

ఈ సందర్భంలో సమీకరణం (3) యొక్క వాస్తవ మూలాలు t_1, t_2లకు సంబంధించి $P = \bar{d}+t_1\bar{d}, \quad Q = \bar{d}+t_2\bar{b}$లు దత్త గోళమునకు D బిందువు గుండాపోతూ $\bar{b}$కు సమాంతరముగా గీసిన రేఖకు ఉమ్మడి బిందువులు P, Qలు. అప్పుడు $DP\cdot DQ = \left|t_1t_2\right| = \left|F\left(\bar{d}\right)\right| =$ స్థిర సంఖ్య $\quad \cdot \cdot \cdot \quad (5)$ ($\bar{b}$తో సంబంధం లేకపోవడం వల్ల)

సందర్భం (ii): $\left|\bar{b}\cdot\left(\bar{c}-\bar{d}\right)\right|^2 = F\left(\bar{d}\right)$ అయితే $t_1 = t_2$ మరియు $\bar{d}+t_1\bar{b}$ ఒక్కటే, దత్త గోళము, దత్త రేఖల ఉమ్మడి బిందువు.

అప్పుడు (3) నుండి $\quad DP^2 = t_1t_2 = \left|F\left(\bar{d}\right)\right| \Rightarrow t_1^2 = \left|F\left(\bar{d}\right)\right|$

$$\Rightarrow DP = t_1 = t_2 = \sqrt{F\left(\bar{d}\right)}$$

ఇంకను $\left|\bar{b}\cdot\left(\bar{c}-\bar{d}\right)\right|^2 = F\left(\bar{d}\right)$ అని వస్తుంది.

సందర్భం (iii): $\left|\bar{b}\cdot\left(\bar{c}-\bar{d}\right)\right|^2 < F\left(\bar{d}\right)$ అయితే t_1, t_2 సంకీర్ణ సంఖ్యలు. ఈ సందర్భంలో దత్త గోళం S, దత్త రేఖ L లకు ఉమ్మడి బిందువులు ఉండవు.

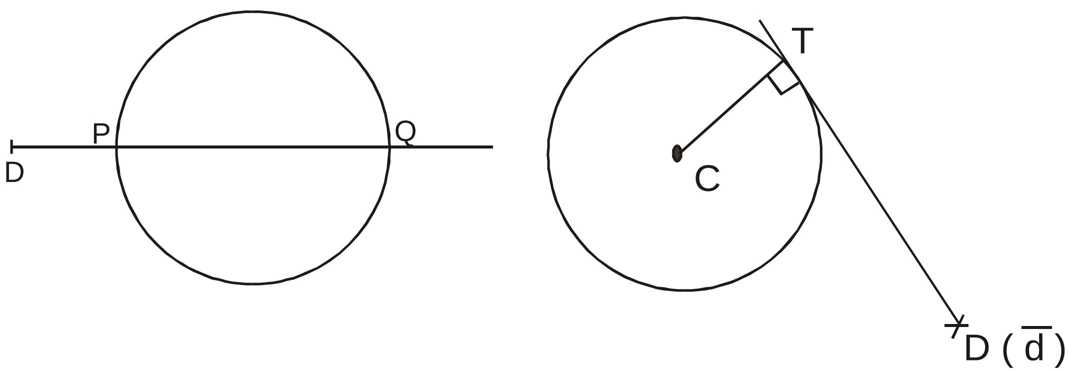
5.4.2 గమనిక:

(1) D బిందువు గోళం పై ఉండే $F(\bar{d}) = 0$ అగును మరియు $\bar{b}.(\bar{c} - \bar{d}) = 0$.

i.e. CD దత్త రేఖకు లంబంగా ఉండును.

(2) D గుండాపోయే దత్త రేఖ గోళం Sను, P, Qలలో ఖండించిన $DP \cdot DQ = |F(\bar{d})|$.

5.4.3 నిర్వచనం: D అనే స్థిర బిందువు నుంచి $S = F(\bar{r}) = 0$ దత్త గోళానికి గీసిన ఛేదన రేఖ ఆ గోళాన్ని P, Qల వద్ద ఖండిస్తే (క్రింది పటం చూడండి) $DP \cdot DQ =$స్థిరం. ఈ స్థిర విలువను $S = 0$ గోళం దృష్ట్యా D యొక్క బిందుశక్తి అంటాం.



పటం - 1 **పటం - 2**

5.4.4 స్పర్శ రేఖ: $\bar{d}$ స్థాన సదిశగా గల D బిందువు గుండాపోయే ఒక రేఖకు దత్త గోళంతో ఒక్కటే ఉమ్మడి బిందువు T ఉంటే $\overleftrightarrow{DT}$ ని దత్త గోళానికి D నుండి స్పర్శ రేఖ అని, T ని స్పర్శ బిందువని, $\overleftrightarrow{DT}$ రేఖ గోళాన్ని T వద్ద స్పృశిస్తుందనీ అంటాము. (పటం - 2)

5.4.5 Note: DT రేఖ C కేంద్రంగా గల గోళాన్ని T వద్ద స్పృశిస్తే

(i) $\overline{CT} \perp \overline{DT}$

(ii) DT రేఖ గోళఆన్ని T వద్ద స్పృశిస్తూ D గుండాపోయే ఇంకో రేఖ గోళాన్ని P, Qల వద్ద ఖండించిన $DT^2 = DP \cdot DQ$.

5.4.6 నిర్వచనం: $a(>0)$ వ్యాసార్థం అయితే S గోళానికి C కేంద్రము,

(i) $DC > a$ అయినప్పుడు D ని Sకు బాహ్య బిందువని అంటాము.

(ii) $DC < a$ అయినప్పుడు D ని Sకు అంతర బిందువని అంటాము.

5.4.7 S.A.Q.: P, Q లు గోళము పై బిందువులైతే PQ రేఖా ఖండం పై P, Q ల మధ్య బిందువులన్నీ గోళానికి అంతర బిందువులు.

5.4.8 Note: D స్థాన సదిశ $\bar{d}$ అనుకుంటే, $\bar{c}$ స్థాన సదిశగా గల $|C|$ కేంద్రంగాను, $a(\geq 0)$ వ్యాసార్ధం గాను $F(\bar{r})=0$ 1 ను సమీకరణంగా గల S గోళానికి

(i) D గోళ బాహ్యము $\Leftrightarrow DC > a \Leftrightarrow |\bar{c}-\bar{d}| > a \Leftrightarrow |\bar{d}-\bar{c}|^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow F(\bar{d}) > 0$ i.e. $S_{11} > 0$

$\Leftrightarrow$ D యొక్క బిందుశక్తి ధనాత్మకము.

(ii) D గోళ అంతర బిందువు $\Leftrightarrow F(\bar{d}) < 0$ or $S_{11} < 0 \Leftrightarrow$ D యొక్క బిందు శక్తి ఋణాత్మకము.

(iii) D గోళం పై బిందువు $\Leftrightarrow F(\bar{d}) = 0$ i.e. $S_{11} = 0 \Leftrightarrow$ D యొక్క బిందు శక్తి శూన్యము.

(2) If $\bar{c} = (-u,-v,-w)$, $a = \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$, $\bar{d} = (x_1, y_1, z_1)$ అనుకుంటే

$F(\bar{d}) = S = x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ గోళం S సమీకరణం అగును.

(i) D బాహ్య బిందువు $\Leftrightarrow F(\bar{d}) > 0 \Leftrightarrow S_{11} > 0 \Leftrightarrow$ D యొక్క బిందు శక్తి ధనాత్మకము.

(ii) D అంతర బిందువు $\Leftrightarrow F(\bar{d}) < 0 \Leftrightarrow S_{11} < 0 \Leftrightarrow$ D యొక్క బిందు శక్తి ఋణాత్మకము.

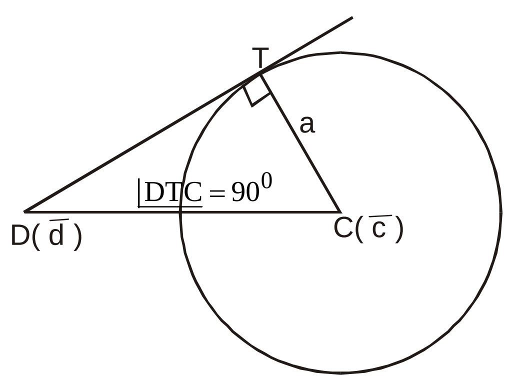
(iii) D గోళం పై ఉన్నది $\Leftrightarrow F(\bar{d}) = 0 \Leftrightarrow S_{11} = 0 \Leftrightarrow$ D యొక్క బిందుశక్తి శూన్యము.

5.4.9 S.A.Q.: ప్రతి బాహ్య బిందువు నుండి గోళానికి స్పర్శ రేఖ ఉంటుంది.

5.4.10 S.A.Q.: గోళానికి అంతర బిందువు గుండా పోయే స్పర్శ రేఖలుండవు.

సిద్ధాంతము: $F(\bar{r}) = |\bar{r}-\bar{c}|^2 - a^2 = 0$ సమీకరణంగా గల గోళానికి $D(\bar{d})$ నుంచి గీసిన స్పర్శ రేఖ పొడవు $\sqrt{F(\bar{d})}$.

ఉపపత్తి: గోళ కేంద్రం $C(\bar{c})$ మరియు వ్యాసార్థము a కావున



(T వద్ద గోళాన్ని స్పృశించే రేఖ పై D ఒక బిందువైతే DT ని D నుండి గోళానికి స్పర్శ రేఖ పొడవు అంటాము)

గోళానికి D నుండి గీసిన స్పర్శరేఖ DT అయితే $\underline{|DTC} = 90^0$ మరియు

$$DT^2 = DC^2 - CT^2 = \left|\bar{d} - \bar{a}\right|^2 - a^2 = F\left(\bar{d}\right) > 0$$

$\Rightarrow$ $D\left(\bar{d}\right)$ నుండి గోళమునకు స్పర్శ రేఖ పొడవు

$$\boxed{DT = \sqrt{F\left(\bar{d}\right)}}$$

Note: గోళం $f\left(\bar{r}\right) = S = x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ అని తెలుసు.

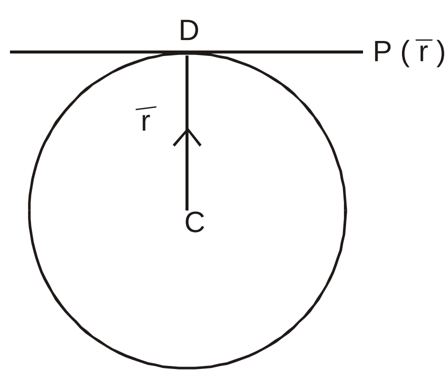
$D = \bar{d} = \left(x_1,\, y_1,\, z_1\right)$ అనుకుందాం. $\bar{r} = \left(x, y, z\right)$ అనుకుంటే స్పర్శరేఖ పొడవు

$$\boxed{DT = \sqrt{F\left(\bar{r}\right)} = \sqrt{S\left(x_1,\, y_1, z_1\right)} = \sqrt{S_{11}}}$$

5.5 గోళము యొక్క స్పర్శ తలము:

5.5.1 సిద్ధాంతము: శూన్యేతర వ్యాసార్థం గల గోళం మీద ఉన్న బిందువు వద్ద ఉండే స్పర్శ రేఖలన్నీ ఒక తలాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

ఉపపత్తి: $\bar{c}$ స్థాన సదిశగా గల C బిందువు కేంద్రంగా గల గోళపు సమీకరణం $F\left(\bar{r}\right) = \left|\bar{r}\right|^2 - 2\bar{r}\cdot\bar{c} + \left|\bar{c}\right|^2 - a^2 = 0$ అనుకుందాం.



$\bar{d}$ స్థాన సదిశగా గల D బిందువు గోళము పై ఉన్నదనుకొందాము. అప్పుడు $F\left(\bar{d}\right) = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$ అగును.

D గుండాపోతూ యూనిట్ సదిశ $\bar{b}$కు సమాంతరముగా ఉండే L సరళరేఖ పై ప్రతి బిందువు స్థాన సదిశ $\bar{d}+t\,\bar{b}$ అనే రూపంలో ఉంటుంది.

ఈ బిందువు $\bar{d}+t\,\bar{b}$ దత్త గోళం పై ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow \left|\bar{d}+t\,\bar{b}\right|^2 - 2\left(\bar{d}+t\,\bar{b}\right)\cdot\bar{c}+\left|\bar{c}\right|^2 - a^2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}-\bar{d}\right)\right]+F\left(\bar{d}\right)=0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}-\bar{d}\right)\right]=0$ ((1) నుండి)

$\Leftrightarrow t^2=0$ ($\bar{b}\perp\overline{CD}\Rightarrow \bar{b}\cdot\left(\bar{c}-\bar{d}\right)=0$ కావున)

$\Leftrightarrow t=0$

$\Leftrightarrow$ దత్త గోళమునకు L రేఖకు $D\left(\bar{d}\right)$ ఒక్కటే ఉమ్మడి బిందువు.

$\Leftrightarrow$ L రేఖ దత్త గోళాన్ని D వద్ద స్పృశిస్తుంది.

$\therefore$ L రేఖ D వద్ద దత్త గోళానికి స్పర్శరేఖ.

$D\in L$ మరియు $CD\perp L$

$\therefore D$ వద్ద స్పర్శరేఖలన్ని D గుండాపోతూ CD అభిలంబ రేఖగా గల తలాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

5.5.2 **నిర్వచనము:** శూన్యేతర వ్యాసార్థం గల S గోళాన్ని 'D' వద్ద స్పృశించే రేఖలన్ని ఏర్పరచే తలాన్ని Sకి D వద్ద స్పర్శ తలమని, ఈ స్పర్శ తలం గోళాన్ని D వద్ద స్పృశిస్తుందనీ అంటాము.

5.5.3 **గమనిక:**

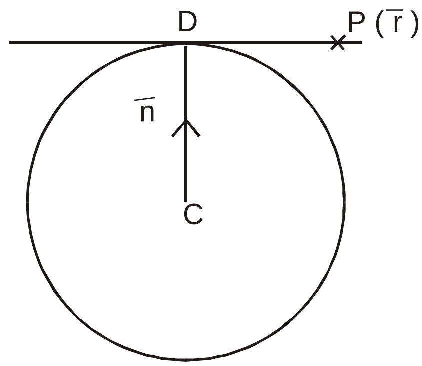
(1) D వద్ద గోళానికి గీసిన స్పర్శతలము CDకి లంబంగా ఉంటుంది..

(2) S గోళానికి D బిందువు వద్ద గల స్పర్శ తలానికి, అభిలంబముగా D నుండి గీసిన రేఖ గోళ కేంద్రం గుండా పోతుంది.

5.5.4 **S.A.Q.:** గోళ స్పర్శ తలంలో స్పర్శ బిందువు తప్ప మిగతా బిందువులన్నీ గోళానికి బాహ్య బిందువులు.

5.5.5 **సిద్ధాంతము:** $S\equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ గోళానికి $D\left(x_1, y_1, z_1\right)$ బిందువు వద్ద స్పర్శ తలం సమీకరణం $S_1=0$

ఉపపత్తి: $S=0$ గోళానికి $C\left(\bar{c}\right)$ కేంద్రము మరియు $a(>0)$ వ్యాసార్థము అనుకొనుము.



అప్పుడు $C = \bar{c} = (-u, -v, -w)$

$\overline{CD}$ దిశలో $\bar{n}$ ఒక యూనిట్ సదిశ అనుకొనుము. అప్పుడు

$$\bar{n} = \frac{\overline{CD}}{|\overline{CD}|} = \left(\frac{x_1+u}{e}, \frac{y_1+v}{e}, \frac{z_1+w}{e}\right) \text{ ఇచ్చట } e = |\overline{CD}| = \sqrt{(x_1+u)^2 + (y_1+v)^2 + (z_1+w)^2}$$

$\bar{r}(x, y, z)$ బిందువు స్పర్శ తలంపై ఉన్నది.

$$\Leftrightarrow (\bar{r} - \bar{d}) \cdot \bar{n} = 0 \quad \Leftrightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot \left(\frac{x_1+u}{e}, \frac{y_1+v}{e}, \frac{z_1+w}{e}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1)(x_1 + u) + (y - y_1)(y_1 + v) + (z - z_1)(z + w) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; xx_1 + yy_1 + zz_1 + u(x + x_1) + v(y + y_1) + z(z + z_1) + d - \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; S_1 - S_{11} = 0$$

$\Leftrightarrow S_1 = 0$ ($D(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు గోళం పై ఉన్నది కావున $S_{11} = 0$)

5.5.6 సిద్ధాంతము: $\ell x + my + nz = p \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

తలం గోళం

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

ను స్పృశిస్తుంది.

$$\Leftrightarrow \; (\ell u + mv + nw + p)^2 = \left(\ell^2 + m^2 + n^2\right)\left(u^2 + v^2 + w^2 - d\right)$$

ఉపపత్తి: (2) యొక్క కేంద్రం $(-u,-v,-w)$ మరియు వ్యాసార్థం $r=\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ తలం (1), గోళం (2)ను స్పృశిస్తుంది $\Leftrightarrow$ గోళము కేంద్రము నుంచి స్పర్శ తలానికి లంబదూరం గోళ వ్యాసార్థానికి సమానము.

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-\ell u - mv - nw - p}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}\right| = \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$$

i.e., $(\ell u + mv + nw - p)^2 = \left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left(u^2+v^2+w^2-d\right)$

ఇదియే కావలసిన నియమము.

5.6 స్పృశించుకొనే గోళాలు:

5.6.1 నిర్వచనము: రెండు గోళాలు $S=0, S^1=0$ లకు ఒక్కటే ఉమ్మడి బిందువు P ఉంటే వాటిని ఆ ఉమ్మడి బిందువు P వద్ద స్పృశించుకొనే గోళాలని, ఉమ్మడి బిందువును ఉమ్మడి స్పర్శ బిందువని అంటాము.

5.6.2 సిద్ధాంతము: $S=0, S^1=0$ లు శూన్యేతర వ్యాసార్థములుగా గల గోళాలైతే $S=0, S^1=0$లు P వద్ద స్పృశించుకుంటాయి. $\Leftrightarrow S=0, S^1=0$ ఉమ్మడి బిందువు P వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శ తలం $S-S^1=0$ ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: $S \equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

$S^1 \equiv x^2+y^2+z^2+2u^1x+2v^1y+2w^1z+d^1=0$

గోళాలు P వద్ద స్పృశించుకుంటాయని అనుకొనుము.

$u \neq u^1$ or $v \neq v^1$ or $w \neq w^1$ కావున

$S-S^1 = 2\left(u-u^1\right)x + 2\left(v-v^1\right)y + 2\left(w-w^1\right)z + d - d^1 = 0$

సమీకరణం π అనే ఒక తలాన్ని సూచిస్తుంది.

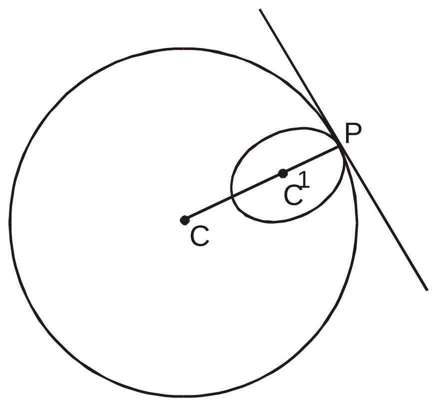
$\therefore \{P\} = \left\{q/q \in S \cap S^1\right\} = \{q/q \in S,\ q \in \pi\} = \left\{q/q \in S^1,\ q \in \pi\right\}$

$\therefore$ π తలము $S=0$ గోళాన్ని P వద్ద స్పృశిస్తుంది. ఇదే విధంగా π తలము $S^1=0$ గోళాన్ని P వద్ద స్పృశిస్తుంది.

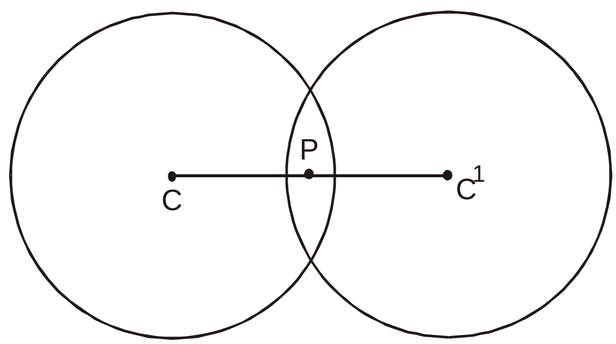
$\therefore$ $S=0, S^1=0$ లకు π తలము P వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శ తలము.

5.6.3 నిర్వచనము: C, C^1 లు కేంద్రాలు $r, r^1 (>0)$ లు వ్యాసార్థాలుగా గల $S = 0, S^1 = 0$ గోళాలకు P వద్ద π ఉమ్మడి స్పర్శ తలం అయితే

(i) C, C^1 లు π తలమునకు ఒకే వైపున ఉండే $S = 0, S^1 = 0$ గోళాలు అంతరముగా స్పృశించుకుంటాయి.



(ii) C, C^1 లు π తలమును చెరొకవైపునా ఉండే $S = 0, S^1 = 0$ గోళాలు బాహ్యముగా స్పృశించుకుంటాయి.



స్పృశించుకొనే గోళాలకు నియమాలు:

5.6.4 సిద్ధాంతము: C, C^1 లు కేంద్రాలు, r, r^1 లు వ్యాసార్థాలుగా గల $S = 0, S^1 = 0$ గోళాలు

(i) అంతరముగా స్పృశించుకుంటాయి $\Leftrightarrow CC^1 = \left|r - r^1\right|$

(ii) బాహ్యముగా స్పృశించుకుంటాయి $\Leftrightarrow CC^1 = r + r^1$.

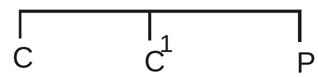
ఉపపత్తి: (i) రెండు గోళాలు P వద్ద అంతరముగా స్పృశించుకుంటాయనుకొందాము.

$S = 0, S^1 = 0$ లకు ఉమ్మడి స్పర్శ తలం π ఉంటుంది.

$\Rightarrow$ C, C^1 ఈ π తలానికి ఒకే వైపున ఉంటాయి.

$\Rightarrow$ C, P, C^1 లు సరేఖీయాలు, C, C^1 లు P కు ఒకే వైపున ఉంటాయి.

$\Rightarrow$ $CC^1 = \left|CP - C^1P\right| = |r_1 - r_2|$



విపర్యయంగా, $r > r^1$, $CC^1 = \left|r - r^1\right| = r - r^1$ అయితే $CP = r, C^1P = r^1$ అయ్యేటట్లు P అనే బిందువు CC^1 కి బాహ్యంగా CC^1 మీద ఉంటుంది.

$CP = r, C^1P = r^1$ కాబట్టి $S = 0, S^1 = 0$ లకు P ఒక ఉమ్మడి బిందువు.

P నుండి CC^1 కి లంబంగా గీసిన తలము π అనుకుందాము.

$CP \perp \pi \Rightarrow S = 0$ గోళానికి π స్పర్శ తలము.

$C^1P \perp \pi \Rightarrow S^1 = 0$ గోళానికి π స్పర్శ తలము.

$\Rightarrow S = 0, S^1 = 0$ గోళాలకు π ఉమ్మడి స్పర్శ తలము అవుతుంది. ఈ π కి C, C^1 లు ఒకే వైపున ఉన్నాయి.

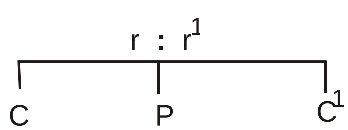
$\Rightarrow S = 0, S^1 = 0$ గోళాలు అంతరముగా స్పృశించుకుంటాయి.

(ii) ఇట్లాగే $S = 0, S^1 = 0$ లు బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి.

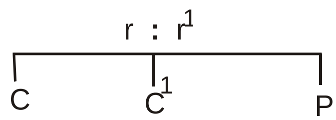
$\Leftrightarrow$ $CC^1 = r + r^1$ అని ఋజువు చేయవచ్చు.

5.6.5 గమనిక:

(i) CC^1 కేంద్రాలు, r, r^1 లు వ్యాసార్థాలుగా గల గోళాలు P వద్ద అంతరముగా స్పృశించుకొంటే CC^1 ని P బాహ్యముగా $r : r^1$ లో విభజిస్తుంది.



(ii) బాహ్యముగా స్పృశించుకొంటే CC^1ని P అంతరముగా $r:r^1$లో విభజిస్తుంది.



5.7 సాధించిన సమస్యలు:

5.7.1 సమస్య: $3\left(x^2+y^2+z^2\right)-2x-3y-4z-22=0$ గోళానికి $(1,2,3)$ వద్ద స్పర్శ తలం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $S=0$ గోళానికి (x_1, y_1, z_1) వద్ద స్పర్శ తల సమీకరణం $S_1=0$

$xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$, ఇక్కడ $(x_1, y_1, z_1)=(1,2,3)$

స్పర్శ తల సమీకరణము

$$3(xx_1+yy_1+zz_1)-(x+x_1)-\frac{3}{2}(y+y_1)-2(z+z_1)-22=0$$

i.e., $$3(x+2y+3z)-(x+1)-\frac{3}{2}(y+2)-2(z+3)-22=0$$

$$\Rightarrow 4x+9y+14z-64=0$$

5.7.2 సమస్య: $x^2+y^2+z^2+5x-7y+2z-8=0,\ 3x-2y+4z+3=0$ వృత్తమునకు $(-3,5,4)$ వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన: దత్త బిందువు వద్ద గోళము యొక్క స్పర్శ తలము, వృత్త తలముల యొక్క ఛేదన రేఖయే స్పర్శరేఖ.

దత్త గోళము $x^2+y^2+z^2+5x-7y+2z-8=0 \quad \cdots \quad (1)$

దత్త వృత్త తలము $3x-2y+4z+3=0 \quad \cdots \quad (2)$

$(-3,5,4)$ వద్ద గోళం (1) యొక్క స్పర్శ తల సమీకరణము $S_1=0$.

i.e., $$x(-3)+y(5)+z(4)+\frac{5}{2}(x-3)-\frac{7}{2}(y+5)+(z+4)-8=0$$

$$\Rightarrow x-3y-10z+58=0 \quad \cdots \quad (3)$$

$(-3,5,4)$ వద్ద వృత్త స్పర్శ రేఖ సమీకరణాలు (2) మరియు (3).

సౌష్ఠవ రూపములో స్పర్శరేఖ: a, b, c లు స్పర్శరేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు అనుకొనుము. అప్పుడు

$$3a-2b+4c=0$$

$$a-3b-10c=0$$

సాధించగా $\dfrac{a}{32}=\dfrac{b}{34}=\dfrac{c}{-7}$ వచ్చును.

$(-3, 5, 4)$ వద్ద వృత్త స్పర్శరేఖా సమీకరణము $\dfrac{x+3}{32}=\dfrac{y-5}{34}=\dfrac{z-4}{-7}$

5.7.3 **సమస్య:** $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$ గోళమును $x+y+z=a\sqrt{3}$ తలం స్పృశించిన a విలువను కనుగొనుము.

సాధన: దత్త గోళ కేంద్రము $(1,1,1)$ మరియు వ్యాసార్థము $r=\sqrt{1+1+1+6}=3$

దత్త తలము దత్త గోళాన్ని స్పృశిస్తుంది.

$\Leftrightarrow$ గోళ కేంద్రము $(1,1,1)$ బిందువు నుండి తలం $x+y+z=a\sqrt{3}$ కు గల లంబదూరం గోళ వ్యాసార్థానికి సమానము.

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1+1+1-a\sqrt{3}}{\sqrt{1+1+1}}\right|=3$$

$$\Leftrightarrow 3-a\sqrt{3}=\pm 3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a=\sqrt{3}\pm 3.$$

5.7.4 **సమస్య:** $2x-2y+z+12=0$ తలం

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=3 \quad \cdots \quad (1)$$

గోళాన్ని స్పృశిస్తుందని చూపుము.

సాధన: దత్త తలం $2x-2y+z+12=0 \quad \cdots \quad (2)$

దత్త గోళం (1) యొక్క కేంద్రము $(1, 2, -1)$ మరియు వ్యాసార్థము $r=\sqrt{1+4+1+3}=3$

గోళ కేంద్రం $(1, 2, -1)$ నుండి తలం (2)కు లంబదూరము

$$= \left| \frac{2(1)-2(2)+(-1)+12}{\sqrt{4+4+1}} \right| = \frac{9}{3} = 3 = \text{ వ్యాసార్థము}$$

$\therefore$ తలం (2) గోళం (1)ని స్పృశిస్తుంది.

5.7.5 **సమస్య:** ఏ బిందువుల వద్ద స్పర్శ తలాలు $x^2+y^2+z^2-4x+2y=4 \cdots (1)$ గోళానికి ఏ బిందువుల వద్ద స్పర్శ తలాలు $2x-y+2z=1 \cdots (2)$ తలానికి సమాంతరముగా ఉంటాయి.

సాధన: (1) యొక్క కేంద్రము $C=(2,-1,0)$, వ్యాసార్థము $r=\sqrt{4+1+4}=3$

తలము (2)కు సమాంతరంగా ఉండే తలము

$$2x-y+2z+k=0 \cdots (3) \text{ అనుకొనుము.}$$

తలం (3), గోళము (1)కి స్పర్శ తలము $\Leftrightarrow$ గోళ కేంద్రము నుండి తలము (3)కు గల లంబ దూరము గోళ వ్యాసార్థమునకు సమానము.

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2(2)-(-1)+2(0)+k}{\sqrt{4+1+4}} \right| = 3 \Rightarrow k = \pm 9-5 = 4, -14$$

కేంద్రము $(2,-1,0)$ గుండాపోతూ తలము (3)కు లంబంగా ఉండే రేఖా సమీకరణాలు

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2} = s \quad \text{(అనుకొనుము)}$$

పై రేఖ పై ఏదైనా బిందువు $(2r+2, -r-1, 2r)$

ఈ బిందువు, తలము (3) గోళము (1) ల స్పర్శ బిందువైతే $(2r+2, -r-1, 2r)$ బిందువు తలము (3) పై ఉండును.

i.e., $2(2r+2)-(-2r-1)+2(2r)+k=0$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{-5-k}{9} = \frac{-5-4}{9}, \quad \frac{-5+14}{9} \qquad (\because k=4, -14)$$

$$r = -1, 1$$

గోళము (1) తలము (3)ల స్పర్శ బిందువులు

$$(2(-1)+2, -(-1)-1, (-1)), \ (2(1)+2, -1-1, 2(1))$$

$$= (0,0,-2), \quad (4,-2,2)$$

5.7.6 సమస్య: $4\left(x^2+y^2+z^2\right)+10x-25y-2z=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

గోళాన్ని $(1,2,-2)$ వద్ద స్పృశిస్తూ $(-1, 0, 0)$ బిందువు గుండాపోయే గోళం సమీకరణం

$x^2+y^2+z^2+2z-6y+1=0$ అని చూపండి.

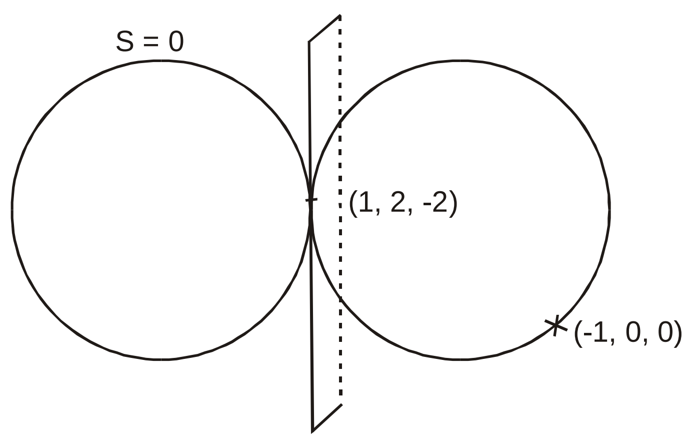
ఉపపత్తి:

కావలసిన గోళ సమీకరణం

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$ అనుకొందాం.

ఇది $(-1, 0, 0)$ బిందువు గుండాపోతుంది కావున $1-2u+d=0 \Rightarrow \boxed{d=2u-1}$

$(1,2,-2)$ బిందువు వద్ద గోళం (2) యొక్క స్పర్శ తల సమీకరణము



$$x+2y-2z+u(x+1)+v(y+2)+w(z-2)+d=0$$

$$\Rightarrow (1+u)x+(2+v)y+(-2+w)z+3u+2v-2w-1=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3) \qquad (\because d=2u-1)$$

$(1,2,-2)$ బిందువు వద్ద గోళం (1) యొక్క స్పర్శ తల సమీకరణం

$$4(x+2y-2z)+5(x+1)-\frac{25}{2}(y+2)-(z-2)=0$$

$$\Rightarrow 2x-y-2z-4=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

$(1,2,-2)$ బిందువు వద్ద రెండు గోళాలు స్పృశించుకుంటున్నాయి కావున

(3), (4) సమీకరణాలు ఒకే తలమును సూచిస్తాయి.

$$\frac{1+u}{2}=\frac{2+v}{-1}=\frac{-2+w}{-2}=\frac{3u+2v-2w-1}{-4}=r \text{ (అనుకొనుము)}$$

$$\Rightarrow u=2r-1,\ v=-r-2,\ w=-2r+2 \text{ మరియు } 3u+2v-2w-1=-4r$$

$$\Rightarrow 3(2r-1)+2(-r-2)-2(-2r+2)-1=-4r$$

$$\Rightarrow 12r-12=0 \Rightarrow r=1$$

$$\therefore\ u=1,\ v=-3,\ w=0,\ d=1$$

కావలసిన గోళ సమీకరణము $x^2+y^2+z^2+2x-6y+1=0$

రెండవ పద్ధతి: దత్త గోళ సమీకరణము

$$S\equiv 4\left(x^2+y^2+z^2\right)+10x-25y-2z=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$(1,2,-2)$ బిందువు వద్ద (1) యొక్క స్పర్శ తల సమీకరణము $S_1=0$

$$\text{i.e. } 4(x+2y-2z)+5(x+1)-\frac{25}{2}(y+2)-(z-2)=0$$

$$\Rightarrow U\equiv 2x-y-2z-4=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$(1,2,-2)$ బిందువు గుండాపోతూ గోళం (1)ని స్పృశించే గోళము యొక్క సమీకరణము

$S+\lambda U=0$ గా ఉండును.

$$\Rightarrow 4\left(x^2+y^2+z^2\right)+10x-25y-2z+\lambda(2x-y-2z-4)=0$$

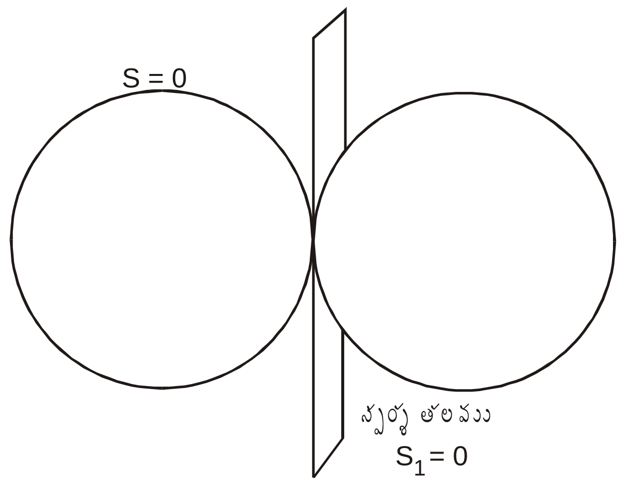
కాని ఈ గోళము $(-1,0,0)$ బిందువు గుండా పోవుచున్నది.

$$\therefore 4-10-2\lambda-4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$4\left(x^2+y^2+z^2\right)+10x-25y-2z-1(2x-y-2z-4)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2x-6y+1=0$$



5.7.7 **సమస్య:** $3(16-x) = 3z = 2y+30 \cdot \cdot \cdot (2)$ రేఖ గుండాపోతూ

$x^2+y^2+z^2+6x-2z+1=0 \cdot \cdot \cdot (1)$ గోళానికి గల రెండు స్పర్శ తల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన: (1) యొక్క కేంద్రము $=(-3,0,1)$ వ్యాసార్థము $r=\sqrt{9+1-1}=3$

తలాల రూపంలో సరళరేఖ (2) యొక్క సమీకరణాలు

$$U_1 \equiv 3(16-x)=3z \Rightarrow U_1 \equiv x+z-16=0$$

$$U_2 \equiv 3z=2y+30 \Rightarrow U_2 \equiv 3z-2y-30=0$$

$U_1=0,\ U_2=0$ తలాల రూపంలోని రేఖ గుండాపోయే తల సమీకరణం

$U_1+\lambda U_2=0$ రూపంలో ఉంటుంది.

i.e., $x+z-16+\lambda(3z-2y-30)=0$

i.e., $x-2\lambda y+(1+3\lambda)z-16-30\lambda=0 \cdot \cdot \cdot (3)$

తలము (3) గోళం (1)కి స్పర్శ తలము కావున కేంద్రం $(-3,0,1)$ నుండి తలం (3)కు గల లంబదూరము, గోళ వ్యాసార్థమునకు సమానము.

i.e., $\left|\dfrac{-3-2\lambda(0)+(1+3\lambda)1-16-30\lambda}{\sqrt{1+4\lambda^2+(1+3\lambda)^2}}\right|=3$

$$\Leftrightarrow \quad 9\left|\frac{3\lambda+2}{\sqrt{\left(3\lambda^2+6\lambda+2\right)}}\right| = 3$$

$$\Leftrightarrow \; 9\left(3\lambda+2\right)^2 = 13\lambda^2+6\lambda+2$$

$$\Leftrightarrow \; 68\lambda^2+102\lambda+34=0 \Rightarrow 2\lambda^2+3\lambda+1=0$$

$$\Leftrightarrow \; \left(2\lambda+1\right)\left(\lambda+1\right)=0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{-1, \frac{-1}{2}\right\}$$

కావలసిన స్పర్శ తలాలు

$x+2y-2z+14=0$ మరియు $2x+2y-z-2=0$

5.7.8 **సమస్య:** $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0, \;\; 2x+y+z=4$ వృత్తం గుండాపోతూ $3x+4y=14$ తలాన్ని స్పృశించే గోళాల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం గుండాపోయే గోళ సమీకరణం $S+\lambda U=0$. $(\lambda \in \mathbb{R})$ రూపంలో ఉండును.

i.e., $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3+\lambda\left(2x+y+z-4\right)=0$

i.e., $x^2+y^2+z^2+\left(-2+2\lambda\right)x+\left(2+\lambda\right)y+\left(4+\lambda\right)z-3-4\lambda=0 \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \quad (1)$

$$\Rightarrow \text{ దీని కేంద్రం } \left(\frac{-\left(-2+2\lambda\right)}{2}, \; \frac{-\left(2+\lambda\right)}{2}, \; \frac{-\left(4+\lambda\right)}{2}\right)$$

మరియు వ్యాసార్థము $\sqrt{\left(\frac{-2+2\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{2+\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{4+\lambda}{2}\right)^2+3+4\lambda}$

$$= \sqrt{\frac{6\lambda^2+20\lambda+36}{4}}$$

$3x+4y+14=0$ తలం గోళం (1)కి స్పర్శ తలము అయితే గోళ కేంద్రం నుండి తలమునకు గల లంబదూరం గోళ వ్యాసార్థానికి సమానము.

$$\left|\frac{-3\left(\frac{-2+2\lambda}{2}\right)-\frac{-4\left(2+\lambda\right)}{2}-14}{\sqrt{9+16}}\right| = \sqrt{\frac{6\lambda^2+20\lambda+36}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-5\lambda-15}{5}\right| = \sqrt{\frac{6\lambda^2+20\lambda+36}{4}}$$

రెండు వైపులా వర్గం చేయగా

$$\Leftrightarrow\ 4\left(\lambda^2+9+6\lambda\right) = 6\lambda^2+20\lambda+36$$

$$\Leftrightarrow\ 2\lambda^2-4\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \lambda\in\{0,2\}$$

λ విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపించిన

$\lambda=0$ కు $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0$

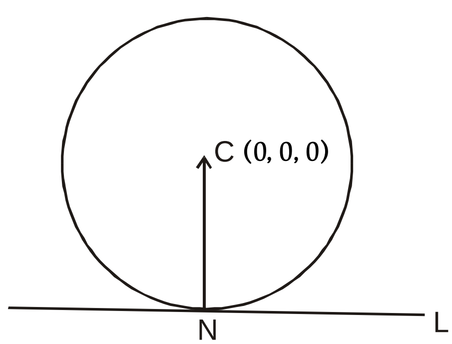
$\lambda=2$ కు $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11=0$ గోళాలు వచ్చును.

5.7.9 **సమస్య:** $2(x+1)=2-y=x+3$ సరళరేఖని స్పృశిస్తూ మూల బిందువు కేంద్రంగా గల గోళ సమీకరణమును కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సరళ రేఖ L

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{x+3}{2}=r \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (1)$$

గోళ కేంద్రం నుండి దత్త రేఖ (1)కి గల లంబదూరము గోళ వ్యాసార్థం r కి సమానము.



గోళము, దత్త రేఖ (1)ల స్పర్శ బిందువు N అనుకొనుము. అప్పుడు $CN\perp L$ అగును.

దత్త రేఖ L పై ఏదైన బిందువు $N=(r-1,\ -2r+2,\ 2r-3)$

CN దిక్ సంఖ్యలు $r-1,\ -2r+2,\ 2r-3$ మరియు రేఖ L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $1,-2,2$

కావున $1(r-1)-2(-2r+2)+2(2r-3)=0$

$\Rightarrow 9r=11 \Rightarrow r=\frac{11}{9}$

$\Rightarrow N=\left(\frac{11}{9}-1, \frac{-22}{9}+2, \frac{22}{9}-3\right)=\left(\frac{2}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-5}{9}\right)$

$\Rightarrow r \; = CN=\sqrt{\frac{4}{9^2}+\frac{16}{9^2}+\frac{25}{9^2}=\frac{45}{9.9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}$

$(0,0,0)$ కేంద్రంగాను, $r=\sqrt{\frac{5}{9}}$ వ్యాసార్థంగా గల గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2=\frac{5}{9}$$

i.e., $9\left(x^2+y^2+z^2\right)=5$

5.7.10 సమస్య: నిరూపకాక్షాలను మూడింటిని స్పృశిస్తూ $r(>0)$ వ్యాసార్థంగా గల గోళాల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన గోళం

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ అనుకొనుము.

గోళం $X-$ అక్షమును $(x_1,0,0)$ బిందువు వద్ద స్పృశించితే

$x^2+2ux+d=0$ యొక్క మూలాలు సమానము అవి x_1కు సమానము.

$\Leftrightarrow$ విచక్షిణి $=0 \;\Leftrightarrow\; 4u^2=4d \;\Leftrightarrow\; u^2=d$

అదే విధముగా గోళం Y, Z అక్షాలను స్పృశించుతాయి $\Leftrightarrow v^2=d, w^2=d$

ఈ సందర్భములో $r^2=u^2+v^2+w^2-d$

$$\Rightarrow r^2=d+d+d-d=2d \Rightarrow d=\frac{r^2}{2}$$

$$\therefore \; u^2=v^2=w^2=d=\frac{r^2}{2}$$

$$\Rightarrow u = v = w = \pm \frac{r}{\sqrt{2}}$$

కావలసిన గోళాల సమీకరణాలు

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\pm \frac{r}{\sqrt{2}}\right)x + 2\left(\pm \frac{r}{\sqrt{2}}\right)y + 2\left(\pm \frac{r}{\sqrt{2}}\right)z + \frac{r^2}{2} = 0$$

i.e., $2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 2\sqrt{2}r(\pm x \pm y \pm z) + r^2 = 0$

r స్థిరము అయితే 8 గోళాలు ఉంటాయి.

5.7.11 సమస్య:

(a) నిరూపక తలాలు మూడింటిని స్పృశిస్తూ మొదటి అష్టకంలో ఉండే గోళ సమీకరణము

$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda(x + y + z) + 2\lambda^2 = 0$ అని చూపుము.

(b) దత్త బిందువు గుండాపోతూ నిరూపక తలములను స్పృశిస్తూ రెండు గోళములు ఉంటాయని చూపుము.

సాధన: **(a)** గోళ వ్యాసార్థం λ అనుకుంటే నిరూపక తలాల నుండి కేంద్రానికి గల లంబ దూరము గోళ వ్యాసార్థము λ కు సమానము.

గోళ కేంద్రము మొదటి అష్టకం $OXYZ$ లో ఉన్నది. కేంద్రము $= (\lambda, \lambda, \lambda)$.

గోళ సమీకరణము

$$(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 + (z - \lambda)^2 = \lambda^2$$

$$\therefore\ x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda(x + y + z) + 2\lambda^2 = 0.$$

(b) $P(\alpha, \beta, \gamma)$ దత్త బిందువనుకొనుము.

గోళం P బిందువు గుండాపోతే

$\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) - 2\lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\lambda^2 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$ అగును.

ఇది λ లో వర్గ సమీకరణము

(1) యొక్క విచక్షణి

$$4(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 8\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$$

సందర్భము (i): $2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)>\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (2)$ అయితే

సమీకరణం **(1)**కి విభిన్న మూలాలు ఉంటాయి. ఈ సందర్భంలో రెండు గోళాలు ఉంటాయి.

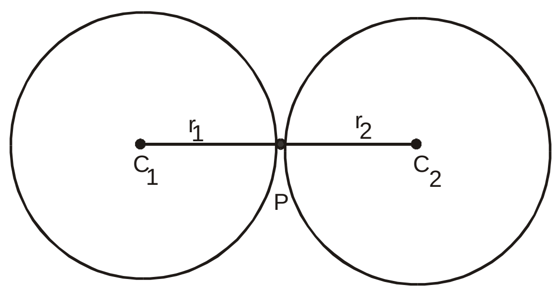
సందర్భము (ii): $2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \quad \cdot\cdot\cdot \quad (3)$ అయితే

సమీకరణం **(1)**కి మూలాలు సమానము. ఈ సందర్భంలో ఒక గోళం ఉంటుంది.

5.7.12 సమస్య : $x^2+y^2+z^2=25 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (1)$

$$x^2+y^2+z^2-24x-4oy-18z+225=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (2)$$

గోళాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఉమ్మడి స్పర్శ బిందువును కనుక్కోండి.



సాధన: (1)వ గోళమునకు కేంద్రం $C_1=(0,0,0)$, వ్యాసార్థం $r_1=5$

(2)వ గోళానికి కేంద్రం $C_2=(12,20,9)$, వ్యాసార్థం $r_2=\sqrt{144+400+81-225}=20$

ఇప్పుడు $C_1C_2=\sqrt{12^2+20^2+9^2}=25=20+5=r_1+r_2$

$\Rightarrow$ రెండు గోళాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకొంటాయి.

ఉమ్మడి స్పర్శ బిందువు P అనుకొంటే P బిందువు C_1C_2 రేఖను $r_1:r_2=5:20=1:4$ నిష్పత్తిలో అంతరముగా విభజిస్తుంది.

అపుడు $P=\left(\frac{60}{25},\frac{100}{25},\frac{45}{25}\right)=\left(\frac{12}{5},\frac{20}{5},\frac{9}{5}\right)$

5.7.13 సమస్య: $x^2+y^2+z^2=1$ గోళాన్ని $4x+3y=47$ తలాన్ని (8, 5, 4) బిందువు వద్ద స్పృశించే రెండు గోళాల కేంద్రాలను కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త స్పర్శ రేఖ

$$4x + 3y = 47$$

దత్త తల అభిలంబ దిక్ సంఖ్యలు $(4,3,0) \Rightarrow$ దత్త తల అభిలంబ దిక్ కొసైన్‌లు $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

$P = (8,5,4)$ అనుకొనిన P స్పర్శ బిందు తలమగును.

P బిందువు గుండాపోతూ $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ లు దిక్ కొసైన్‌లుగా గల సరళరేఖ సమీకరణాలు

$$\frac{x-8}{4/5} = \frac{y-5}{3/5} = \frac{z-4}{0} = r_1$$ అనుకొనుము.

గోళ వ్యాసార్థము r_1 అయితే గోళ కేంద్రము C_1 ఈ క్రింది రూపంలో ఉండును.

$$C_1 = \left(\frac{4r_1}{5} + 8, \frac{3r_1}{5} + 5, 4\right) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

రెండవ గోళము $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ యొక్క కేంద్రము $C_2 = (0,0,0)$ మరియు వ్యాసార్థము $r_2 = 1$.

రెండు గోళాలు స్పృశించుకుంటాయి $\Rightarrow$ గోళ కేంద్రముల మధ్య దూరం $C_1C_2 = |r_1 \pm r_2| = |r_1 \pm 1|$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{5} r_1 + 8\right)^2 + \left(\frac{3}{5} r_1 + 5\right)^2 + 16 = (r_1 \pm 1)^2$$

$$\Rightarrow (4r_1 + 40)^2 + (3r_1 + 25)^2 + 400 = 25(r_1 \pm 1)^2$$

$$\Rightarrow 16r_1^2 + 1600 + 320r_1 + 9r_1^2 + 625 + 150r_1 + 400 = 25r_1^2 + 25 \pm 50r_1$$

$$\Rightarrow 470r_1 + 2600 = \pm 50r_1$$

$$\Rightarrow 470\, r_1 + 2600 = 50r_1 \text{ or } 470r_1 + 2600 = -50r_1$$

$$\Rightarrow 420r_1 = -2600 \text{ or } 520\, r_1 = -2600$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{-2600}{420} \text{ or } r_1 = \frac{-2600}{520}$$

$\Rightarrow r_1 = \frac{-130}{21}$ or $r_1 = -5$

గోళ కేంద్రములు

$$\left(\frac{4}{5}\left(\frac{-130}{21}\right)+8,\ \frac{3}{5}\left(\frac{-130}{5}\right)+5,\ 4\right) \text{ మరియు } \left(\frac{4}{5}(-5)+8,\ \frac{3}{5}(-5)+5,\ 4\right)$$

i.e., $\left(\frac{64}{21}, \frac{27}{21}, 4\right)$ మరియు $(4,2,4)$

5.7.14 సమస్య: $(4,1,0), (2,-3,4), (1,0,0)$ బిందువుల గుండాపోతూ $2x-2y-z=11$ తలాన్ని స్పృశించే గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad \cdots \quad (1) \text{ అనుకొనుము.}$$

గోళం (1) $(4,1,0), (2,-3,4), (1,0,0)$ బిందువుల గుండా పోవుచున్నది.

అప్పుడు $16+1+0+84+2v+d=0 \Rightarrow 8u+2v+a=-17 \quad \cdots \quad (2)$

$$4+9+16+44-6v+8w+d=0 \Rightarrow 4u-6v+8w+d=-29 \quad \cdots \quad (3)$$

గోళ కేంద్రము $(-4,-u,-w)$, వ్యాసార్థము $= \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$

గోళము (1) $2x+2y-3=11$ తలాన్ని స్పృశిస్తుంది కావున

$$\left|\frac{-2u-2v+w+1}{\sqrt{4+4+1}}\right| = \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$$

$$\Rightarrow (2u+2v-w+11)^2 = 9\left(u^2+v^2+w^2-d\right) \quad \cdots \quad (5)$$

ఇప్పుడు $(4) \Rightarrow \boxed{d=-1-2u}$

$$(2) \Rightarrow 8u+2v+d=-17 \Rightarrow 2v=-8u-(-1-2u)-17=-16-6v$$

$$\Rightarrow \boxed{v=-8-3u}$$

$$(3) \Rightarrow 4u-6(-8-3u)+8w-1-2u=-29 \Rightarrow \boxed{w=\frac{-19-5u}{2}}$$

$$\therefore (5) \Rightarrow \left(2u+2(-8-3u)+\frac{19+5u}{2}+11\right)^2 = 9\left[u^2+(-8-3u)^2+\left(\frac{-19-5u}{2}\right)^2+1+2u\right]$$

$$\Rightarrow (-3u+9)^2 = 9\left[65u^2+39ou+621\right]$$

$$\Rightarrow 64u^2+396u+612=0$$

$$\Rightarrow 16u^2+99u+153=0 \quad \Rightarrow (u+3)(16v+51)=0$$

$$\Rightarrow u=-3, \frac{-51}{16}$$

$u=-3$, అయితే $v=1, w=-2, d=5$ అగును.

$u=\frac{-51}{16}$, అయితే $v=\frac{25}{16}, w=\frac{-49}{32}, d=\frac{43}{8}$ అగును.

కావలసిన గోళ సమీకరణాలు

$x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+5=0$ మరియు

$16\left(x^2+y^2+z^2\right)-102x+50y-49z+86=0$

5.7.15 సమస్య: $x=0, y=0, z=0, x+2y+2z=1$ సమీకరణాలు సూచించే తలాలతో ఏర్పడే చతుర్ముఖి అంతర్ స్పర్శ గోళ సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన గోళ సమీకరణం

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$ అనుకొనుము.

కేంద్రము $C=(-u,-v,-w)$, వ్యాసార్థం $r=\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$

$x+2y+2z=1$ యొక్క అంతర్ ఖండ రూపము

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1/2}+\frac{z}{1/2}=1$$

గోళం చతుర్ముఖి అంతర్ స్పర్శ గోళం కావున

$$0<-u<1,\ 0<-v<\frac{1}{2}, 0<-w<\frac{1}{2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$ జరుగును.

గోళం (1) తలం $x = 0$ ను స్పృశిస్తుంది కావున

$$|u| = r \Rightarrow r = -u$$

అదే విధంగా గోళం (1) తలం $y = 0, z = 0$ ను స్పృశిస్తుంది కావున

$r = -v, r = -w$ వచ్చును.

$r^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d$ కావున

$$r^2 = r^2 + r^2 + r^2 - d \Rightarrow \boxed{d = 2r^2}$$

$$\therefore u = v = w = -r,\ d = 2r^2 = 2u^2$$

గోళం (1)ని తలం $x + 2y + 2z = 1$ స్పృశిస్తుంది కావున

$$\left|\frac{-u - 2v - 2w - 1}{\sqrt{1+4+4}}\right| = r$$

$$\Rightarrow |-5u - 1| = 3r \quad \Rightarrow (5u+1)^2 = 3r^2$$

$$\Rightarrow (5u+1)^2 = 3u^2 \quad \Rightarrow 16\,u^2 + 10u + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16u^2 + 10u + 1 = 0 \quad \Rightarrow (8u+1)(2u+1) = 0$$

$$\Rightarrow u = \frac{-1}{2}, \frac{-1}{8}$$

(2) నుండి $u = v = w = \frac{-1}{8}, d = 2\frac{1}{64} = \frac{1}{32}$

కావలసిన గోళ సమీకరణం

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{8}(x + y + z) + \frac{1}{32} = 0$$

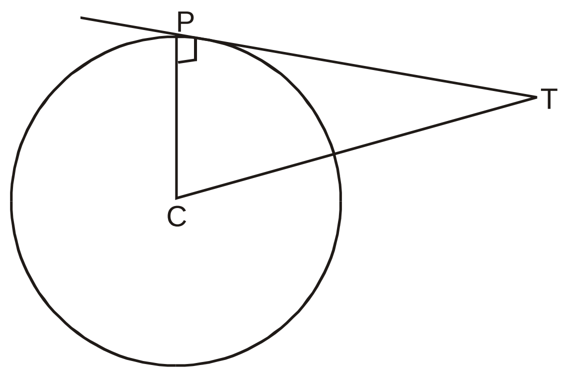
or $$32\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - (x + y + z) + 1 = 0$$

5.8 స్పర్శ బిందు తలం:

5.8.1 సిద్ధాంతము: ఒక బాహ్య బిందువు T గుండా గోళానికి గీసిన అన్ని స్పర్శ తలాల స్పర్శ బిందువుల సమితి వృత్తం కాని, శూన్య సమితి కాని అవుతుంది.

ఉపపత్తి: దత్త గోళము σ అనుకొనుము.

దత్త గోళము σ బిందు గోళమైతే స్పర్శ బిందువుల సమితి బిందు వృత్తమని ఇదువరకే తెలుసు.



దత్త గోళము σ వ్యాసార్థము శూన్యేతరమైతే దత్త గోళమునకు, బాహ్య బిందువు T గుండా గీసిన ఒక స్పర్శ తలానికి P స్పర్శ బిందువు.

$\underline{|CPT} = 90^0$

$\Leftrightarrow$ CT వ్యాసముగా గల గోళము σ^1 పై P ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow P \in \sigma$ and $P \in \sigma^1 \Leftrightarrow P \in \sigma \cap \sigma^1$

కాని $\sigma \cap \sigma^1$ ఒక వృత్తము.

5.8.2 **గమనిక:** T, σ గోళానికి అంతర బిందువైన, σకు T గుండాపోయే స్పర్శ తలాలుండవు. కాబట్టి స్పర్శ బిందువుల సమితి శూన్య సమితి.

T, σ గోళం పై ఉంటే, స్పర్శ బిందువుల సమితి బిందు వృత్తం $\{T\}$ అవుతుంది.

5.8.3 **నిర్వచనము:** ఒక σ గోళపు బాహ్య బిందువు T నుంచి గోళానికి స్పర్శ తలాలు గీద్దాం. ఈ స్పర్శ తలాల స్పర్శ బిందువులన్నీ ఒక తలం పై ఉంటాయి. ఆ తలాన్ని గోళం σ దృష్ట్యా T యొక్క స్పర్శ బిందు తలం అంటాం.

5.8.4 **సిద్ధాంతము:** $S=0$ గోళం దృష్ట్యా $T(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు యొక్క స్పర్శ బిందు తల సమీకరణం $S_1 = 0$.

ఉపపత్తి: $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d$ అనుకొనుము.

T(x_1, y_1, z_1) బాహ్య బిందువు, T నుంచి $S=0$కు గీసిన స్పర్శ తలం యొక్క స్పర్శ బిందువు $\left(x^1, y^1, z^1\right)$ అనుకుందాం.

అప్పుడు $S=0$ కు $\left(x^1, y^1, z^1\right)$ వద్ద స్పర్శ తలం సమీకరణం

$$xx^1+yy^1+zz^1+u\left(x+x^1\right)+v\left(y+y^1\right)+w\left(z+z^1\right)+d=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

$\left(x^1, y^1, z^1\right)$ బిందువు స్పర్శ బిందుతలంలో ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow$ తలం (1) T బిందువు గుండా పోతుంది.

$$\Leftrightarrow x_1x^1+y_1y^1+z_1z^1+u\left(x_1+x^1\right)+v\left(y_1+y^1\right)+w\left(z_1+z^1\right)+d=0$$

$\therefore$ $\left(x^1, y^1, z^1\right)$ బిందువు సంతృప్తిపరిచే సమీకరణం

$$xx_1+yy_1+zz_1+u\left(x+x_1\right)+v\left(y+y_1\right)+w\left(z+z_1\right)+d=0$$

అంటే $S_1=0\cdots\cdots(2)$

$(-u,-v,-w)$ గోళ కేంద్రము మరియు T గోళ బాహ్య బిందువు కావున

$(x_1, y_1, z_1) \neq (-u,-v,-w)$ అగునుమరియు

$S_1=0$ ఒక తలాన్ని సూచిస్తుంది. $\left(x^1, y^1, z^1\right)$ బిందువు తలం $S_1=0$లో ఉండును.

$\therefore$ T యొక్క స్పర్శ బిందు తలం $S_1=0$ అగును.

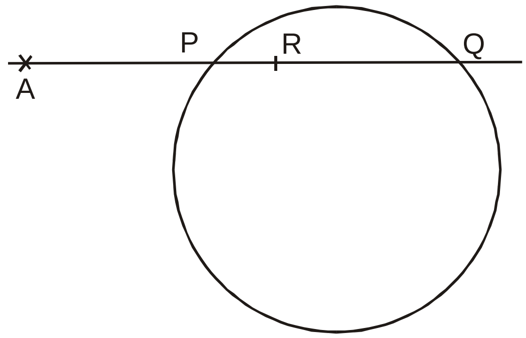
5.8.5 గమనిక:

(1) గోళము దృష్ట్యా ఒక బిందువు యొక్క స్పర్శ బిందు తలం, ఆ బిందువు నుండి గోళ కేంద్రమునకు గీసిన రేఖకు లంబముగా ఉండును.

(2) ఏ బిందువు యొక్క స్పర్శ బిందు తలమయినా దత్త గోళ కేంద్రం గుండాపోదు.

5.9 ధ్రువము మరియు ధ్రువ తలము:

5.9.1 నిర్వచనము (1): ఒక గోళమును PQ ల వద్ద కలియునట్లు ఒక చలించు రేఖను ఒక స్థిర బిందువు A గుండా గీసినచో మరియు ఈ రేఖ మీద A, R బిందువులు PQ ని అంతరముగా మరియు బాహ్యముగా ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించునట్లు R బిందువును తీసుకుంటే R యొక్క బిందు పదమును గోళము దృష్ట్యా A యొక్క ధ్రువ తలమందురు. స్థిర బిందువు A ను ధ్రువము అందురు.



5.9.2 నిర్వచనము: ఒక గోళమును P, Q ల వద్ద కలియునట్లు ఒక చలించు రేఖను ఒక స్థిర బిందువు A గుండా గీచినచో మరియు ఈ రేఖ మీద $\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AR}$ అగునట్లు R అనే బిందువును తీసుకుంటే R యొక్క బిందు పదము ఒక తలము ఈ తలమును గోళము దృష్ట్యా, A యొక్క ధ్రువ తలమందురు. A ను ధ్రువమందురు.

5.9.3 సిద్ధాంతము: పై రెండు నిర్వచనాలు తుల్యాలు.

ఉపపత్తి: **నిర్వచనం (1)** $\Leftrightarrow \frac{PR}{RQ}=\frac{PA}{AQ} \Leftrightarrow \frac{-PR}{AP}=\frac{-QR}{AQ}$

$$\Leftrightarrow \frac{AP-AR}{AP\cdot AR}=\frac{AR-AQ}{AQ\cdot AR} \Leftrightarrow \frac{1}{AR}-\frac{1}{AP}=\frac{1}{AQ}-\frac{1}{AR}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AR} \Leftrightarrow$ నిర్వచనము **(2)**

5.9.4 సిద్ధాంతము: $S \equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ గోళము దృష్ట్యా $A(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు యొక్క ధ్రువ తలము $S_1=0$ అగును.

ఉపపత్తి: $A(x_1, y_1, z_1)$ గుండాపోయే సరళరేఖా సమీకరణము

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=r\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

రేఖ **(1)** పై ఏదైన బిందువు $(x_1+\ell r, y_1+mr, z_1+nr)$ అగును.

ఈ బిందువు $(x_1+\ell r, y_1+mr, z_1+nr)$ గోళం పై ఉండును.

$$\Leftrightarrow (x_1+\ell r)^2+(y_1+mr)^2+(z_1+nr)^2+2u(x_1+\ell r)+2v(y_1+mr)+2w(z_1+nr)+d=0$$

i.e. $r^2 + 2r\left[\ell(u+x_1)+m(v+y_1)+n(w+z_1)\right]+s_{11}=0$

ఇది r లో ఒక సమీకరణము. దీని యొక్క మూలాలు r_1, r_2 అనుకొనుము.

గోళమును P, Q ల వద్ద ఖండించిన A గుండా గీసిన రేఖ

$AP = r_1,\ AQ = r_2$ అగును.

$$AP + AQ = -2\left[\ell(u+x_1)+m(v+y_1)+n(w+z_1)\right]$$

($\because\ AP + AQ = r_1 + r_2 =$ మూలాల లబ్దము)

$AP \cdot AQ = S_{11}$ ($\because AP \cdot AQ = r_1 r_2 =$ మూలాల మొత్తము)

$\frac{1}{AP}+\frac{1}{AQ}=\frac{2}{AR} \Rightarrow \frac{2}{AR}=\frac{AP+AQ}{AP\cdot AQ}$ అగునట్లు PQ రేఖ పై R ఒక బిందువు.

$$\Rightarrow\ AR = \frac{2AP\cdot AQ}{AP+AQ} = \frac{2S_{11}}{-2\left[\ell(u+x_1)+m(v+y_1)+n(w+z_1)\right]} \quad \cdots \quad (2)$$

రేఖ (1) పై R బిందువు ఉన్నది కావున $\frac{\alpha - x_1}{\ell} = \frac{\beta - y_1}{m} = \frac{\gamma - z_1}{n} = AR \quad \cdots \quad (3)$

(2) & (3)ల నుండి ℓ, m, n లను తొలగించగా

$(\alpha - x_1)(u+x_1)+(\beta - y_1)(v+y_1)+(\gamma - z_1)(w+z_1) = -S_{11}$ వచ్చును.

$$\Rightarrow\ \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 + u(\alpha + x_1) + v(\beta + y_1) + w(\gamma + z_1) + d = 0$$

$R(\alpha,\beta,\gamma)$ యొక్క బిందుపదము.

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + u(x+x_1) + v(y+y_1) + w(z+z_1) + d = 0$$

i.e., $\boxed{S_1 = 0}$

$\therefore$ $S = 0$ గోళం దృష్ట్యా (x_1, y_1, z_1) బిందువు యొక్క ధ్రువ తలము $S_1 = 0$ అగును.

5.9.5 S.A.Q.: గోళము యొక్క కేంద్రము మూల బిందువు మరియు వ్యాసార్థము a అయిన

(i) గోళం దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువ తలం OP రేఖకు లంబంగా ఉండును.

(ii) ధ్రువ తలం మరియు OP రేఖల ఖండన బిందువు Q అయితే $OP \cdot OQ = a^2$ అగును.

5.9.6 గమనిక:

(i) P గోళ బాహ్య బిందువయితే $OP > a$ · మరియు $OQ < a$ అగును.

i.e. Q బిందువు గోళ అంతర బిందువు P యొక్క ధ్రువ తలము P యొక్క స్పర్శ బిందు తలమే.

(ii) P గోళము మీద బిందువు అయితే $OP = OQ = a$. P యొక్క ధ్రువ తలము P వద్ద స్పర్శ తలానికి సమానము.

(iii) P గోళ అంతర బిందువు అయితే $OP < a,\ OQ > a$. P యొక్క ధ్రువ తలము Q బిందువు వద్ద OP కి లంబంగా గల తలమే ఈ తలం గోళాన్ని ఖండించదు.

5.9.7 నిర్వచనము: P యొక్క ధ్రువ తలం π అయితే P ను తలం π యొక్క ధ్రువం అందురు.

5.9.8 సిద్ధాంతము: $P \neq 0$ అయితే గోళం $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ దృష్ట్యా తలం $\ell x + my + nz = p$ యొక్క ఏకైక ధ్రువము

$$\left(\frac{a^2\ell}{P}, \frac{a^2m}{P}\ \frac{a^2n}{P}\right)$$

ఉపపత్తి: తలం (1) యొక్క ధ్రువము $T(x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow$ గోళం (2) దృష్ట్యా T యొక్క ధ్రువ తలము

i.e., $xx_1 + yy_1 + zz_1 = a^2 \cdots\cdots(3)$ ఇది తలం (1)ని సూచించినది.

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{\ell} = \frac{y_1}{m} = \frac{z_1}{n} = \frac{a^2}{P}$$

i.e., $x_1 = \frac{a^2\ell}{P},\ y_1 = \frac{a^2m}{P},\ z_1 = \frac{a^2n}{P}$

తలము (1) యొక్క ఏకైక ధ్రువము

$$\left(\frac{a^2\ell}{P}, \frac{a^2m}{P}, \frac{a^2n}{P}\right)$$

5.9.9 ఉప సిద్ధాంతము: గోళం $S = 0$ కేంద్రము గుండా పోనటువంటి తలము $\ell x + my + nz = p,\ p \neq 0$ యొక్క ధ్రువము (x_1, y_1, z_1) ఇచ్చుట

$$x_1 = -u + \ell t,\ y_1 = -v + mt,\ z_1 = -w + nt \quad \text{మరియు}$$

$$t = \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2 - d}{\ell u + mv + nw - P}\right)$$

5.9.10 సిద్ధాంతము: ఒక గోళం దృష్ట్యా P బిందువు యొక్క ధ్రువ తలము Q బిందువు గుండాపోతే అదే గోళం దృష్ట్యా Q బిందువు యొక్క ధ్రువ తలం P గుండాపోతుంది.

ఉపపత్తి: $x^2+y^2+z^2=a^2$ గోళ సమీకరణం అనుకోండి.

$P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ లు దత్త బిందువులు.

P యొక్క ధ్రువ తలము సమీకరణము

$$xx_1+yy_1+zz_1=a^2$$

ఇది Q గుండా పోవుచున్నది.

$$x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1=a^2 \quad \text{i.e. } S_{1,2}=0$$

Q బిందువు యొక్క ధ్రువ తలం P గుండాపోవుటకు కావలసిన నియమము కూడ పై సమీకరణమే.

Q బిందువు యొక్క ధ్రువ తలం P బిందువు గుండా పోతుంది.

5.9.11 నిర్వచనము: సంయుగ్మ బిందువులు: $S=0$ గోళం దృష్ట్యా P బిందువు యొక్క ధ్రువ తలం పై Q బిందువు ఉంటే P,Q లను సంయుగ్మ బిందువులని అంటాము.

5.9.12 గమనిక: సిద్ధాంతము 5.9.10 నుండి Q యొక్క సంయుగ్మ బిందువు P అయితే P యొక్క సంయుగ్మ బిందువు Q అని తెలియును. ఒక దాని యొక్క ధృవ తలము రెండవ దాని గుండాపోతూ ఉంటే $S=0$ గోళము దృష్ట్యా P మరియు Q లు సంయుగ్మ బిందువులని చెప్పవచ్చును. P మరియు Q లు విభిన్నములు కావలసిన అవసరములేదని గమనించవచ్చును. నిజానికి గోళము దృష్ట్యా P బిందువు ఎప్పుడు దానికదే సంయుగ్మము అవుతుంది.

5.9.13 సిద్ధాంతము: గోళం దృష్ట్యా ఒక తలము యొక్క ధ్రువము రెండవ తలము పై ఉంటే, రెండవ తలము యొక్క ధ్రువము మొదటి తలము పై ఉండును.

ఉపపత్తి: $x^2+y^2+z^2=a^2$ ను గోళ సమీకరణం గాను π_1, π_2 లను దత్త తలములుగాను అనుకొనుము.

$$\pi_1 \equiv \ell_1 x+m_1 y+n_1 z-P_1=0$$

$$\pi_2 \equiv \ell_2 x+m_2 y+n_2 z-P_2=0 \quad \text{అనుకొనుము.}$$

దత్త గోళం దృష్ట్యా తలము π_1 యొక్క ధ్రువము

$$\left(\frac{a^2\ell_1}{P_1}, \frac{a^2m_1}{P_1}, \frac{a^2n_1}{P_1}\right) \qquad \text{(సిద్ధాంతము 5.9.8 నుండి)}$$

ఈ బిందువు రెండవ తలము π_2 పై ఉండినచో

$${}_2\left(\frac{a^2\ell_1}{P_1}\right)+m_2\left(\frac{a^2m_1}{P_1}\right)+n_2\left(\frac{a^2n_1}{P_1}\right)=P_2$$ జరుగును.

i.e., $a^2\left(\ell_1\ell_2+m_1m_2+n_1n_2\right)=P_1P_2$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2\ell_2}{P_2},\frac{a^2m_2}{P_2},\frac{a^2n_2}{P_2}\right)$$ బిందువు తలము π_1 పై ఉండును.

$\Rightarrow$ రెండవ తలము యొక్క ధ్రువము మొదటి తలము π_1 పై ఉండును.

5.9.14 నిర్వచనము: సంయుగ్మ తలములు: గోళం దృష్ట్యా మొదటి తలం యొక్క ధ్రువము రెండవ తలం పై ఉండిన ఆ రెండు తలలాలను గోళం దృష్ట్యా సంయుగ్మ తలాలని అంటాము.

5.9.15 సిద్ధాంతము: గోళ కేంద్రం గుండా పోయే సరళరేఖ L పై ఉండే బిందువుల ధ్రువ తలాలన్ని ఇంకొక స్థిర సరళరేఖ గుండాపోతాయి.

ఉపపత్తి: $S\equiv x^2+y^2+z^2-r^2=0$ ను గోళ సమీకరణము అనుకొనుము

సరళరేఖ సమీకరణం $L\equiv\dfrac{x-\alpha}{\ell}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}=k$ అనుకుంటే

దీనిపై ఏదైనా బిందువు $P\left(\alpha+\ell k,\ \beta+mk,\ \gamma+mk\right)$ అవుతుంది.

$S=0$ దృష్ట్యా ఈ బిందువు ధ్రువ తలం

$$x\left(x+\ell k\right)+y\left(\beta+mk\right)+z\left(\gamma+nk\right)=r^2$$

అంటే $$\left(\alpha x+\beta y+\gamma z-r^2\right)+k\left(\ell x+my+nz\right)=0\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad(1)$$

$\therefore L$ సరళరేఖ పై ఏ బిందువు ధ్రువ తలమైనా $\ell x+my+nz=0,\ \alpha x+\beta y+\gamma z-r^2=0$ తలాలు ఖండించే రేఖ L^1 గుండా పోతుంది.

(L రేఖ పై దత్త గోళ కేంద్రం లేదు కాబట్టి $\ell x+my+nz=0,\ \alpha x+\beta y+\gamma z-r^2=0$ సమీకరణాలు సూచించే తలాలు సమాంతరాలు కావు).

5.9.16 నిర్వచనము: $S=0$ గోళం దృష్ట్యా L, L^1 రేఖలలో ఒక దానిపై ఉండే బిందువుల ధ్రువ తలాలన్నీ రెండవ రేఖ గుండాపోతే L, L^1లను దత్త గోళం దృష్ట్యా సంయుగ్మ రేఖలు అంటాం.

5.10 సాధించిన సమస్యలు:

5.10.1 సమస్య: $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-11=0$ గోళం దృష్ట్యా $(3,-1,5)$ బిందువు యొక్కస్పర్శ బిందు తలం సమీకరణమును కనుక్కోండి.

సాధన: $S=0$ దృష్ట్యా (x_1, y_1, z_1) యొక్క స్పర్శ బిందు తలం సమీకరణం $S_1=0$

ఇచ్చుట $(x_1, y_1, z_1)=(3,-1,5)$

కావలసిన తలం సమీకరణము

$$3x-y+5z-(x+3)+2(y-1)+3(z+5)-11=0$$

i.e., $3x-y-5z-x-3+2y-2+3z+15-11=0$

i.e., $3x+y-2z-1=0$

5.10.2 సమస్య: $x^2+y^2+z^2-6x-2z+5=0$ గోళం దృష్ట్యా $(1, 3, 4)$ బిందువు యొక్క ధ్రువతలం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $S=0$ దృష్ట్యా (x_1, y_1, z_1) యొక్క ధ్రువ తలం సమీకరణం $S_1=0$ కావలసిన తలం సమీకరణము

$$x\cdot 1+y(3)+z(4)-3(x+1)-(z+4)+5=0$$

$$-2x+3y+3z-2=0$$

$$\boxed{2x-3y-3z+2=0}$$

5.10.3 S.A.Q.: గోళం $x^2+y^2+z^2=9$ దృష్ట్యా తలం $x-y+5z-3=0$ యొక్క ధ్రువం కనుక్కోండి.

5.10.4 సమస్య: గోళం $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ దృష్ట్యా తలం $x-y-z+9=0$ యొక్క ధ్రువం కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త గోళం $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$ (సూక్ష్మీకరించిన తరువాత)

మూల బిందువును $(1,-2,3)$ కి మార్చగా దత్త గోళ సమీకరణం

$$X^2+Y^2+Z^2=9 \quad \cdots \quad (1)$$ గా మారును.

అక్షాలు సమాంతర పరివర్తన చేసినప్పుడు దత్త తలం యొక్క నూతన సమీకరణము

$$(X+1)-(Y-2)-(Z+3)+9=0 \qquad (\because x=x+1,\ y=Y-Z,\ z=Z+3)$$

అంటే $X-Y+Z+9=0 \quad \cdots \quad (2)$

$(X_1,\ Y_1, Z_1)$ బిందువు తలం (2) యొక్క ధ్రువం అయితే ధ్రువ తల సమీకరణం

$$XX_1+YY_1+ZZ_1-9=0 \quad \cdots \quad (3)$$

(2) & (3)లు ఒకే తలాన్ని సూచిస్తున్నాయి

$$\therefore \frac{X_1}{1}=\frac{Y_1}{-1}=\frac{Z_1}{-1}=\frac{9}{-9} \Rightarrow X_1=-1,\ Y_1=1,\ Z_1=1 \quad (\because\ x=-1+1,\ y=1-2,\ z=1+3)$$

కావలసిన ధ్రువము $(0,-1,4)$.

II method:

దత్త తలము $x-y-z+9=0 \quad \cdots \quad (1)$

$P(x_1,\ y_1, z_1)$ బిందువు (1) యొక్క ధ్రువము అనుకొనుము.

$$S \equiv x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$S=0$ దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువ తలము $S_1=0$

అంటే $xx_1+yy_1+zz_1-(x+x_1)+2(y+y_1)-3(z+z_1)+5=0$

$$(x_1-1)x+(y_1+2)y+(z_1-3)z-x_1+2y_1-3z_1+5=0 \quad \cdots \quad (3)$$

(1) & (3) లు ఒకే తలాన్ని సూచిస్తున్నాయి.

$$\frac{x_1-1}{1}=\frac{y_1+2}{-1}=\frac{z_1-3}{-1}=\frac{-x_1+2y_1-3z_1+5}{9}=r \qquad \text{(అనుకొంటే)}$$

$x_1=r+1,\ y_1=-r-2,\ z_1=-r+3$ మరియు

$$-x_1+2y_1-3z_1+5=9r$$

$$\Rightarrow -(r+1)+2(-r-2)-3(-r+3)+5-9r=0$$

$$\Rightarrow -9r-9=0 \Rightarrow r=-1$$

ధ్రువము $(x_1, y_1, z_1) = (r+1, -r-2, -r+3)$

$$=(-1+1, +1-2, +1+3)=(0,-1,4)$$

5.10.5 సమస్య: $x^2+y^2+z^2=1 \cdot \cdot \cdot (2)$ దృష్ట్యా $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{1}=r \cdots\cdots (1)$ రేఖకు ధ్రువరేఖ

$\frac{7x+3}{11}=\frac{2-7y}{5}=\frac{z}{-1}$ అని నిరూపించండి.

సాధన: రేఖ (1) పై ఏదైనా బిందువు $P(2r-1, 3r+2, r-3)$

(2) దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువ తలము

$$x(2r-1)+y(3r+2)+z(2r-3)-1=0$$

$$\Rightarrow r(2x+3y+2z)-(x-2y+3z+1)=0 \cdot \cdot \cdot (3)$$

r యొక్క అన్ని విలువలకు తలము (3)

$2x+3y+2z=0$

$x-2y+3z+1=0$ అను రేఖ గుండాపోవును.

పై సరళరేఖ యొక్క సౌష్ఠవ రూపము:

పై తలములలో $z=0$ ఉంచగా

$\left.\begin{array}{l}2x+3y=0\\x-2y=-1\end{array}\right\}$ సాధించగా $y=2/7,\ x=-3/7$ వచ్చును.

అంటే $(-3/7,\ 2/7,\ 0)$ బిందువు పై రేఖ పై బిందువు.

ℓ, m, n రేఖ యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు అనుకుంటే

$2\ell+3m+2n=0$

$\ell-2m+3n=0$ అగును.

$$\Rightarrow \frac{\ell}{11} = \frac{m}{-5} = \frac{n}{-7} \quad \Rightarrow (\ell, m, n) = (11, -5, -7)$$

కావలసిన రేఖ యొక్క సమీకరణాలు

$$\frac{\left(x + \frac{3}{7}\right)}{11} = \frac{\left(y - \frac{2}{7}\right)}{-5} = \frac{z - 0}{-7}$$

అంటే $\frac{7x + 3}{11} = \frac{2 - 7y}{5} = \frac{z}{-1}$

5.10.6 సమస్య: మూల బిందువు కేంద్రంగా గల గోళం దృష్ట్యా Q, P బిందువుల ధ్రువ తలాల మీదకు గీసిన లంబాలు వరుసగా PA, QB అయితే

$$\frac{PA}{QB} = \frac{OP}{OQ}$$ అని చూపండి.

సాధన: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a \geq 0$ గోళ సమీకరణం అనుకోండి. దీని కేంద్రము $(0,0,0)$

$P = (x_1, y_1, z_1),\ Q = (x_2, y_2, z_2)$ అనుకొనుము

దత్త గోళం దృష్ట్యా P, Q ల ధ్రువ తలాలు

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - a^2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$xx_2 + yy_2 + zz_2 - a^2 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

PA = P బిందువు నుండి ధ్రువ తలం (2)కి లంబ దూరము

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - a^2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - a^2}{OQ}$$

PB = Q బిందువు నుండి ధ్రువ తలం (1)కి లంబ దూరము

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - a^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - a^2}{OP}$$

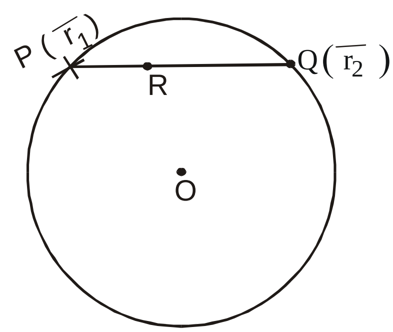
$$\frac{PA}{PB} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - a^2}{OQ} \Bigg/ \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - a^2}{OP} = \frac{OP}{OQ}$$

5.11 S .A .Q . లకు జవాబులు:

5.11.1 S.A.Q. 5.4.7కు సాధన:

మూల బిందువు కేంద్రంగాను, a వ్యాసార్థం గాను గల గోళము S అనుకొనుము.

$P\left(\overline{r_1}\right)$, $Q\left(\overline{r_2}\right)$ లు గోళం పై ఏవైనా రెండు బిందువులు అప్పుడు



$\overline{OP} = \overline{r_1}, \quad \overline{OQ} = \overline{r_2}$ మరియు

$\left|\overline{OP}\right| = \left|\overline{r_1}\right| = a, \quad \left|\overline{OQ}\right| = \left|\overline{r_2}\right| = a$.

PQ రేఖా ఖండము పై $R\left(\bar{r}\right)$ ఏదైనా ఒక బిందువు అనుకొనుము.

PQ ను R బిందువు $\lambda:1$ నిష్పత్తిలో విభజించును అనుకొనుము.

$$\overline{OR} = \bar{r} = \frac{\lambda\overline{r_2} + \overline{r_1}}{\lambda+1}$$

$$\left|\overline{OR}\right| = \left|\bar{r}\right| = \left|\frac{\lambda\overline{r_2} + \overline{r_1}}{\lambda+1}\right|$$

$$\le \frac{1}{\lambda+1}\left(\lambda\left|\overline{r_2}\right| + \left|\overline{r_1}\right|\right)$$

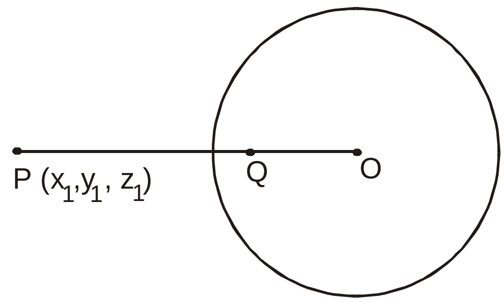
$$= \frac{1}{\lambda+1}\left(\lambda a + a\right) = a$$

$\Rightarrow \left|\bar{r}\right| < a \Rightarrow R$ గోళ అంతర బిందువు.

5.11.2 S.A.Q. 5.9.5 కు సాధన:

(i) దత్త గోళ సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$



$P(x_1, y_1, z_1)$ అంతరాళములో ఒక బిందువు.

గోళం (1) దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువ తలము

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - a^2 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$ అగును.

OP యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $x_1, y_1, z_1 =$ తలం (2) యొక్క అభిలంబ దిక్ సంఖ్యలు

$\Rightarrow$ OP రేఖకు P యొక్క ధ్రువ తలం లంబంగా ఉంది.

(ii) $OQ =$ కేంద్రం $'O'$ నుండి ధ్రువ తలం (2)కు లంబ దూరము

$$= \frac{a^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{a^2}{OP}$$

$$\Rightarrow OP \cdot OQ = a^2$$

5.12 సారాంశము:

ఈ పాఠము ఆమూలాగ్రము చదివిన విద్యార్థి స్పర్శిత, ధ్రువము, ధ్రువ తలము, సంయుగ్మత ఇత్యాధి అంశాల పై స్పష్టమైన అవగాహన పొందగలగాలి. ఒకే బిందువు లేదా ఒకటి కాని అంతకన్నా ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించుకొనే గోళాల స్వభావాన్ని ఆకళింపు చేసుకోగలిగి ఉండాలి.

5.13 సాంకేతిక పదాలు:

స్పర్శరేఖ

స్పర్శ తలము

స్పర్శ బిందు తలము

ధ్రువము

ధ్రువ తలము

సంయుగ్మ బిందువులు

సంయుగ్మ రేఖలు

5.14 అభ్యాసములు:

1. సరళరేఖ

$$\frac{x-8}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

మరియు గోళము

$x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$ ల యొక్క ఖండన బిందువులను కనుక్కోండి.

2. గోళం $(3,1,-1)$ బిందువు నుండి $x^2+y^2+z^2-3x+5y+7=0$ కు గల స్పర్శ రేఖ పొడవును కనుక్కొనుము.

3. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ గోళం దృష్ట్యా $(-1,4,-2)$ బిందువు యొక్క స్పర్శ తల సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

4. $2x-2y+z+12=0$ తలం $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ గోళాన్ని స్పృశిస్తుందని చూపి స్పర్శ బిందువును కనుక్కోండి.

5. $x^2+y^2+z^2+2x-6y+1=0$ గోళాన్ని $(1,2,-2)$ వద్ద స్పృశిస్తూ మూల బిందువు గుండాపోయే గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

6. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$ గోళానికి $2x+2y-z=0$ తలానికి సమాంతరంగా ఉండే రెండు స్పర్శ తలాలను కనుక్కోండి.

7. ఈ క్రింది వృత్తం గుండా పోయే గోళ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

   (i) $x^2+y^2+z^2=5,\quad x+2y+3z-3=0$ మరియు $4x+3y-15=0$ తలాన్ని స్పృశిస్తుంది.

   (ii) $x^2+y^2+z^2-6x-2z+5=0,\ y=0$ మరియు $3y+4z+5=0$ తలాన్ని స్పృశిస్తుంది.

(iii) $x^2+y^2+z^2=1,\ 2x+4y+5z=6$ మరియు $z=0$ తలాన్ని స్పృశిస్తుంది.

(iv) $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0,\ 2x+y+z=4$ మరియు $3x+4y-14=0$ తలాన్ని స్పృశిస్తుంది.

8. మూల బిందువు కేంద్రంగాను

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{2}$$ సరళరేఖను స్పృశించే గోళమును కనుక్కోండి.

9. Show that the locus of the centres of spheres which pass through the fixed point $(0,0,0)$ and touch the plane $z=0$ is $x^2+y^2-2az+a^2=0$.

10. ఈ క్రింది

(i) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+10=0,\ x^2+y^2+z^2-6x-4y-12z+40=0$ గోళాలు బాహ్యముగా స్పృశించుకుంటాయని చూపండి.

(ii) $x^2+y^2+z^2=25,\ x^2+y^2+z^2-24x-40y-18z+225=0$ గోళాలు బాహ్యముగా స్పృశించుకుంటాయని చూపి, స్పర్శ బిందువు కనుక్కోండి.

(iii) $x^2+y^2+z^2=64,\ x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+48=0$ గోళాలు అంతరంగా స్పృశించుకుంటాయని చూపి, స్పర్శ బిందువును కనుక్కోండి.

11. $x^2+y^2+z^2-6x+2y-3z+1=0$ గోళం దృష్ట్యా $10x-2y-5z-2=0$ తలం యొక్క ధ్రువం కనుక్కోండి.

12. $x^2+y^2+z^2=1$ గోళం దృష్ట్యా $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{4}$ రేఖ పై గల బిందువుల స్పర్శ బిందు తలాన్ని

$$\frac{2x+3}{13}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{-1}$$ రేఖను కలిగి ఉంటాయని చూపండి.

13. $x^2+y^2+z^2=25$ గోళం దృష్ట్యా $5x-y-6z+25=0,\ x-2y-3z+25=0$ సంయుగ్మాలని చూపండి.

14. $x^2+y^2+z^2=16$ గోళం దృష్ట్యా $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ ధ్రువ రేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

15. $x^2+y^2+z^2=a^2$ గోళం దృష్ట్యా ఏ బిందువుల ధ్రువ తలాలు $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2$ గోళాన్ని స్పృశిస్తాయో ఆ బిందువుల బిందు పథం కనుక్కోండి.

5.15 జవాబులు:

1. $(4,-1,2), (0,-2,3)$

2. $\sqrt{14}$

3. $2x-2y+z+12=0$

4. $(-1,4,-2)$

5. $4\left(x^2+y^2+z^2\right)+10x-25y-2z=0$

6. $2x+2y-z+10=0,\ 2x+2y-z-8=0$

7. (i) $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11=0,\ 5\left(x^2+y^2+z^2\right)-4x-8y-12z-13=0$

   (ii) $x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z+5=0,\ 4\left(x^2+y^2+z^2\right)-24x-11y-8z+20=0$

   (iii) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-5z+5=0,\ 5\left(x^2+y^2+z^2\right)-2x-4y-5z+1=0$

   (iv) $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11=0,\ x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0$

8. $9\left(x^2+y^2+z^2\right)=5$

10. (i) $\left(\frac{12}{5}, 4, \frac{9}{5}\right)$

    (ii) $\left(\frac{48}{7}, \frac{-16}{7}, \frac{24}{7}\right)$

11. $(-2,0,4)$

14. $2x+3y+4z=0=x+2y+3z-16$

15. $\left(\alpha x+\beta y-a^2\right)^2=r^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$

5.16 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. శూన్యేతర వ్యాసార్థం గల గోళం మీద ఉన్న ఒక బిందువు వద్ద ఉండే స్పర్శ రేఖలన్నీ ఒక తలాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

2. (1, 2, 3) బిందువు వద్ద $3\left(x^2+y^2+z^2\right)-2x-3y-4z-22=0$ గోళమునకు స్పర్శ తల సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

3. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+2y+2z=1$ సమీకరణాలు సూచించే తలాలతో ఏర్పడే చతుర్ముఖి అంతర్ స్పర్శ గోళం సమీకరణం కనుక్కోండి.

5.17 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: $x^2+y^2+z^2=5,\ x+2y+3z-3=0$ వృత్తం గుండాపోతూ $4x+3y=15$ తలాన్ని స్పృశించే గోళాల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

AIM: దత్త వృత్తం గుండాపోతూ దత్త తలాన్ని స్పృశించే గోళాల సమీకరణాలను కనుగొనుట.

నిర్వచనాలు మరియు సిద్ధాంతాలు:

(1) $S=0$ గోళాన్ని $U=0$ తలం C అనే వృత్తాలలో ఖండిస్తే λ అన్ని విలువలకు $S+\lambda U=0$ సమీకరణం C వృత్తాన్ని కలిగి ఉంటే గోళాన్ని సూచిస్తుంది.

(2) శూన్యేతర వ్యాసార్థం గల గోళాన్ని T వద్ద స్పృశించే రేఖలన్నీ ఏర్పరచే తలాన్ని ఆ గోళానికి T వద్ద స్పర్శ తలమని అంటాం. T ని గోళానికి ఈ స్పర్శ తలం స్పర్శ బిందువు అంటాం.

(3) $S\equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ గోళానికి $\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ బిందువు వద్ద స్పర్శ తలం సమీకరణం $S_1=0$ అంటే $xx_1+yy_1+zz_1+u\left(x+x_1\right)+v\left(y+y_1\right)+w\left(z+z_1\right)+d=0$

సాధన: దత్త వృత్తం $x^2+y^2+z^2-5=0,\ x+2y+3z-3=0$

ఈ వృత్తం గుండాపోయే గోళ సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2-5+\lambda\left(x+2y+3z-3\right)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

దీని కేంద్రము $\left(\frac{-\lambda}{2},-\lambda,\frac{-3\lambda}{2}\right)$

వ్యాసార్థం $=\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}+\lambda^2+\frac{9\lambda^2}{4}+5+3\lambda}=\sqrt{\frac{7\lambda^2}{2}+3\lambda+5}$

గోళం $4x+3y-15=0$ తలాన్ని స్పృశిస్తే గోళ కేంద్రం నుంచి తలానికి లంబదూరం $=$ గోళ వ్యాసార్థం

$$\therefore \left|\frac{4\left(\frac{-\lambda}{2}\right)+3(-\lambda)-15}{\sqrt{16+9}}\right| = \sqrt{\frac{7\lambda^2+6\lambda+10}{2}}$$

$$\therefore \lambda = 2 \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{-4}{5}$$

$\lambda = 2$ ను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$x^2+y^2+z^2-5+2(x+2y+3z-3)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

$\lambda = \frac{-4}{5}$ ను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$x^2+y^2+z^2-5-\frac{4}{5}(x+2y+3z-3)=0$$

$$5\left(x^2+y^2+z^2\right)-4x-8y-12z-13=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$$

(2), (3)లు కావలసిన గోళ సమీకరణాలు.

పాఠ్యభాగ రచయిత

డా॥ B. రామి రెడ్డి

పాఠము - 6

గోళము - 3 సహతల గోళాలు

6.1 లక్ష్యము: విద్యార్థి ఈ పాఠం చదివిన తరువాత

- రెండు గోళాల మూల తలం
- మూడు గోళాల మూల రేఖ
- నాలుగు గోళాల మూల కేంద్రం
- సహతల గోళాలు, వాటి అవధి బిందువుల గురించి తగినంత పరిజ్ఞానము పొందగలడు.

6.2 పాఠ్యాంశాలక్రమము:

ఈ పాఠంలో క్రింది భాగాలు ఉన్నవి.

6.3 ఉపోద్ఘాతము

6.4 రెండు గోళాల మధ్య కోణం

6.5 మూల తలం మరియు మూల రేఖ

6.6 సహతల గోళ సరణి

6.7 సహతల గోళ సరణి యొక్క పరామితీయ రూపము

6.8 అవధి బిందువులు

6.9 S.A.Q.లకు సమాధానాలు

6.10 సారాంశము

6.11 సాంకేతిక పదాలు

6.12 అభ్యాసము

6.13 జవాబులు

6.14 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

6.15 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య

6.3 ఉపోద్ఘాతము:

గోళము మీది ఈ చివరి పాఠంలో మూల తలాలు, మూల రేఖలు, సహతల గోళ సరణి వాటి అవధి బిందువులు ఇత్యాధి లోతైన అంశాల గురించి చర్చిస్తాము.

6.4 రెండు గోళాల మధ్య కోణం:

6.4.1 నిర్వచనము: రెండు గోళాలకు 'P' ఒక ఉమ్మడి బిందువు అయితే, ఆ గోళాలకు P వద్ద గల స్పర్శ తలాల మధ్య ఏ కోణాన్నైనా P దగ్గర ఆ రెండు గోళాలు ఖండించుకొనే కోణము అని అంటాము. ఒక కోణము α అయితే రెండవది $\pi-\alpha$ అవుతుంది.

6.4.2 సిద్ధాంతము: $S=0, S^1=0$ రెండు ఖండించుకొనే గోళాలు, r_1, r_2 వరుసగా వాటి వ్యాసార్థాలు, వాటి కేంద్రాల మధ్య దూరం 'd', వాటి ఉమ్మడి బిందువు P వద్ద $S_1=0, S_2=0$ ఖండించుకొనే కోణం θ అయితే

$$\text{Cos}\,\theta = \pm\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}.$$

ఉపపత్తి:

దత్త గోళాల కేంద్రాలు A, B అనుకొందాము. ఆ రెండు గోళాలకు ఉమ్మడి బిందువు P వద్ద స్పర్శ తలాలు AP, BP లకు వరుసగా లంబంగా ఉంటాయి. P వద్ద రెండు గోళాల మధ్య కోణము θ అనుకొనుము.

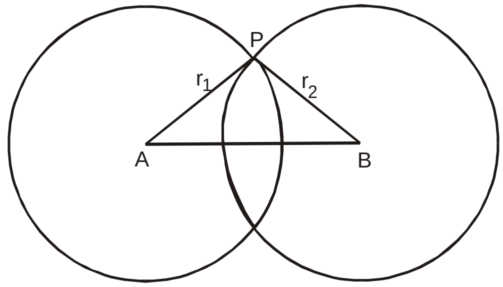
$AP=r_1,\ BP=r_2$ వ్యాసార్థాలు మరియు $AB=d$, $\theta = P$ వద్ద దత్త గోళాలు ఖండించుకొనే కోణము

అనగా P వద్ద దత్త గోళాలు స్పర్శ తలాల మధ్య కోణము

అనగా $\overleftrightarrow{AP},\ \overleftrightarrow{BP}$ ల మధ్య కోణము కాబట్టి $\underline{|APB} = \theta$ లేదా $\pi-\theta$

P బిందువు AB రేఖ మీద లేకపోతే $\Delta\, APB$ నుండి

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA\cdot PB \quad \cos\underline{|APB}$$



$$\Rightarrow d^2 = r_1^2 + r_2^2 \mp 2r_1r_2\cos\theta \ \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}$$

AB రేఖ P ఉంటే, $AB = AP+PB \Rightarrow AB^2 = AP^2+PB^2+2AP\cdot PB \Rightarrow d^2 = r_1^2+r_2^2+2r_1r_2$

ఈ సందర్భములో $\theta = 0$ కావున $\cos\theta = 1 = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$

$$\cos\theta = 1 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$$

6.4.3 Note: $|\cos\theta| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2} < 1$

$\Leftrightarrow (r_1 - r_2)^2 < d^2$ మరియు $(r_1 + r_2)^2 > d^2$

$\Leftrightarrow |r_1 - r_2| < d$ మరియు $r_1 + r_2 > d$

$\Leftrightarrow OP = r_1$, $O^1P = r_2$ OPO^1 త్రిభుజము అయ్యేటట్లు P అనే బిందువు ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow$ దత్త గోళాలు ఖండించుకొనే గోళాలు.

6.4.4 నిర్వచనము: రెండు గోళాల ఖండన కోణము లంబ కోణమయితే ఆ గోళాలను లంబ గోళాలు (orthogonal spheres) అంటాము.

గమనిక: రెండు గోళాలు లంబ గోళాలు కావాలంటే వాటి మధ్య కోణం 90^0, అనగా వాటి వ్యాసార్థాలు, కేంద్రాల మధ్య దూరం $r_1^2 + r_2^2 = d^2$ కావాలని స్పష్టం.

6.4.5 సిద్ధాంతము:

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$S^1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u^1x + 2v^1y + 2w^1z + d^1 = 0$$

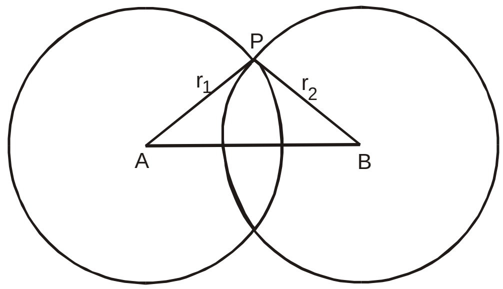
సమీకరణాలు సూచించే గోళాలు లంబ గోళాలవుతాయి

$$\Leftrightarrow 2uu^1 + 2vv^1 + 2ww^1 = d + d^1$$

ఉపపత్తి: దత్త గోళాల కేంద్రాలు A, B అనుకొందాము. r_1 , r_2 వరుసగా వాటి వ్యాసార్థాలు అనుకొంటే

$$A = (-u, -v, -w), B = \left(-u^1, -v^1, -w^1\right)$$

$$r_1 = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}, \quad r_2 = \sqrt{u^{1^2} + v^{1^2} + w^{1^2} - d^1}$$



దత్త గోళాలు లంబ గోళాలు

$\Leftrightarrow r_1 = PA, r_2 = PB, \underline{|APB} = 90^0$ అయ్యేటట్లు P అనే బిందువు ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow AB^2 = r_1^2 + r_2^2$

$\Leftrightarrow \left(u-u^1\right)^2 + \left(v-v^1\right)^2 + \left(w-w^1\right)^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d + u^{1^2} + v^{1^2} + w^{1^2} - d$

$\Leftrightarrow 2uu^1 + 2vv^1 + 2ww^1 = d + d^1$

6.4.6 సిద్ధాంతము: r_1, r_2 వ్యాసార్థాలుగా గల గోళాలు లంబ గోళాలైతే వాటి ఉమ్మడి వృత్తము వ్యాసార్థము $\dfrac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$

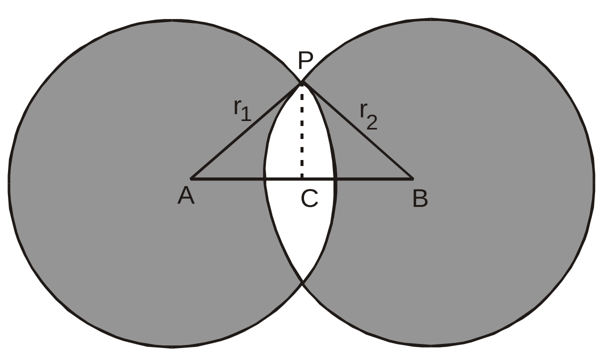
ఉపపత్తి: దత్త గోళాల కేంద్రాలు A, B అని దత్త గోళాలకు P ఒక ఉమ్మడి బిందువని $AB = d$ అని దత్త గోళాల ఛేదక వృత్త వ్యాసార్థము 'a', కేంద్రము 'c' అని అనుకొందాము.

దత్త గోళాలు లంబ గోళాలు కాబట్టి

$$r_1^2 + r_2^2 = d^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$CP = a \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$CP \perp AB \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$



$$AC + CB = AB = d$$

$$\Rightarrow \sqrt{r_1^2 - a^2} + \sqrt{r_2^2 - a^2} = d$$

రెండు వైపులా వర్గీకరించగా

$$r_1^2 - a^2 + r_2^2 - a^2 + 2\sqrt{\left(r_1^2 - a^2\right)\left(r_2^2 - a^2\right)} = d^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\left(r_1^2 - a^2\right)\left(r_2^2 - a^2\right)} = 2a^2 \qquad \left(\because\ r_1^2 + r_2^2 = d^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(r_1^2 - a^2\right)\left(r_2^2 - a^2\right) = a^4$$

$$\Rightarrow r_1^2 r_2^2 - \left(r_1^2 + r_2^2\right) a^2 + a^4 = a^4$$

$$\Rightarrow a = \frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

6.4.7 **సమస్య:** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 = 0,\ \ 3x - 4y + 5z - 15 = 0$ మొత్తం గుండాపోతూ $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$ గోళాన్ని లంబ ఛేదకం చేసే గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త వృత్తం గుండాపోయే గోళ సమీకరణము

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6\right) + \lambda\left(3x - 4y + 5z - 15\right) = 0$$

i.e., $$x^2 + y^2 + z^2 + (3\lambda - 2)x + (3 - 4\lambda)y + (5\lambda - 4)z + 6 - 15\lambda = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

గోళము **(1)** దత్త గోళం

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 4 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

ని లంబ ఛేదకం చేయడానికి నియమం

$$2\frac{(3\lambda - 2)}{2}\cdot 1 + 2\cdot\frac{(3 - 4\lambda)}{2}\cdot 2 + 2\cdot\frac{(5\lambda - 4)}{2}(-3) = 6 - 15\lambda + 11$$

i.e., $3\lambda - 2 + 6 - 8\lambda - 15\lambda + 12 = 17 - 15\lambda$

i.e., $-5\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{5}$

λ విలువను సమీకరణం (1)లో ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన గోళం వచ్చును.

i.e., $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{13}{5}x + \frac{19}{5}y - 5z + 9 = 0$

or $5\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 13x + 19y - 25z + 45 = 0$

6.4.8 **సమస్య:** $(0,3,0)$, $(-2,-1,-4)$ బిందువుల గుండాపోతూ

$x^2 + y^2 + z^2 + x - 3z - 2 = 0,\ 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + x + 3y + 4 = 0$

గోళాలను లంబ ఛేదకం చేసే గోళం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

అనుకొనుము.

ఇది $(0,3,0)$, $(-2,-1,-4)$ల గుండాపోతుంది కావున

$$9 + 6v + d = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

మరియు $4 + 1 + 16 - 4u - 2v - 8w + d = 0$

i.e., $4u + 2v + 8w - d - 21 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$

గోళం (1) దత్త గోళాలు

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 3z - 2 = 0 \text{ మరియు}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2}y + 2 = 0 \text{ లను లంబ ఛేదకం చేస్తే}$$

$$\Leftrightarrow 2u\frac{1}{2} + 2v(0) + 2w\left(\frac{-3}{2}\right) = d - 2$$

మరియు $2u \cdot \frac{1}{4} + 2v \cdot \frac{3}{4} + 2w(0) = d + 2$

$\Leftrightarrow\ u-3w-d+2=0 \quad \cdots \quad (4)$ మరియు

$u+3v-2d-4=0 \quad \cdots \quad (5)$

(2) నుండి $\quad v=\dfrac{-9-d}{6}$

(5) నుండి $\quad u+3\left(\dfrac{-9-d}{6}\right)-2d-4=0 \Rightarrow 2u-9-d-4d-8=0$

$$\Rightarrow u=\frac{5d+17}{2}$$

(4) నుండి $\dfrac{5d+17}{2}-3w-d+2=0 \Rightarrow 5d+17-6w-2d+4=0$

$$\Rightarrow\ w=\frac{3d+21}{6}=\frac{d+7}{2}$$

(3) నుండి $\quad 4\left(\dfrac{5d+17}{2}\right)+2\left(\dfrac{-9-d}{6}\right)+8\left(\dfrac{d+7}{2}\right)-d-21=0$

$$\Rightarrow 38d+114=0 \Rightarrow d=\frac{-114}{38}=-3$$

$\therefore\quad u=1,\ v=-1,\ \ w=2$

$\therefore$ కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$$

6.4.9 సమస్య: $P\ (1,-2,1)$ వద్ద $3x+2y-z+2=0$ తలాన్ని స్పృశిస్తూ $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$ గోళాన్ని లంబఛేదకం చేసే గోళం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: కావలసిన గోళ కేంద్రము C_1 మరియు వ్యాసార్థము r_1 అనుకొనుము.

దత్త గోళం $\quad x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$

(1) యొక్క కేంద్రము $C_2=(2,-3,0)$, వ్యాసార్థం $r_2=\sqrt{4+9-4}=3$

$(1,-2,1)$ బిందువు వద్ద కావలసిన గోళం $3x+2y-z+2=0$ తలాన్ని స్పృశిస్తుంది.

$(1,-2,1)$ బిందువు గుండాపోతూ, పై తలంకి లంబంగా ఉండే రేఖ మీద కేంద్రం C_1 ఉంటుంది. ~~ఈ~~ రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}=r$$

$C_1=(3r+1,\ 2r-2,\ -r+1)$ గాను మరియు C_1 నుండి స్పర్శ బిందువు $P\ (1,-2,1)$కు గల దూరాన్ని వ్యాసార్థం r_1 గాను తీసుకొనుము. అప్పుడు

$$r_1^2=(3r+1-1)^2+(2r-2+2)^2+(-r+1-1)^2 \ =9r^2+4r^2+r^2=14r^2$$

$$\Rightarrow\ r_1=\pm\sqrt{14}\ r=\sqrt{14}\,|\,r\,|$$

కావలసిన గోళం మరియు దత్త గోళం లంబ ఛేదనం చేస్తున్నాయి, కావున

$$C_1\ C_2\ =r_1^2\ +\ r_2^2$$

$$\Rightarrow\ (3r-1)^2+(2r+1)^2+(-r+1)^2=14r^2+9$$

$$\Rightarrow\ 9r^2+1-6r+4r^2+1+4r+r^2+1-2r-14r^2-9=0$$

$$\Rightarrow -4r-6=0\ \Rightarrow r=\frac{-3}{2} \qquad \Rightarrow r_1=\sqrt{14}\cdot\left|\frac{-3}{2}\right|=\frac{3}{2}\sqrt{14}$$

$\therefore$ కావలసిన గోళ కేంద్రము $C_1=\left(3\left(\frac{-3}{2}\right)+1,\ 2\left(\frac{-3}{2}\right)-2,\ \frac{3}{2}+1\right)=\left(\frac{-7}{2},\ -5,\ 5/2\right)$

మరియు వ్యాసార్థము $r_1=\frac{3}{2}\sqrt{14}$

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+(y+5)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\sqrt{14}\right)^2 \equiv\ x^2+y^2+z^2+7x+10y-5z+12=0$$

6.4.10 సమస్య: $x^2+y^2-2ax+r^2=0,\ \ z=0$ వృత్తం గుండాపోయే ప్రతి గోళం $x^2+z^2=r^2,\ y=0$ వృత్తం గుండాపోయే ప్రతి గోళాన్ని లంబ ఛేదకం చేస్తుందని చూపండి.

సాధన: దత్త వృత్తం గుండాపోయే గోళ సమీకరణాలు

$$x^2+y^2+z^2-2ax+r^2+2\lambda z=0 \text{ మరియు}$$

$$x^2+y^2+z^2-r^2+2\mu y=0 \text{ ఇచ్చుట } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

ఈ గోళాలను

$$x^2+y^2+z^2-2ax+2\lambda z+r^2=0 \text{ మరియు}$$

$$x^2+y^2+z^2+2\mu y-r^2=0 \text{ గా వ్రాయవచ్చును.}$$

$$2uu^1+2vv^1+2ww^1=2(-a)0+2\cdot 0\cdot \mu+2\lambda(0)=r^2-r^2$$

$$\Rightarrow 0=0$$

$\therefore$ ఈ రెండు గోళాలు లంబ ఛేదనం చేసుకుంటున్నాయి.

6.4.11 S.A.Q.: $S=0$ గోళం దృష్ట్యా P, Q లు సంయుగ్మ బిందువులైతే PQ వ్యాసంగా గల గోళం $S=0$ ను లంబ ఛేదకం చేస్తుందని చూపండి.

6.4.12 S.A.Q.: $S_1=0$, $S_2=0$ గోళాలు లంబ ఛేదక గోళాలయితే S_2 గోళం దృష్ట్యా S_1 గోళం మీద ఏదైన బిందువు P యొక్క ధ్రువతలం, P గుండాపోయే వ్యాసం రెండవ బిందువు గుండాపోవును.

6.5 మూల తలం మరియు మూల రేఖ:

$C(\bar{e})=(-u,-v,-w)$ కేంద్రంగాను, a వ్యాసార్థం గాను గల గోళ సదిశా సమీకరణము

$$F(\bar{r})=\left|\bar{r}-\bar{c}\right|^2-a^2=0$$

కార్టిసియన్ రూపంలో గోళ సమీకరణము

$$S(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d$$

ఇక్కడ $u^2+v^2+w^2-d=a^2$

$D=(x_1, y_1, z_1)$ ఏదైన ఒక బిందువు నిర్వచనము **(5.4.3)** నుండి D యొక్క బిందుశక్తి S_{11} గా నిర్వచించినాము. D నుండి గీసిన రేఖ గోళమును P, Q ల వద్ద ఖండించిన $DP-DQ=S_{11}$. ఇది రేఖ మీద ఆధారపడదు.

6.5.1 సిద్ధాంతము: సకేంద్రియాలు కాని రెండు గోళాల దృష్ట్యా సమాన బిందు శక్తులు కలిగిన బిందువులు ఆ గోళ కేంద్రాలను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉండే ఒక తలాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

ఉపపత్తి:

దత్త గోళాల సదిశా సమీకరణాలు $\left|\bar{r}-\overline{C_1}\right|^2 = a_1^2, \quad \left|\bar{r}-\overline{C_2}\right|^2 = a_2^2$ అనుకొనుము.

దత్త గోళాల దృష్ట్యా సమాన బిందు శక్తులు కలిగిన బిందువు స్థాన సదిశ $\bar{r}$ అయితే

$$\left|\bar{r}-\overline{C}_2\right|^2 - a_1^2 = \left|\bar{r}-\overline{C}_2\right|^2 - a_2^2$$

$$\text{అనగా} \quad 2\bar{r}\cdot\left(\overline{C_1}-\overline{C_2}\right)+\left|\overline{C_2}\right|^2-\left|\overline{C_1}\right|^2+a_2^2-a_1^2=0$$

ఇది $\bar{r}\cdot\bar{n}=p$ రూపంలో ఉన్నది. కావున పై సమీకరణము కేంద్రాలను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉండే తలాన్ని సూచిస్తుందని గమనించవచ్చు.

$\therefore$ దత్త గోళాల దృష్ట్యా సమాన బిందు శక్తులుంటే బిందువులన్నీ పై తలాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

6.5.2 **నిర్వచనము:** రెండు గోళాల దృష్ట్యా సమాన బిందుశక్తులుంటే బిందువులు ఏర్పరచే తలాన్ని ఆ గోళాల "మూల తలము" (Radical Plane) అంటాము.

6.5.3 **సిద్ధాంతము:** $S=0,\ S^1=0$ గోళాల మూల తలం సమీకరణం $S-S^1=0$

ఉపపత్తి: $S \equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

$S^1 \equiv x^2+y^2+z^2+2u^1x+2v^1y+2w^1z+d^1=0$

సకేంద్రియాలు కాని రెండు గోళాలు అనుకొందాము.

$P(x_1, y_1, z_1)$ ఏదైనా బిందువు దత్త గోళాల మూల తలం పై ఉండుటకు

అనగా $S=0, S^1=0$ల దృష్ట్యా P యొక్క బిందు శక్తులు సమానము కావలె.

$$= \quad s_{11}=s_{11}^1$$

$$\Leftrightarrow\ x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d = x_1^2+y_1^2+z_1^2+2u^1x+2v^1y+2w^1z+d^1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(u-u^1\right)x_1+2\left(v-v^1\right)y_1+2\left(w-w^1\right)z_1+d-d^1=0$$

P యొక్క బిందుపథం

$$2\left(u-u^1\right)x+2\left(v-v^1\right)y+2\left(w-w^1\right)z+d-d^1=0$$

అంటే $S-s^1=0$ ఇది కావలసిన మూల తల సమీకరణము

6.5.4 గమనిక:

1) రెండు ఖండించుకొనే గోళాల ఛ్ఛేదన వృత్తము నిర్దేశించే తలము ఆ గోళ యుగ్మానికి మూల తలము.

2) స్పృశించుకొనే రెండు గోళాల మూల తలము వాటి స్పర్శ బిందువు వద్ద స్పర్శ తలమునకు సమానము.

3) రెండు గోళాల కేంద్రాలను కలిపే రేఖకు ఆ గోళాల మూల తలము లంబంగా ఉంటుంది.

6.5.5 సిద్ధాంతము: $S_1=0, S_2=0, S_3=0$ సమీకరణాలు సరేఖీయాలు కాని కేంద్రాలు గల మూడు గోళాలైతే $S_1=0, S_2=0, S_3=0$, $S_1=0, S_3=0$ గోళాల మూల తలాలు ఒకే రేఖ గుండాపోతాయి.

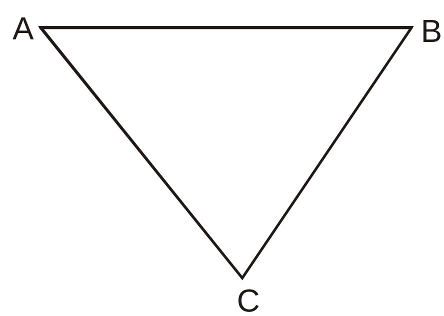
ఉపపత్తి: $S_1=0, S_2=0, S_3=0$ గోళాల కేంద్రాలు A, B, C అనుకోండి.

$S_2=0, S_3=0$ ల మూల తలము (π_1), $S_2-S_3=0$, BC కి లంబంగా ఉంటుంది.

$S_3=0, S_1=0$ ల మూల తలము (π_2), $S_3-S_1=0$, AC కి లంబంగా ఉంటుంది.

$S_1=0, S_2=0$ ల మూల తలము (π_3), $S_1-S_2=0$, AB కి లంబంగా ఉంటుంది.

AB, BC లు ఖండించుకునే రేఖలు కావడం వల్ల π_3, π_1 తలాలకు ఉమ్మడి రేఖ ఉంటుంది.



ఈ ఉమ్మడి రేఖ పై బిందువులన్నీ $S_1-S_2+S_2-S_3=S_2-S_3=0$ ను ధ్రువపరుస్తాయి.

అంటే π_2 తలంలో ఉంటాయి. π_1, π_2, π_3 లు ఒకే రేఖ గుండా పోతాయి.

6.5.6 నిర్వచనము: $S_1=0, S_2=0, S_3=0$ సమీకరణాలు సరేఖీయాలు కాని కేంద్రాలు గల మూడు గోళాలైతే $S_1=0, S_2=0$; $S_2=0, S_3=0$; $S_3=0, S_1=0$ గోళాల మూల తలాల ఉమ్మడి రేఖను దత్త గోళాల "మూల రేఖ" (Radical Line) అంటాము.

6.5.7 సిద్ధాంతము: అతలీయ (non coplanar) బిందువులు కేంద్రాలుగా గల నాలుగు గోళాలను మూడేసి చొప్పున తీసుకొన్నప్పుడు వచ్చే నాలుగు మూల రేఖలు అనుషక్తాలు.

ఉపపత్తి:

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$$

$$S' \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$$

$$S'' \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_3x + 2v_3y + 2w_3z + d_3 = 0$$

$$S''' \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_4x + 2v_4y + 2w_4z + d_4 = 0$$

లు దత్త గోళాల సమీకరణాలు అనుకోండి.

$S = 0, S' = 0$ గోళాల మూల తలము $S - S' = 0$

$$S - S' \equiv 2(u_1 - u_2)x + 2(v_1 - v_2)y + 2(w_1 - w_2)z + d_1 - d_2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$S = 0, S'' = 0$ ల మూల తలము $S - S'' = 0$

$$2(u_1 - u_3)x + 2(v_1 - v_3)y + 2(w_1 - w_3)z + d_1 - d_3 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

మరియు $S = 0, S''' = 0$ ల మూల తలము $S - S''' = 0$

$$2(u_1 - u_4)x + 2(v_1 - v_4)y + 2(w_1 - w_4)z + d_1 - d_4 = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

దత్త గోళాల కేంద్రాలు $(-u_1, -v_1, -w_1)$, $(-u_2, -v_2, -w_2)$, $(-u_3, -v_3, -w_3)$,

$(-u_4, -v_4, -w_4)$ ఒకే తలంలో లేకపోవడం వల్ల

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \\ u_4 & v_4 & w_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

అనగా
$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 & 0 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 & 0 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ (1), (2), (3) సమీకరణాలు సూచించే తలాలు ఒకే ఒక బిందువు P గుండా పోతాయి.

P బిందువు $S = 0, S' = 0, S' = 0, S'' = 0$ ల మూల తలాల మీద ఉండటము చేత

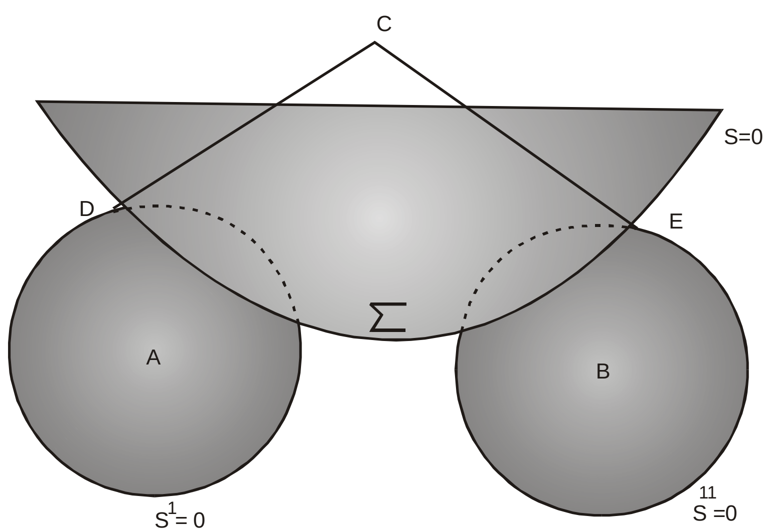
$S = 0, S' = 0, S'' = 0$ గోళ త్రయము మూల రేఖ P పైన ఉంటుంది.

ఇదే రీతిగా ఇచ్చిన నాల్గు గోళాలలోని ప్రతి త్రికరణానికి మూల రేఖ మీద P ఉంటుంది. అందుచేత దత్త గోళాల మూల రేఖలకు P అనుషక్త బిందువు.

6.5.8 **నిర్వచనము:** అతలీయ కేంద్రాలు గల నాలుగు గోళాల నుండి ఏర్పడే గోళ త్రికాల మూల రేఖలు అనుషక్తములయే బిందువును దత్త గోళ చతుష్ఠ "మూల కేంద్రము" (Radical Centre) అంటాము.

6.5.9 **సిద్ధాంతము:** రెండు గోళాలతో లంబ కోణం చేసే గోళము కేంద్రము ఆ గోళాల మూల తలం పై ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: $S' = 0, S'' = 0$ రెండు గోళాలతో లంబ కోణము చేసే గోళము $S = 0$ అనుకొనుము.



$S' = 0, S'' = 0, S = 0$ గోళా కేంద్రాలు వరుసగా A, B, C అని A, B, C ల ఒక ఉమ్మడి బిందువు D అని, $S = 0, S'' = 0$ ఉమ్మడి బిందువు E అని అనుకొందాము.

$S = 0, S' = 0; S = 0, S'' = 0$ లు లంబ గోళ ద్వయాలు కావడం వల్ల CD, CE లు వరుసగా $S' = 0, S'' = 0$ లకు స్పర్శ రేఖలవుతాయి. $\therefore S' = 0, S'' = 0$ ల దృష్ట్యా CD^2, CE^2 లు C బిందు శక్తులు అవుతాయి. $CD = CE$ కాబట్టి దత్త గోళాలు దృష్ట్యా C బిందుశక్తులు సమానము.

$\therefore$ దత్త గోళ యుగ్మము మూలరేఖ పై C ఉంటుంది.

6.6 సహతల గోళ సరణి:

6.6.1 నిర్వచనము: ఒక గోళ సరణిలో ఏ రెండు గోళాలకైనా ఒకే మూల తలం ఉంటే ఆ గోళాలను "సహితల గోళ సరణి" అంటాము.

6.6.2 సిద్ధాంతము: $S=0$ ఒక గోళం, $U=0$ ఒక తలం అయితే $U=0$ మూల తలంతో నిర్ధిష్టమయ్యే సహతల గోళ సరణి సమీకరణం $S+\lambda U=0$ (λ వాస్తవ సంఖ్య)

ఉపపత్తి: $S+\lambda U=0 \cdot\cdot\cdot (1)$ తీసుకుందాము.

(1) సూచించే సరణిలో $S+\lambda_1 U=0 \cdot\cdot\cdot (2)$

$$S+\lambda_2 U=0 \left(\lambda_1 \neq \lambda_2\right) \cdot\cdot\cdot (3)$$

లు రెండు గోళాలనుకొందాం. (2), (3)ల మూలతలం $\left(\lambda_1-\lambda_2\right)U=0$ అనగా $U=0 \quad \left(\because \lambda_1 \neq \lambda_2\right)$

ఇది λ పై ఆధారపడదు.

$\therefore$ (1) సరణిలో ఏ రెండు గోళాలకైనా మూల తలం $U=0$.

$\therefore U=0$ మూల తలంతో నిర్ధిష్టమయ్యే సహతల గోళ సరణి సమీకరణం $S+\lambda U=0$, λ వాస్తవ సంఖ్య.

6.6.3 ఉప సిద్ధాంతము: $S=0, S'=0$ లు సకేంద్రియాలు కాని రెండు గోళాలతో మూల తలంతో నిర్ధిష్టమయ్యే సహతల గోళ సరణి సమీకరణం

$$\lambda_1 S+\lambda_2 S'=0, \text{ (} \lambda_1, \lambda_2 \text{ లు వాస్తవ సంఖ్యలు).}$$

6.6.4 సిద్ధాంతము: సహతల గోళ సరణిలోని గోళాల కేంద్రాలు సరేఖీయాలు. ఈ రేఖ మూల తలానికి లంబంగా ఉండును.

ఉపపత్తి: దత్త సహితల గోళ సరణికి ఉమ్మడి మూల తలం $U=0$ అనుకుందాం. ఈ సరణిలో $S_1=0, S_2=0, S_3=0$ గోళాల కేంద్రాలు వరసగా C_1, C_2, C_3 అనుకొనుము. రెండు గోళాల మూల తలం ఆ గోళాల కేంద్రాలను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉంటుంది కావున C_1C_2 మరియు C_2C_3 రేఖలు మూల తలం $U=0$కు లంబంగా ఉంటాయి. అందుచేత C_1 , C_2, C_3లు సరేఖీయాలు. కాబట్టి సహతల గోళ సరణిలోని కేంద్రాలన్నీ ఒకే రేఖ మీద ఉంటాయి. ఈ రేఖ మూల తలానికి లంబంగా ఉంటుంది.

6.7 సహతల గోళ సరణి యొక్క పరామితీయ రూపము:

6.7.1 సిద్ధాంతము: మూలతలం YZ తలంగాను, గోళ సరణి కేంద్ర రేఖ $X-$ అక్షంగాను గల సహతల గోళ సరణి యొక్క పరామితీయ సమీకరణము $x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0$

యిచ్చట d స్థిర సంఖ్య మరియు λ పరామితి (Parameter)

ఉపపత్తి: $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$

సహతల గోళ సరణిలోని గోళం అనుకుందాం.

దీని కేంద్రం $(-u, -v, -w)$, $X -$ అక్షం పై ఉంటుంది. కావున $v = w = 0$

గోళం (1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + d = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$గా మారును.

(2) సరణిలోని రెండు గోళాలు

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + d_1 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + d_2 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (4)$$

(3), (4)ల మూల తలం $2(u_1 - u_2)x + d_1 - d_2 = 0$

$u_1 \neq u_2$ ఎందుకంటే గోళ కేంద్రాలు సమానం కావు

కాబట్టి $x = \dfrac{d_1 - d_2}{2(u_1 - u_2)}$ అని రాయవచ్చు. కాని మూల తలం YZ తలం కావడం వల్ల $x = 0$ అంటే

$d_1 - d_2 = 0 \Rightarrow d_1 = d_2$

కాబట్టి సరణి (2)లో ఏ గోళానికైనా d స్థిరం అని తెలుస్తుంది. కాబట్టి విభిన్న 'u'లకు d మాత్రం స్థిరంగా ఉంటూ సరణిలోని విభిన్న గోళాలుంటాయి. $u = \lambda$ అనుకొంటే ఈ సరణి (2)కి పరామతీయ సమీకరణము $x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + d = 0$, d స్థిర సంఖ్య, λ పరామితి.

6.7.2 పరామితీయ రూపంలోని సహతల గోళ సరణి సమీకరణం $x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + d = 0$ యొక్క స్వభావము:

λ పరామితి, d స్థిర సంఖ్య అయితే $x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + d = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$

సరణికి మూల తలం YZ తలం $\Rightarrow x = 0 \cdots\cdots (2)$

(1), (2)లు ఖండించుకొనే బిందువులు $x = 0,\ y^2 + z^2 + d = 0$ (or) $x = 0,\ y^2 + z^2 = \left(\sqrt{-d}\right)^2$

సందర్భము (1): $d < 0$ అనుకుందాం అప్పుడు $-d = k > 0$. ఈ సందర్భంలో ఖండన వృత్తం $x = 0,\ y^2 + z^2 = \left(\sqrt{k}\right)^2$ అవుతుంది. దత్త సరణిలోని ప్రతి గోళం దీని గుండా పోతుంది. కాబట్టి $d < 0$ అయిన సరణిలోని ప్రతి రెండు గోళాలు ఖండించుకుంటాయి.

సందర్భము (2): $d=0$ అయితే ఖండన వృత్తం $x=0,\ y^2+z^2=0$ అవుతుంది $\Leftrightarrow x=0,\ y=0, z=0$ ఇది బిందు వృత్తం. $\therefore\ d=0$ అయితే సరణిలోని గోళాలన్ని మూల బిందువు వద్ద స్పృశించుకుంటాయి.

సందర్భము (3): $d>0$ అయితే $y^2+z^2=-d<0$ ఇది అసంభవం.

కాబట్టి దత్త సరణిలో ఏ రెండు గోళాలు ఖండించుకోవు.

6.8 అవధి బిందువులు:

6.8.1 నిర్వచనము: ఒక సహతల గోళ సరణికి చెందే బిందు గోళాలను ఆ సరణికి అవధి బిందువులని అంటాం.

6.8.2 సమస్య: λ పరామితి, d స్థిర సంఖ్య అయితే సహతల గోళ సరణి $S \equiv x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0$ యొక్క అవధి బిందువులు కనుక్కోండి.

సాధన: $S=0$ గోళ కేంద్రము $(-\lambda,0,0)$ మరియు వ్యాసార్ధం $r=\sqrt{\lambda^2-d}$

గోళం $S=0$ బిందు గోళం $\Leftrightarrow\ \sqrt{\lambda^2-d}=0\ \Leftrightarrow\ \lambda^2=d \Leftrightarrow \lambda=\pm d$

సందర్భము (1): $d>0$ అయితే λ కు $+\sqrt{d}, -\sqrt{d}$ అనే రెండు విలువలుంటాయి. ఇటువంటి సరణికి రెండు అవధి బిందువులు $(\sqrt{d},\ 0,\ 0), (-\sqrt{d},\ 0,\ 0)$ మాత్రమే ఉంటాయి. ఈ సందర్భంలో రెండు గోళాలు ఖండించుకోవు.

సందర్భము (2): $d=0$ అయితే $\lambda=0$. దత్త సరణికి ఒకే ఒక అవధి బిందువు $(0,\ 0,\ 0)$ ఉంటుంది.

సందర్భము (3): $d<0$ అయితే దత్త సరణికి అవధి బిందువులు ఉండవు. ఈ సందర్భంలో సరణి ఖండించుకొనే గోళాలు కలిగి ఉంటాయి.

6.8.3 సమస్య:

(i) $v,\ w$ విలువలు ఏవైనప్పటికి $x^2+y^2+z^2+2vy+2wz-d=0,\ d>0 \cdots\cdots\cdots(1)$

గోళం సహతల గోళ సరణి $x^2+y^2+z^2+2kx+d=0 \cdots\cdots\cdots(2)$

యొక్క అవధి బిందువుల గుండా పోతుందని చూపండి. మరియు గోళం **(1)**, సహతల గోళ సరణి **(2)**లోని ప్రతి గోళాన్ని లంబ ఛేదకం చేస్తుందని చూపండి.

(ii) సహతల గోళ సరణి అవధి బిందువుల గుండాపోయే ప్రతి గోళం ఆ సరణిలోని ప్రతి గోళాన్ని లంబ ఛేదకం చేస్తుందని చూపండి.

సాధన:

(i) గోళం (2) యొక్క కేంద్రం $=(-k, 0,0)$, వ్యాసార్థం $r=\sqrt{k^2-d}$

$r=0 \Leftrightarrow k^2-d=0 \Rightarrow k=\pm\sqrt{d}$

గోళం (2) యొక్క అవధి బిందువులు $\left(\sqrt{d}, 0,0\right)$, $\left(-\sqrt{d}, 0,0\right)$ ఈ బిందువులను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$d+0+0+0+0-d=0$ మరియు $d+0+0+0+0-d=0$

$\Rightarrow$ గోళం (2) అవధి బిందువుల గుండా గోళం (1) పోతుంది.

6.4.5 సిద్ధాంతములోని రెండు గోళాల లంబ ఛేదన నియమాన్ని (1), (2) గోళాలకు సరి చూడగా

$$0=2(0)+2v(0)+2w(0)=-d+d$$

అందుచేత గోళం (1) సహతల గోళ సరణి (2)లోని ప్రతి గోళాన్ని లంబ ఛేదకం చేస్తుంది.

(ii) సహతల గోళ సరణి $x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0,\ d>0 \quad \cdots \quad (3)$

దీని అవధి బిందువులు $\left(\sqrt{d}, 0, 0\right)$, $\left(-\sqrt{d}, 0, 0\right)$ ఈ బిందువుల గుండాపోయే గోళం

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+c=0 \quad \cdots \quad (4)$$ అనుకొందాం.

ఇది అవధి బిందువుయిన $\left(\sqrt{d}, 0, 0\right)$, $\left(-\sqrt{d}, 0, 0\right)$ల గుండా పోతుంది.

కాబట్టి (4) నుండి $d+0+0+2u\sqrt{d}+0+0+c=0 \Rightarrow d-2u\sqrt{d}+c=0 \quad \cdots \quad (5)$

ఇలాగే $d-2u\sqrt{d}+c=0 \quad \cdots \quad (6)$

(5), (6)ల నుండి $u=0, c=-d$

$\therefore (4) \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2vy+2wz-d=0 \quad \cdots \quad (7)$

గోళాలు (3), (7) లంబంగా ఖండించుకుంటాయి.

6.8.4 సమస్య: u, v, w లు పరామితులు, d స్థిర సంఖ్య.

$$S \equiv x^2+y^2+z^2+2vy+2wz-d=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$S^1 \equiv x^2+y^2+z^2+2ux+d=0 \quad \cdots \quad (2)$$

గోళాల ఛేదక వృత్తం సహతల గోళ సరణి (1) యొక్క బిందు గోళాల బిందుపదం అని చూపండి.

సాధన: సహతల గోళ సరణి (1) యొక్క అవధి బిందువులు $(0,-v,-w)$ మరియు వ్యాసార్థము $r=\sqrt{v^2+w^2+d}=0$

$$\Rightarrow v^2+w^2+d=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

(1), (2) గోళా ఛేదక వృత్తం ఆ గోళాల మూల తలము $S-S^1=0$ పై ఉండును.

i.e., $-2ux+2vy+2wz-2d=0$

i.e., $-ux+vy+wz-d=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$

(1), (2) గోళాల అవధి బిందువులు ఆ గోళాల ఛ్ఛేదక వృత్తం పై ఉంటాయి.

$\Leftrightarrow (0,-v,-w)$ బిందువు తలం (4)పై ఉండును.

$\Leftrightarrow -v^2-w^2-d=0$ i.e., $v^2+w^2-d=0$

ఇదియే (3)వ సమీకరణము కాబట్టి (1), (2)ల ఛ్ఛేదక వృత్తం సహతల గోళ సరణి (1) యొక్క బిందు గోళాల బిందు పదం.

6.8.5 **సమస్య:** $x^2+y^2+z^2-20x+30y-40z+29+\lambda(2x-3y+4z)=0$ సహాక్ష గోళ సరణి అవధి బిందువులు కనుక్కోండి.

సాధన: దత్త సహాక్ష గోళ సరణి $x^2+y^2+z^2+(-20+2\lambda)x+(30-3\lambda)y+(-40+4\lambda)z+29=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

కేంద్రము $=\left(10-\lambda, \dfrac{3\lambda-30}{2}, 20-2\lambda\right)$

వ్యాసార్థము $=\sqrt{(10-\lambda)^2+\left(\dfrac{3\lambda-30}{2}\right)^2+(20-2\lambda)^2-29}$

(1) బిందు గోళము $\Leftrightarrow (10-\lambda)^2+\left(\dfrac{3\lambda-30}{2}\right)^2+(20-2\lambda)^2-29=0$

$$\text{L.H.S.} = 100+\lambda^2-20\lambda+\frac{9\lambda^2+900-180\lambda}{4}+400+4\lambda^2-80\lambda-29=0$$

$$=29\lambda^2-580\lambda+2784$$

$= \lambda^2 - 20\lambda + 96$

$= (\lambda - 8)(\lambda - 12)\ O \Leftrightarrow \lambda = 8$ లేదా $\lambda = 12$.

కాబట్టి (1) యొక్క అవధి బిందువులు $\left(10-8, \frac{3(8)-30}{2}, 20-2(8)\right)$ మరియు

$$\left(10-12, \frac{3(12)-30}{2}, 20-2(12)\right)$$

అనగా $(2, -3, 4)$ మరియు $(-2, 3, -4)$

6.8.6 **సమస్య:** $S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0 \quad \cdots \quad (2)$

$S_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 8z + 6 = 0 \quad \cdots \quad (3)$ గోళాల మూల రేఖను కనుక్కోండి.

సాధన: (1), (2)ల మూల తలము $S_1 - S_2 = 0$

అనగా $2x - 2y + 2z + 2 = O$ అనగా $\quad \cdots \quad (4)$

(2), (3)ల మూల తలము $S_2 - S_3 \equiv 3x - 6y + 8z + 6 = 0 \quad \cdots \quad (5)$

(4), (5) సమీకరణాలు దత్త గోళాల మూల రేఖ.

6.8.7 **సమస్య:** $S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0 \quad \cdots \quad (2)$

$S_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 8z + 6 = 0 \quad \cdots \quad (3)$

$S_4 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + 4y - 6z - 2 = 0 \quad \cdots \quad (4)$

గోళాల మూల కేంద్రము కనుక్కోండి.

సాధన: (1), (2)ల మూల తలము $S_1 - S_2 \equiv x - y + z + 1 = 0 \quad \cdots \quad (5)$

(1), (3)ల మూల తలము $S_1 - S_3 \equiv 3x - 6y + 8z + 6 = 0$

(1), (2), (3)ల మూల రేఖా సమీకరణము $x-y+z+1=0=3x-6y+8z+6 \quad \cdots \quad (6)$

(3), (4)ల మూల తలము $S_3 - S_4 \equiv 4x-6y+14z+8=0$

అనగా $2x-3y+7z+4=0$

(1), (3), (4)ల మూల రేఖా సమీకరణము

$$3x-6y+8z+6=0=2x-3y+7z+4=0 \quad \cdots \quad (7)$$

(5), (6)ల ఖండన బిందువు (5), (6), (7)లను సాధించగా వచ్చును.

పై సమీకరణాల సాధకం $x=\dfrac{-1}{5},\ y=\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{3}{10}$ కాబట్టి మూల కేంద్రము $\left(\dfrac{-1}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{10}\right)$

6.8.8 సమస్య: $A(a,0,0),\ B(0,b,0),\ C(0,0,c)$ కేంద్రాలుగాను, r_1, r_2, r_3 లువ్యాసార్థాలుగాను గల మూడు గోళాలు మూల బిందువు 0; A, B, C ల గుండా పోయే గోళాల మూల కేంద్రం,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \cdots \quad (*)$$

అయినప్పుడు $ax+by+cz=0$ తలం పై ఉంటుందని చూపండి.

సాధన: గోళాల సమీకరణాలు వరుసగా

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = r_1^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2ax+a^2-r_1^2=0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$(x-0)^2 + (y-b)^2 + (z-0)^2 = r_2^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2by+b^2r_2^2=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = r_3^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2cz+c^2-r^2=0 \quad \cdots \quad (3)$$

నాలుగో గోళం (OABC గోళం) $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0 \quad \cdots \quad (4)$

(1), (2)ల మూల తలం $-2x+2by+a^2-b^2-r_1^2+r_2^2=0 \quad \cdots \quad (5)$

(1), (3)ల మూల తలం $-2ax+2cz+a^2-c^2+r_3^2-r_1^2=0 \quad \cdots \quad (6)$

(1), (4)ల మూల తలం $-ax+by+cz+a^2-r_1^2 \equiv -2ax+2by+2cz+2a^2-2r_1^2=0 \quad \cdots \quad (7)$

(5), (6), (7)లను సాధించగా మూల కేంద్రము వచ్చును.

$(7)-(5) \equiv 2cz+a^2+b^2-r_1^2-r_2^2=0 \quad \cdots \quad (8)$

$$(7)-(6) \equiv 2by + a^2 + c^2 - r_1^2 - r_3^2 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (9)$$

$$(7) - [(5)+(6)] \equiv 2ax + b^2 + c^2 - r_2^2 - r_3^2 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

$$(8)+(9)+(10) \equiv 2ax + 2by + 2cz + 2\left(a^2 + b^2 + c^2 - 2\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2ax + 2by + 2cz = 0 \qquad \text{((*)ను ఉపయోగించగా)}$$

$$\Rightarrow ax + by + cz = 0$$

$\therefore$ నాలుగు గోళాల మూల కేంద్రము

$ax + by + cz = 0$ తలం పై ఉన్నది.

6.8.9 సమస్య:

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4z + 4 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

$$S_3 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 6y - 4z - 2 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

సమీకరణాలు సూచించే గోళాలకు P బిందువు నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖలు పొడవులు సమానమయితే P బిందువు $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{3}$ సమీకరణం సూచించే సరళరేఖ పై ఉంటుందని చూపండి.

సాధన: P యొక్క బిందు పదము దత్త గోళాల మూల రేఖయే. (1), (2)ల మూల తలము

$$S_1 - S_2 \equiv 2x - 2y + 2z + 2 = 0 \quad \text{అనగా} \quad x - y + z + 1 = 0$$

(1), (3)ల మూల తలము $S_1 - S_3 \equiv x - 4y + 6z + 4 = 0$

దత్త గోళాల మూల రేఖా సమీకరణము $x - y - z + 1 = 0 = x - 4y + 6z + 4 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$

రేఖ (4) యొక్క దిక్ సఖ్యలు ℓ, m, n అనుకొనిన

$$\ell - m + n = 0, \quad \ell - 4m + 6n = 0$$

వీటిని సాధించగా $\frac{\ell}{2} = \frac{m}{5} = \frac{n}{3}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$z=0$ విలువను (4)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$x-y+1=0,\quad x-4y+4=0$$

వీటిని సాధించగా $x=0,\ y=1$ వచ్చును.

$\therefore (0,1,0)$ బిందువు సరళరేఖ (4) పై ఉండును. సరళరేఖ (4) యొక్క సౌష్ఠవ రూపము

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-0}{3}\quad \text{(లేక)}\quad \frac{x}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{3}$$

6.9 S.A.Q.లకు జవాబులు:

6.9.1 S.A.Q. 6.4.11 యొక్క సాధన:

కావలసిన గోళ సమీకరణము

$$S=x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad \cdots \quad (1)$$

మరియు $P=(x_1,\ y_1,z_1),\quad Q=(x_2,y_2,z_2)$ అనుకొనుము.

గోళం (1) దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువ తలము

$$S_1 \equiv xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0 \quad \cdots \quad (2)$$

P, Q సంయుగ్మ బిందువులు కావున, Q బిందువు P యొక్క ధ్రువ తలం పై ఉండును.

$$\therefore x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+u(x_1+x_2)+v(y_1+y_2)+w(z_1+z_2)+d=0 \quad \cdots \quad (3)$$

PQ వ్యాసముగా గల గోళ సమీకరణము

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2) \equiv$$
$$x^2+y^2+z^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y-(z_1+z_2)z+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0 \quad \cdots \quad (4)$$

గోళాలు (1), (3)లు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నాయి కాబట్టి

$$-2u\frac{(x_1+x_2)}{2}-2v\frac{(y_1+y_2)}{2}-2w\frac{(z_1+z_2)}{2}=d+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

అనగా $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+u(x_1+x_2)+v(y_1+y_2)+w(z_1+z_2)+d=0$

ఇది (3)వ సమీకరణము.

$\Leftrightarrow$ P, Q లు సంయుగ్మ బిందువులు.

6.9.2 S.A.Q. 6.4.12 యొక్క సాధన:

$S_1 = 0$ గోళం మీద PQ వ్యాసముగా కలిగిన బిందువులు $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ అనుకొనుము.

PQ వ్యాసముగా గల గోళ సమీకరణము

$$S_1 \equiv (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) \equiv 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y - (z_1 + z_2)z + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

S_2 గోళ సమీకరణము

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u^1x + 2v^1y + 2w^1z + d^1 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$ అనుకొనుము.

దత్తాంశము ప్రకారం (1), (2) గోళాలు లంబంగా ఖండించుకుంటాయి.

కాబట్టి $-2u^1(x_1 + x_2) - 2v^1(y_1 + y_2) - 2w^1(z_1 + z_2) = d^1 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

అనగా $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + u^1(x_1 + x_2) + v^1(y_1 + y_2) + w^1(z_1 + z_2) + d^1 = 0 \quad \cdots \quad (3)$

$S_2 = 0$ గోళం దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువ తలం

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + u^1(x + x_1) + v^1(y + y_1) + w^1(z + z_1) + d^1 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

ఈ తలం Q గుండా పోతుంది కాబట్టి

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + u^1(x_1 + x_2) + v^1(y_1 + y_2) + w^1(z_1 + z_2) + d^1 = 0$$

ఇది (3)వ సమీకరణము

$\therefore$ $S_2 = 0$ గోళం దృష్ట్యా $S_1 = 0$ గోళం మీద బిందువు P యొక్క ధ్రువ తలం Q గుండా పోతుంది.

6.10 సారాంశము:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత విద్యార్థికి రెండు గోళాల మధ్య కోణం, లంబ గోళాలు, మూల తలము, మూల రేఖ, మూల కేంద్రము, సహతల గోళ సరణులు వాటి అవధి బిందువుల గురించి స్పష్టమైన అవగాహన కలుగును.

6.11 సాంకేతిక పదాలు:

లంబ ఛేదనము

మూల తలము మరియు మూలరేఖ

మూల కేంద్రము

సహతల గోళ సరళి

అవధి బిందువులు

6.12 అభ్యాసము:

1. $x^2+y^2+z^2-4=0$, $x^2+y^2+z^2-2x-2y=0$ గోళాల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

2. $x^2+y^2+z^2+6y+2z+8=0$

   $x^2+y^2+z^2+6x+8y+4z+20=0$ గోళాలు లంబ గోళాలని చూపండి.

3. $x^2+y^2+z^2-14=0$, $x^2+y^2+z^2+4y-4=0$, $x^2+y^2+z^2+6z-9=0$

   గోళాలను లంబంగా ఖండించే గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

4. $(1,-2,1)$ బిందువు వద్ద $3x+2y-z+2=0$ తలాన్ని స్పృశిస్తూ

   $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$ గోళాన్ని లంబ ఛేదకం చేసే గోళ సమీకరణమును కనుక్కోండి.

5. $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+2=0$

   $x^2+y^2+z^2+4y=0$

   $x^2+y^2+z^2+3x-2y+8z+6=0$

   గోళాల మూల రేఖను కనుక్కోండి.

6. $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+2=0$

   $x^2+y^2+z^2+4x+4z+4=0$

   $x^2+y^2+z^2+x+6y-4z-2=0$

   గోళాల మూల రేఖను సౌష్ఠవ రూపంలో వ్రాయుము.

7. A, B రెండు స్థిర బిందువులు మరియు PA=nPB అగునట్లు P బిందువు చరించిన P యొక్క బిందు పథం ఒక గోళం అని చూపుము. n యొక్క అన్ని విలువలకు ఇలాంటి గోళాలన్నింటికి ఉమ్మడి మూల తలము ఉండునని చూపుము.

8. S_1, S_2 అనే రెండు గోళాలను గురు వృత్తాలలో ఖండించే గోళాలన్నీ రెండు ఉమ్మడి బిందువులు కలిగి ఉంటాయని చూపండి.

9. ఈ క్రింది గోళాలు సహతల గోళ సరణిలో ఉంటాయని చూపండి.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y + 12z + 22 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 6y + 9z + 18 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5x + 10y + 15z + 26 = 0$$

10. $(0,1,2)$ బిందువు గుండాపోతూ ఈ క్రింది గోళాలు నిర్ధారించే సహతల గోళ సరణికి చెందిన గోళ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 2z = 0 \ ; \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y - z + 10 = 0$$

11. ఈ క్రింది సహతల గోళ సరణుల అవధి బిందువులను కనుగొనుము

(i) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 6 = 0 \ ; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 6z + 6 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 6 = 0 \ ; \quad x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 6 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 32 = 0 \ ; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 7x + z + 23 = 0$

12. $(-1,2,1), (-2,1,-1)$ అవధి బిందువులుగా గల సహతల గోళ సరణి మూల తలాన్ని కనుక్కోండి.

13. సహతల గోళ సరణి యొక్క ఒక అవధి బిందువు $(-2,1,-1)$ మరియు మూల తలము $x + y + 2z = 0$ అయితే రెండవ అవధి బిందువును కనుగొనుము.

14. $3x + 4y = 15$ అను తలమును స్పృశించు $\left(x^2 + y^2 + z^2 - 5\right) + \lambda(2x + y + 3z - 3) = 0$ సహతల గోళ సరణి యొక్క రెండు గోళముల సమీకరణములను కనుగొనుము.

15. ఒక సహతల గోళ సరణి గోళం మరియు ఏదైనా దత్త గోళముల మూల తలములు ఒక రేఖ గుండా పోవునని నిరూపించుము.

6.13 జవాబులు:

1) $\frac{\pi}{4}$

3) $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 39x + 15y + 5z + 4z = 0$

4) $x^2+y^2+z^2+7x+10y-5z+12=0$

5) $x-y+z+1=0=3x-6y+8z+2$

6) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{3}{5}$

10) (i) $x^2+y^2+z^2+4x-5y-5z+10=0$

11) (i) $(-1,2,1),(-2,1,1)$, (ii) $(-1,2,1),(-1,1,-1)$, (iii) $(3,1,-2),(5,3,4)$.

12) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+6+\lambda(x+y+2z)=0, \quad x+y+2z=0$

13) $(-1,2,1)$

14) $5(x^2+y^2+z^2)-8x-4y-12z-13=0$

6.14 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. r_1, r_2 వ్యాసార్థులుగా గల రెండు గోళాలు లంబ ఛేధకం చేస్తే వాటి ఉమ్మడి వృత్తం వ్యాసార్థం $\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ అని చూపండి.

2. రెండు గోళాలలో లంబ కోణం చేసే గోళ కేంద్రం వాటి మూలరేఖ మీద ఉంటుందని చూపండి.

3. కింది గోళాలు నిర్దేశించే సహతల గోళ సరణికి అవధి బిందువులు కనుక్కోండి.

$$x^2+y^2+z^2+3x-3y+6=0 \;;\quad x^2+y^2+z^2-6y-6z+6=0$$

6.15 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: (1) $x^2+y^2+z^2+3x-3y+6=0$, (2) $x^2+y^2+z^2-6y-6z+6=0$ గోళాలతో నిర్ధిష్టమయ్యే సహతల గోళ సరణి అవధి బిందువులు కనుక్కోండి

ఆశయం: దత్త గోళాలతో నిర్ధిష్టమయ్యే సహతల గోళ సరణి అవధి బిందువులను కనుగొనవలెను.

నిర్వచనాలు మరియు సిద్ధాంతాలు:

(1) సకేంద్రియాలు కాని రెండు గోళాల దృష్ట్యా బిందు శక్తులు సమానమయ్యే బిందువులతో ఏర్పడే తలాన్ని ఆ గోళాల మూల తలం అంటారు.

(2) ఒక సరణిలో ఏ రెండు గోళాలకైనా ఒకే మూల తలం ఉండే ఆ గోళాలను సహతల గోళ సరణి అంటాం.

(3) ఒక సహతల గోళ సరణికి చెందే బిందు గోళాలను ఆ సరణికి అవధి బిందువులని అంటాం.

సాధన: (1), (2)ల మూల తలం $3x+3y+6z=0$ అనగా $x+y+2z=0 \quad \cdots \quad (3)$

సరణిలో గోళానికి సమీకరణం

$$x^2+y^2+z^2+3x-3y+6+\lambda(x+y+2z) \equiv x^2+y^2+z^2+(3+\lambda)x+(\lambda-3)y+2\lambda z+6=0 \quad \cdots \quad (4)$$

గోళం (4) యొక్క కేంద్రము $=\left(-\left(\frac{3+\lambda}{2}\right), -\left(\frac{\lambda-3}{2}\right), -\lambda\right)$

వ్యాసార్థం $=\sqrt{\left(\frac{3+\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda-3}{2}\right)^2+\lambda^2-6}$

సరణిలోని అవధి బిందువులకు వ్యాసార్థం $=0$.

$$\therefore \left(\frac{3+\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda-3}{2}\right)^2+\lambda^2-6=0$$

$$\Rightarrow 9+\lambda^2+6\lambda+\lambda^2+9-6\lambda+4\lambda^2-24=0$$

$$\Rightarrow 6\lambda^2-6=0 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 1$$

λ విలువను గోళం (4) యొక్క కేంద్రంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\left(-\frac{3+1}{2}, -\frac{1-3}{2}, -1\right), \ \left(-\frac{3-1}{2}, \ -\frac{-1-3}{2}, \ -(-1)\right)$$

అంటే $(-2,1,-1), (-1,2,1)$ ఇవి కావలసిన అవధి బిందువులు.

పాఠ్యభాగ రచయిత
డా॥ B. రామిరెడ్డి

పాఠము - 7

శంఖువు - 1

7.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత విద్యార్థి శంఖువును గురించిన వివిధ అంశములు అనగా శంఖువు యొక్క సమీకరణము, శీర్షం, జనక రేఖ, ద్వి ఘాత శంఖువు, స్పర్శ రేఖలు, స్పర్శ తలము, విలోమ శంఖువు మొదలగు వాటి గురించి నేర్చుకుంటారు.

7.2 పాఠ్యాంశాలక్రమము:

ఈ పాఠంలో క్రింది భాగాలు ఉన్నవి.

7.3 ఉపోద్ఘాతము

7.4 నిర్వచనములు, ఉదాహరణలు

7.5 శంఖువు సమీకరణములు - వివిధ రకములు

7.6 రెండవ తరగతి సాధారణ సమీకరణము

7.7 స్పర్శ రేఖలు, స్పర్శ తలములు

7.8 విలోమ శంఖువు

7.9 సంగ్రహ సారాంశము

7.10 సాంకేతిక పదములు

7.11 అభ్యాసము

7.12 అభ్యాసమునకు సమాధానములు

7.13 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు

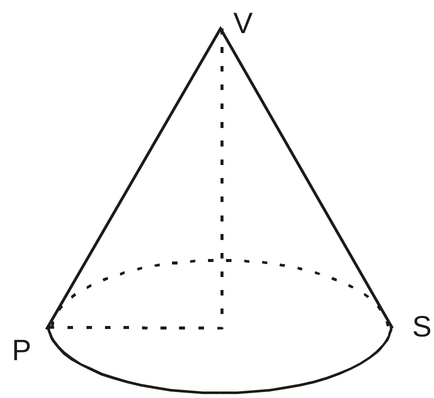
7.14 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య

7.3 ఉపోద్ఘాతము:

ఈ పాఠంలో మనము రెండవ తరగతి శంఖువు, దాని సమీకరణమును రాబట్టుట, శీర్షము మూల బిందువు వద్ద కల శంఖువు సమీకరణము, అక్షముల ద్వారా పోవు శంఖువు సమీకరణము, ఆధార వక్రము యిచ్చినపుడు శంఖువు సమీకరణము, స్పర్శ రేఖల సమీకరణములు, స్పర్శ తలముల సమీకరణములు, విలోమ శంఖువు యొక్క సమీకరణముల గురించి నేర్చుకుంటాము.

7.4 నిర్వచనములు - ఉదాహరణలు:

7.4.1 నిర్వచనము: S అంతరాళములోని బిందువుల సమితి అనుకొనుము. S లో V అను (స్థిర) బిందువు P, $P \in S \Rightarrow \overline{VP} \in S$ అయ్యేటట్లు ఉంటే S ను శంఖువు అని, V శంఖువు యొక్క శీర్షం అని, $\overline{VP}$ శంఖువు యొక్క ఒక జనక రేఖ అని అంటాము.



7.4.2 శంఖువునకు ఉదాహరణలు:

(1) ఒక సరళరేఖ శంఖువును సూచించును. దాని మీద ఉన్న ప్రతి బిందువు శీర్షం అవుతుంది.

(2) వ్యతిచ్ఛేదక రేఖా యుగ్మం ఒక శంఖువు అవుతుంది. వాని ఖండన బిందువు శీర్షం.

(3) ఒక సమతలము ఒక శంఖువు అవుతుంది దాని మీదయున్న ప్రతి బిందువు శీర్షం అవుతుంది.

(4) వ్యతిచ్ఛేదక తలయుగ్మం శంఖువు అవుతుంది. వాటి ఉమ్మడి రేఖ మీది ప్రతి బిందువు శీర్షము.

(5) $x^2 + y^2 + z^2$ మూల బిందువు శీర్షముగా గల శంఖువు.

7.4.3 ఒకటి కంటే ఎక్కువ శీర్షములు కల శంఖువును శీర్ణ శంఖువు అందురు. ఒకే ఒక శీర్షము కల శంఖువును అవిశీర్ణ శంఖువు అందురు.

ఈ పాఠములో మనము అవిశీర్ణ శంఖువుల గురించి మాత్రమే చర్చిస్తాము.

7.5 వివిధ విధములైన శంఖువులు:

7.5.1 సిద్ధాంతము: $f : R^3 \to R$, x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమఘాత బహుపది అయిన $S = \{(x, y, z) / f(x, y, z) = 0\}$ అనునది మూల బిందువు శీర్షముగా గల శంఖువు యొక్క సమీకరణము, $f(x, y, z) = 0$ అగునట్లుగా ఒక రెండవ తరగతి సమఘాత బహుపది f ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమఘాత బహుపది $f(x,y,z)$ అనుకొనుము. $\lambda \in R$ అయిన

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^2 \cdot f(x,y,z) \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

$S = \{(x,y,z)/f(x,y,z)=0\}$ అనునది ఒక ఉపరితలము అనుకొనుము. నిశ్చయముగా $O \in S$

$P(x,y,z) \in S$ అయిన $f(x,y,z)=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$ $\overline{OP}$ రేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు (x_1, y_1, z_1),

సమీకరణములు $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$

ఏదైనా బిందువు Q, OP మీద ఉంటే దాని రూపము $(\lambda \in R)$ అవుతుంది.

అపుడు $f(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = \lambda^2 \; f(x_1, y_1, z_1) = 0$ ((1), (2)ల నుండి)

$\therefore$ OP రేఖ మీద గల ప్రతి బిందువు Q, S మీద ఉండును.

శంఖువు నిర్వచనము ప్రకారము $f(x,y,z)=0$ సూచించెడి సమతలము S మూల బిందువు శీర్షముగా కల శంఖువు.

విపర్యయము: $S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$

అను సమీకరణము 0 శీర్షముగా కల శంఖువును సూచించును అనుకొనుము.

$P(x, y, z) \in S$ అనుకొనుము $\Rightarrow S(x_1, y_1, z_1) = 0$

$\overline{OP}$ ఏదైనా బిందువు $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ $(\lambda \in R)$, S మీద ఉండును.

$\lambda = -1$ అయిన $S(-x_1, -y_1, -z_1) = 0$

$\Rightarrow S(x_1, y_1, z_1) - S(-x_1, -y_1, -z_1) = 0$

$\Rightarrow ux_1 + vy_1 + wz_1 = 0$

$\Rightarrow ux + vy + wz = 0$ తలం మీద P వుండును $\quad \cdot \cdot \cdot \quad (5)$

$(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ అయిన (5) 0 ద్వారా పోయే తలమును సూచించును.

$\Rightarrow S \subseteq \pi$, S అవిశీర్ణ శంఖువు కనుక ఇది అసంభవము.

$\therefore (u, v, w) = (0, 0, 0)$

$O \in S$ కనుక $d = 0 \quad \cdots \quad (6)$

$\therefore$ O శీర్షంగా కల శంఖువు సమీకరణము

$S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2fzx + 2hxy$ రెండవ తరగతి సమీకరణం.

7.5.2 ఉప సిద్ధాంతము: $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \cdots \quad (1)$ అను రేఖ $f(x, y, z) = 0 \quad \cdots \quad (2)$ సూచించెడి శంఖువుకు జనక రేఖ అయిన $f(\ell, m, n) = 0$.

ఉపపత్తి: రేఖ (1) మీద ఏదైనా బిందువు $(\lambda\ell, \lambda m, \lambda n)$.

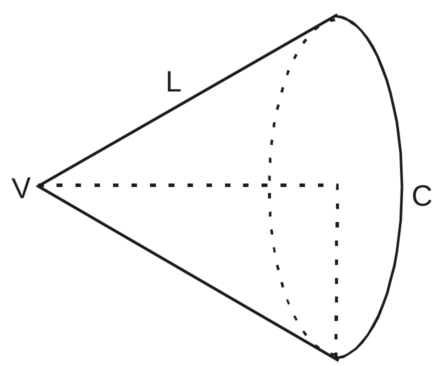
(1), (2)కు జనక రేఖ

$$\Leftrightarrow f(\lambda\ell, \lambda m, \lambda n) = 0 \ \forall \ \lambda \in \mathsf{R}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 f(\ell, m, n) = 0 \ \forall \ \lambda \in \mathsf{R}$$

$$\Leftrightarrow f(\ell, m, n) = 0,$$

7.5.3 సిద్ధాంతము: XY తలములో ఏదైనా శాంఖవము C. ఆ తలములో లేని ఏదైనా బిందువు V. V ద్వారా పోవు ఏదైనా రేఖ L జనకరేఖ గాను, V శీర్షము గాకల శంఖువు S అవుతుంది $\Leftrightarrow$ L, Cను స్పృశించును.



Cone S

ఉపపత్తి: XY తలములో C యొక్క సమీకరణమును $f(x, y) = 0 \quad \cdots \quad (1)$ అనుకొనుము.

దత్త బిందువు $X(x_1, y_1, z_1)$ అనుకొనుము. V ద్వారా పోయే ఏదైనా రేఖ L సమీకరణము

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=r \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (2)$$

(1), (2)ల ఉమ్మడి బిందువుల సమితి

$$f(\ell r+x_1, \quad mr+y_1)=0, \quad nr+z_1=0 \Rightarrow r=\frac{-z_1}{n}$$

అనగా $f\left(x_1-\frac{\ell}{n}\cdot z_1,\ y_1-\frac{m}{n}\cdot z_1\right)=0 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (3)$

(2) నుండి $\frac{\ell}{n}=\frac{x-x_1}{z-z_1}, \quad \frac{m}{n}=\frac{y-y_1}{z-z_1} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (4)$

V శీర్షముగా కల శంఖువు S అనుకొనుము. $P(x, y, z)$ ఏదైనా బిందువు అనుకొనుము.

$P\in C, V\neq P \Leftrightarrow \overline{VP}$, Sకు ఒక జనక రేఖ.

$\Leftrightarrow$ $\overline{VP}$, C ని xy తలములో P వద్ద ఖండించును.

$\Leftrightarrow z\neq z_1, \left(x_1-z_1\cdot\frac{x-x_1}{z-z_1},\ y_1-z_1\cdot\frac{y-y_1}{z-z_1}\right)$ C మీద ఉండును.

$$\Leftrightarrow z\neq z_1,\ f\left(x_1 - z_1\cdot\frac{x-x_1}{z-z_1}, \quad y_1-z_1\cdot\frac{y-y_1}{z-z_1}\right)=0$$

దీనిని విస్తరించిన $x-x_1, y-y_1, z-z_1$ లలో ఒక సమఘాత సమీకరణము వచ్చును. అది (x_1, y_1, z_1) వద్ద శీర్షము కల ఒక శంఖువును సూచించును.

7.5.4 **ఆధారిత వక్రము లేదా సూచిత వక్రము:** C అనునది ఒక తలములోని వక్రము, C తలములో V ఒక బిందువు అనుకొనుము. V శీర్షముగా, V ద్వారా Cకు గీచిన స్పర్శ రేఖలు జనక రేఖలుగా ఒక శంఖువు S వ్యవస్థితమైతే, C ని Sకు ఆధారిత వక్రము లేదా సూచిత వక్రము అంటాము.

7.5.5 **O శీర్షముగా కల శంఖువు సమీకరణమును కనుగొను పద్ధతి:** కావలసిన శంఖువు రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము కనుక దత్త శాంఖవము సమతల సమీకరణములను సమపాతపరచిన చాలును. (ఇంటర్‌లో "సరళరేఖా యుగ్మము" పాఠంలో చేసినట్లుగా)

7.5.6 **ఉదాహరణలు:** మూల బిందువు శీర్షముగా క్రింద యిచ్చిన వక్రములు ఆధారిత వక్రములుగా కల శంఖువు సమీకరణములు కనుగొనుము.

(1) $f(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gn + 2fy + c = 0, \quad z = k$

(2) $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 2$

(3) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \quad \ell x + my + nz = p$

(4) $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 3z = 4, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2x \cdot 3y + 4z = 5$

సాధనలు:

ఈ నాలుగు సమస్యలలోనూ కావలసిన శంఖువు యొక్క శీర్షము మూల బిందువు O కనుక దత్త వక్రము సమతలముల సమీకరణములను సమఘాతపర్చగా, కావలసిన శంఖువు సమీకరణము వచ్చును.

(1) దత్త వక్రము $ax^2 + by^2 + 2Lxy + 2gx + 2fy + c = 0\,;\ Z = k \quad \cdots \quad (1)$

(1) నుండి $\dfrac{z}{k} = 1 \quad \cdots \quad (2)$

(1)ని కింది రీతిగా రాద్దాము.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + (2gx + 2fy) \cdot 1 + c \cdot 1^2 = 0$$

(2) ద్వారా దీనిలో / బదులు $\dfrac{Z}{k}$ ప్రతిక్షేపిద్దాము

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + (2gx + 2fy) \cdot \frac{z}{k} + c \cdot \frac{z^2}{k^2} = 0$$

$\therefore$ కావలసిన శంఖువు సమీకరణము

$$f\left(\frac{x}{z}k,\ \frac{y}{z}k\right) \equiv ak^2\lambda^2 + 2hk^2xy + bk^2y^2 + 2gkxz + kyz + cz^2 = 0$$

సాధన (2): దత్త వక్రము $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2 \quad \cdots \quad (1)$

$$z = 2 \Rightarrow \frac{z}{2} = 1 \quad \cdots \quad (2)$$

(1), (2)లను సమఘాతపర్చగా $x^2 + y^2 = 4(1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \cancel{4} \cdot \dfrac{z^2}{\cancel{4}}$

$\therefore$ కావలసిన శంఖువు సమీకరణము $x^2 + y^2 = z^2$

సాధన (3): దత్త ఆధారిత వక్రము $ax^2+by^2+cz^2=1 \cdot \cdot \cdot (1)$

$$\ell x+my+nz=p \cdot \cdot \cdot (2)$$

$P^2\left(ax^2+by^2+cz^2\right)=p^2=(\ell x+my+nz)^2$ $(1),(2)$ల నుండి

$\therefore$ కావలసిన శంఖువు సమీకరణము

$$P^2\left(ax^2+by^2+cz^2\right)=(\ell x+my+nz)^2$$

సాధన (4): దత్త ఆధారిత వక్రము రెండు త్రి పరిమాణ ఉపరి తలములుగా ఇవ్వబడినది.

$$x^2+y^2+z^2+x-2y+3z=4 \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$x^2+y^2+z^2+2x-3y+4z=5 \cdot \cdot \cdot (2)$$

వాని ఉమ్మడి తల సమీకరణము $(1)-(2)=0$ అనగా $x-y+z-1=0 \cdot \cdot \cdot (3)$

(3) ద్వారా **(1)**ని $x^2+y^2+z^2+(x-2y+3z)\cdot 1=4\cdot 1^2$గా వ్రాసి ఇందులో 1 బదులుగా $x-y+z$ ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన శంఖువు యొక్క సమీకరణము లభించును. ఇది

$x^2+y^2+z^2+(x-2y+3z)(x-y+z)=4(x-y+z)^2$ అవుతుంది.

7.5.7 ఉదాహరణ: అక్షముల ద్వారా పోయే శంఖువు యొక్క సమీకరణము $fyz+gzx+hxy=0$, అని చూపుము (ఇక్కడ $(f, g, h)\neq(0, 0, 0)$).

సాధన: జనక రేఖల ఖండన బిందువు శీర్షము. నిరూపాక్షములు O వద్ద ఖండించుకొనును. కనుక O శీర్షము.

$\therefore$ శంఖువు సమీకరణ రూపము $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2fzx+2fxy=0 \cdot \cdot \cdot (1)$

X అక్షము దిక్ సంఖ్యలు $(0,0,1)$, X అక్షము జనక రేఖ కనుక $(0,0,1)$, (1)ను తృప్తిపరుచును.

కాబట్టి $a+0+0+0+0+0=0 \Rightarrow a=0$ ఇదే విధముగా Y అక్షము జనక రేఖ కనుక $b=0$, Z అక్షము జనక రేఖ కనుక $c=0$.

కాబట్టి అక్షముల గుండా పోవు శంఖువు సమీకరణము.

$fyz+gzx+hxy=0$. దత్త సమీకరణంలో $a=b=c=0$ కావున f, g, hలలో కనీసం ఒకటి అశూన్యం కావలె.

7.5.8 **ఉదాహరణ:** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ అను తలము నిరూపకాక్షములను A, B, C ల వద్ద ఖండించును. O నుండి ABC వృత్తమునకు గీచిన రేఖలు జనక రేఖలుగా కల శంఖువు సమీకరణము

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)xy+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)yz+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)zx=0$$

అని చూపుము.

సాధన: దత్త సమతల సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

ఈ తలం X అక్షమును $y=0, z=0$ లో ఖండించును. కావున ఖండన బిందువు $A=(a, 0, 0)$

ఇదే విధముగా $B\,(0,b,0)$, $C(0,0,c)$

ABC తలము, $OABC$ గోళముల ఖండన తలము మీద వృత్తము ABC ఉండును.

$OABC$ గోళ సమీకరణము $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

$\therefore$ ABC వృత్తము (1), (2) ద్వారా సూచించబడును.

OA, OB, OC లు జనకరేఖలు కనుక కావలసిన శంఖువుకు శీర్షము 'O'. దాని సమీకరణము (1), (2)లను సమఘాతపర్చగా వచ్చును.

(2)ని $x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)1=0$ గా రాసి, ఇందులో

1 విలువను (1) నుండి ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన శంఖువు సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0$$

అనగా $$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)xy+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)yz+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)zx=0$$

7.5.9 ఆధారిత వక్రం $f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$, $z=0$ గాను (x_1, y_1, z_1) శీర్షము, $z_1 \neq 0$ గా కల శంఖువు సమీకరణము

7.5.3లో చూపిన విధముగా శంఖువు సమీకరణము

$$(z-z_1)^2 \cdot f\left(\frac{x(z-z_1)-x_1(x-x_1)}{z-z_1}, \quad \frac{y(z-z_1)-y_1(y-y_1)}{z-z_1}\right)=0$$

అనగా $a(x_1z-z_1x)^2+2h(x_1z-xz_1)(y_1z-yz_1)+b(y_1z-yz_1)^2+2g(x_1z-xz_1)$

$$(z-z_1)+2f(y_1z-yz_1)(y\,y_1)+c(z-z_1)^2=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

విపర్యయంగా, $V(x_1, y_1, z_1)$ శీర్షంగానున్న శంఖువు మీద $P(x_0, y_0, z_0)$ ఏవైన బిందువులైన జనక రేఖ VP సమీకరణం

$$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{y-y_1}{y_0-y_1}=\frac{z-z_1}{z_0-z_1}=r$$, ఇది xy తలమును $Q(x,y,0)$లో ఖండించిన

$$x=x_1-\frac{z_1(x_0-x_1)}{z_0-z_1}, \; y=y_1-\frac{z_1(y_0-y_1)}{z_0-z_1}.$$

ఇంకా Q బిందువు $f(x,y)=0$ను తృప్తిపరచును. $\therefore$ VP జనకరేఖ C ను Q వద్ద ఖండించును. కనుక కావలసిన శంఖువు (2)చే చూపించవచ్చు.

7.5.10 ఆధారిత వక్రం $f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0, \; L\equiv px+qy+rz+s=0$, $L\equiv px+qy+rz+s=0$ గాను శీర్షము $V(x_1, y_1, z_1)$గా కల శంఖువు సమీకరణము రాబట్టుము. $(V\notin L)$

సాధన: దత్త శీర్షము $V(x,y,z)$, ఆధారిత వక్రము $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$

$$px+qy+rz+s=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

0ను (x_1, y_1, z_1)కు సమాంతర పరివర్తన చేయగా $x=X+x_1, \; y=Y+y_1, \; z=Z+z$.

అపుడు (1) శీర్షము కొత్త మూల బిందువు (2) ఆధారిత వక్రము $F(X+x, \; Y+y_1)=0$.

$$\Rightarrow ax^2+2Hxy+by^2+2(ax_1+hy_1+g)x+2(hx_1+by_1+f_1)y+f(x_1, y_1)=0$$

$$L\equiv px+qy+rz+L_{11}$$

$\Delta\equiv L-s=px+qy+r\,z+px_1+qy_1+r\,z_1$ అనుకొనుము.

$$\frac{\Delta}{L_{11}}=1$$

శంఖువు సమీకరణము, సమీకరణము వానిని సమఘాతపర్చగా వచ్చును.

$$\Rightarrow \left(ax^2 + vt^2 + 2hxy\right) \cdot L_{11}^2 - 2\Delta \cdot L_{11}\left(\left(ax_1 + hy_1 + g\right)x + \left(hx_1 + by_1 + f\right)y\right) + f\left(x_1, y_1\right) \cdot \Delta^2 = 0$$

$\left(x_1, y_1, z_1\right)$ ను మరల 0కు సమాంతర పరివర్తన చేయగా కావలసిన శంఖువు సమీకరణము

$$\left[a\left(x - x_1\right)^2 + 2h\left(x - x_1\right)\left(y - y_1\right) + b\left(y - y_1\right)^2\right] \cdot L_{11}^2 - 2\Delta^1 \cdot L_{11}$$
$$\left[\left(ax_1 + hy_1 + g\right)\left(x - x_1\right) + \left(hx_1 + by_1 + f\right)\left(Y - y_1\right)\right] - f\left(x_1, y_1\right)\left(\Delta^1\right)^2 = 0,$$

ఇక్కడ $\Delta^1 = px + qy + rz$

7.5.11 **ఉదాహరణ:** ఆధారిత వక్రం $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x + y + z = 1$ గాను శీర్షం $(1, 2, 3)$ వద్ద కల శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త శీర్షం $(1,2,3)$ దాని ద్వారా పోయే ఏదైనా సరళరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x-1}{\ell} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n} = \frac{x+y+z-6}{\ell+m+n} \quad \cdots \quad (1)$$

దత్త ఆధారిత వక్రం $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + y + z = 1 \quad \cdots \quad (2)$

(1), (2)ల నుండి $$\frac{x-1}{\ell} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{n} = \frac{1-6}{\ell+m+n} = \frac{-5}{\ell+m+n}$$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{-5\ell}{\ell+m+n},\ y - 2 = \frac{-5m}{\ell+m+n},\ z - 3 = \frac{-5n}{\ell+m+n}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m+n-4\ell}{\ell+m+n},\ y = \frac{2\ell+2n-3m}{\ell+m+n},\quad z = \frac{3\ell+3m-2n}{\ell+m+n}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ కాబట్టి

$$\left(m+n-4\ell\right)^2 + \left(2\ell+2n-3m\right)^2 + \left(3\ell+3m-2n\right)^2 = 4\left(\ell+m+n\right)^2$$

(1) నుండి $\ell = K\left(x-1\right),\ m = K\left(y-2\right),\ n = K\left(z-3\right)$ ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన శంఖువు యొక్క సమీకరణం

$$\left(y+z-4x-1\right)^2 + \left(2x+2z-3y-2\right)^2 + \left(3x+3y-2z-3\right)^2 = 4\left(x+y+z-6\right)^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 3y^2 + z^2 - 6yz - 4zx - 2xy + 6x + 8y + 10z - 26 = 0$$

7.5.12 సూచిత వక్రం $ax^2 + by^2 = 1,\ z = 0$, శీర్షము (α, β, γ) వద్ద కల శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త శీర్షము (α, β, γ) శీర్షము ద్వారా పోయే ఏదైన సరళ రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x-\alpha}{\ell} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

(1) మీది ఏదైనా బిందువు $(\ell r + \alpha,\ mr + \beta,\ nr + \gamma) \quad (r \in \mathsf{R})$

సూచిత వక్రం $ax^2 + by^2 = 1,\ z = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

కావలసిన శంఖువునకు (1) జనక రేఖ కావలనంటే (1) మీది బిందువు (2)ను తృప్తిపరచవలెను.

$$\therefore a(\ell r + \alpha)^2 + b(mr + \beta)^2 = 1, \qquad nr + \gamma = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{-\gamma}{n}$$

అనగా $\quad a\left(\frac{-\ell}{n}\gamma + \alpha\right)^2 + b\left(\frac{-m}{n}\gamma + \beta\right)^2 = 1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$

(1) నుండి $\frac{\ell}{n} = \frac{x-\alpha}{z-\gamma},\ \frac{m}{n} = \frac{y-\beta}{z-\gamma}$

(3)లో ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన శంఖువు సమీకరణము

$$a(\alpha z - \gamma x)^2 + b(\beta z - \gamma y)^2 = (z - \gamma)^2$$

7.6 x, y, z లలో రెండవ తరగతి సాధారణ సమీకరణము:

a, b, c, f, g, h లు అన్నీ ఒకేసారి సున్నా కాని యెడల అనగా $(a, b, c, f, g, h) \neq (0,0,0,0,0,0)$, $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ను x, y, z లలో రెండవ తరగతి సాధారణ సమీకరణము అందురు.

7.6.1 **సంకేతముల వాడుక:** ఈ పాఠములో మనము ఈ క్రింది సంకేతములను వాడుకలో ఉపయోగిస్తాము.

$$S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d$$

$$E \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

$$U = ax + hy + gz + u$$

$$V = hx + by + fz + v$$

$$W = gx + fy + cz + w$$

$$D = ux + vy + wz + d$$

$$U_i = ax_i + hy_i + gz_i + u$$

$$V_i = hx_i + by_i + fz_i + v$$

$$W_i = gx_i + fy_i + cz_i + w$$

$$D_i = ux_i + vy_i + cz_i + d$$

$$S_i = Ux_i + Vy_i + Wz_i$$

$$S_{i_j} = U_i x_j + V_i y_j + W_i z_j$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix}$$

7.6.2: పై సంకేతముల నుండి ఈ క్రిందివి వస్తాయి

(1) $S_{12} = S_{21}$

(2) $S_{11} \equiv S(x_1, y_1, z_1)$

(3) $S = Ux + Vy + Wz + D$

7.6.3 **సిద్ధాంతము:** x, y, z లలో రెండవ తరగతి సాధారణ సమీకరణము $S(x, y, z) = 0$, ఒక శంఖువును సూచించుటకు నియమములు $U_1 = 0, V_1 = 0, W_1 = 0$ మరియు $\Delta = 0$

ఉపపత్తి: దత్త సమీకరణము $S(x, y, z) = 0$ అనగా

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

(x_1, y_1, z_1) బిందువు శీర్షముగా గల శంఖువును సూచించును అనుకొనుము. మూల బిందువు 0ను శీర్షము (x_1, y_1, z_1)కు సమాంతర పరివర్తన చేయగా ఆ సమీకరణము ఈ క్రింది విధముగా మారును.

$$S \equiv a(x+x_1)^2 + b(y+y_1)^2 + c(z+z_1)^2 + 2f(y+y_1)(z+z_1) + 2g(z+z_1)(x+x_1) +$$
$$2h(x+x_1)(y+y_1) + 2u(x+x_1) + 2v(y+y_1) + 2w(z+z_1) + d$$

$$\equiv \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2(ax_1 + hy_1 + gz_1 + u)x +$$
$$2(hx_1 + by_1 + fz_1 + v)y + 2(gx_1 + fy_1 + cz_1 + w)z + ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 +$$
$$2fy_1z_1 + 2gz_1x_1 + 2hx_1y_1 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d = 0$$

అనగా $S \equiv E(x, y, z) + 2U_1x + 2V_1y + 2W_1z + S_{11}$

అనగా $\equiv E(x, y, z) + 2U_1x + 2V_1y + 2w_1z + U_1x_1 + V_1y_1 + W_1z_1 + D_1 = 0$

ఇది క్రొత్త మూల బిందువు (x_1, y_1, z_1) శీర్షముగా కల శంఖువును సూచించును. కాబట్టి

$$\left.\begin{array}{ll} \therefore\ x \text{ గుణకం} = 0 & \Leftrightarrow U_1 = 0 \\ y \text{ గుణకం} = 0 & \Leftrightarrow V_1 = 0 \\ z \text{ గుణకం} = 0 & \Leftrightarrow w_1 = 0 \\ \text{స్థిర పదం} = 0 & \Leftrightarrow S_{11} = 0 \\ & \Leftrightarrow D_1 = 0 \end{array}\right\} \text{A}$$

Aలోని సమీకరణములకు (x_1, y_1, z_1) సాధన కాబట్టి గుణకాల మాత్రిక $\Delta = 0$

7.6.4 $S \equiv 0$ **సూచించెడి శంఖువు యొక్క శీర్షమును కనుగొను పద్ధతి:**

(1) t తలరాశిని ప్రవేశ పెట్టిన, Sను సమఘాత పరుచుము.

$$F(x, y, z, t) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2fzx + 2hxy + 2uxt + 2vyt + 2wtz + dt^2$$

(2) $U = \frac{dF}{du}$, $V = \frac{dF}{dv}$, $W = \frac{dF}{dw}$, $D = \frac{dF}{dt}$ లను కనుగొనుము.

(3) $t = 1$ వ్రాసి, $U = 0, V = 0, W = 0, D = 0$ లలో మూడింటిని x, y, z ల కొరకు సాధించి నాల్గవ దానిలో ప్రతిక్షేపించుము.

(4) అది తృప్తిపడిన అనగా $D_1 = 0$ అయిన శంఖువుకు శీర్షము (x, y, z) లేనిచో అది విశీర్ణ శంఖువు అవుతుంది.

7.6.5 **ఈ క్రింది సమీకరణము సూచించెడి శంఖువు యొక్క శీర్షమును కనుగొనుము:**

$$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$$

సాధన: t సహాయముతో సమీకరణమును సమఘాతపరచి

$F(x,y,z,t) = 4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12xt - 11yt + 6zt + 4t^2 = 0$ గా పరిగణిద్దాం.

$$U = \frac{\partial F}{\partial x} = 8x + 2y + 12t, \quad V = \frac{\partial F}{\partial y} = 2x - 2y - 3z - 11t$$

$$W = \frac{\partial F}{\partial z} = 4z - 3y + 6t, \quad D = \frac{\partial F}{\partial t} = 12x - 11y + 6z + 8t$$

t బదులు 1 వ్రాసి $U = 0, V = 0, W = 0, D = 0$ లను సాధిద్దాం. వీటికి తుల్య సమీకరణాలు

$$4x + y + 6 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$2x - 2y - 3z - 11 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$3y - 4z - 6 = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$12x - 11y + 6z + 8 = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

(1), (2), (3)లను సాధించగా

$$(2) \times 2 - (1) \Rightarrow 5y + 6z + 28 = 0 \quad \cdots \quad (5)$$

$$(3) \times 3 + (5) \times 2 \Rightarrow 19y + 38 = 0$$

$$\Rightarrow y = -2$$

(3) నుండి $-6 - 4z - 6 = 0 \Rightarrow 4z = -12 \Rightarrow z = -3$

(1) నుండి $4x - 2 + 6 = 0 \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1$

$12(-1) - 11(-2) + 6(-3) + 8 = -30 + 30 = 0$ కాబట్టి దత్త శంఖువు యొక్క శీర్షము $(-1,-2,-3)$.

7.6.6 ఉదాహరణ: క్రింది సమీకరణము సూచించెడి శంఖువు యొక్క శీర్షమును కనుగొనుము.

$$2y^2 - 8yz - 4zx - 8xy + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$$

సాధన: t సహాయముతో S ను సమఘాతపరచి

$$F(x,y,z,t) = 2y^2 - 8yz - 4zx - 8xy + 6xt - 4yt - 2zt + 5t^2$$

$U = \frac{dF}{dx} = -4z - 8y + 6t$, $\qquad V = \frac{dF}{dy} = 4y - 8z - 8x - 4t$

$W = \frac{dF}{dz} = -8y - 4x - 2t$, $\qquad D = \frac{dF}{dt} = 6x - 4y - 2z + 10t$

$t = 1$ వ్రాసి $U = 0, V = 0, W = 0, D = 0$ సమీకరణాలు సాదిద్దాం. వీటికి తుల్య సమీకరణాలు

$4y + 2z - 3 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

$2x - y + 2z + 1 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

$2x + 4y + 1 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$

$3x - 2y - z + 5 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$

x, y, z ల కొరకు సాధించిన

$(2) - (1) \Rightarrow 2x - 5y + 4 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (5)$

$(3) \Rightarrow 2x + 4y + 1 = 0$

(-) చేయగా $9y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ **(3)** నుండి $2x + \frac{4}{3} + 1 = 0 \Rightarrow 2x = \frac{-7}{3} \Rightarrow x = \frac{-7}{6}$

$(6) \Rightarrow \frac{4}{3} + 2z - 3 = 0 \Rightarrow 2z = \frac{5}{3}. \quad z = \frac{5}{6}$

x, y, z విలువలను **(4)**లో ప్రతిక్షేపించగా $3\left(\frac{-7}{6}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{5}{6} + 5 = 0$

కనుక దత్త శంఖువుకు శీర్షము $\left(\frac{-7}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$

7.7 స్పర్శ రేఖలు - స్పర్శ తలములు:

7.7.1 సిద్ధాంతము: సరళరేఖ $\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

శంఖువు $S(x, y, z) = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$ ల ఖండన బిందువు కావడానికి తుల్య నియమం $(x_1 + \ell t, y_1 + mt, z_1 + nt)$

$$E(\ell, m, n)t^2 + (\ell U_1 + mV_1 + nW_1)t + S_{11} = 0$$

$E(\ell, m, n) = A,\ \ell U_1 + mV_1 + nW_1 = B, S_{11} = C$ అని వ్రాయుము.

ఉపపత్తి: $t \in R$ అయిన $S(x_1 + \ell t, y_1 + mt, z_1 + nt)$

$$\equiv a(x_1 + \ell t)^2 + b(y_1 + mt)^2 + c(z_1 + nt)^2 + 2f(y_1 + mt)(z_1 + nt)$$

$$+2g(z_1 + nt)(x_1 + \ell t) + 2h(x_1 + \ell t)(y_1 + mt) + 2u(x_1 + \ell t)$$

$$+2v(y_1 + mt) + 2w(z_1 + nt) + d$$

$$= \left(a\ell^2 + bm^2 + cn^2 + 2fmn + 2g\ell n + 2h\ell m\right)t^2 +$$

$$2\left(a\ell x_1 + bmy_1 + cnz_1 + fmz_1 + fny_1 + gnx_1 + g\ell z_1 + h\ell y_1 + hmx_1 + u\ell m + vmn + w\ell n\right)t$$

$$+ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + 2fy_1z_1 + 2gz_1x_1 + 2hx_1y_1 + 2ux_1 + 2vy_1 + 2wz_1 + d$$

$$= At^2 + 2Bt + C$$

రేఖ (1) మీది ఏదైనా బిందువు $(x_1 + \ell t, y_1 + mt, z_1 + nt)$, $(t \in R)$ రూపములో నుండును.

$\therefore$ (1) మీది బిందువు శంఖువు (2) మీద ఉండుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్తత నియమము $At^2 + Bt + C = 0$

7.7.2 ఫలితములు:

(1) $E(\ell,m,n) \neq 0,\ (\ell u_1 + mv_1 + nw_1)^2 > S_{11} \cdot E(\ell,m,n)$ అయిన (2)కు వేర్వేరు మూలములు ఉండును. t_1, t_2 లు అనుకొనిన అవి సూచించెడి మూల బిందువులు P_1, P_2 అయిన P_1, P_2 ను శంఖువుకు జ్యా అందురు.

(2) $E(\ell,m,n) \neq 0,\ (\ell u_1 + mv_1 + nw_1)^2 < S_{11} \cdot E(\ell,m,n)$ అయిన (2)కు వాస్తవ మూలములు ఉండవు. (1) శంఖువును ఖండించదు.

(3) $E(\ell,m,n) \neq 0,\ (LU_1 + mV_1 + nW_1)^2 = S_{11} \cdot E(\ell,m,n)$ అయిన (2)కు ద్విరుక్త మూలము ఉండును. (1) శంఖువునకు స్పర్శరేఖ అవుతుంది. ఆ బిందువు స్పర్శ బిందువు అవుతుంది.

(4) $E(\ell,m,n) = 0$ అయిన $S_{11} = 0$ అయితే $\ell U_1 + mV_1 + nW_1 = 0$ అవుతుంది. అపుడు (1) శంఖువునకు జనకరేఖ అవుతుంది.

7.7.3 ఉదాహరణ: $x^2+y^2=z^2$ అను శంఖువుకు $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ అను రేఖ స్పర్శ రేఖ అవుతుందా? వివరణయిమ్ము.

సాధన: దత్తరేఖ $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}\cdots\cdots\cdots(1)$ మీది ఏదైనా బిందువు $(r+1, 0, r)$ ఇది దత్త శంఖువు మీద ఉంటే, $x^2+y^2=z^2$ లో ప్రతిక్షేపించిన $(r+1)^2=r^2$ కాబట్టి $r=\frac{-1}{2}$ ఒకే మూలము వచ్చినది. కాని ఖచ్చితముగా రెండు మూలములుండవలె.

ఇక్కడ $E(\ell, m, n)=0, \ell U_1+mV_1+nW_1=0, S_{11}\neq 0$ కనుక జనకరేఖ కాజాలదు. జనక రేఖకు సమాంతరముగా నున్న సరళరేఖ అవుతుంది కాని స్పర్శరేఖ కూడా కాదు.

7.7.4 స్పర్శతలము - నిర్వచనము: $S\equiv 0$ అను శంఖువు మీద $P(x_1, y_1, z_1)$ ఏదైనా ఒక బిందువు $(U_1, V_1, W_1)\neq(0, 0, 0)$ అయ్యేటట్లు ఉంటే P వద్ద స్పర్శరేఖల బిందు పథము ఒక తలము అవుతుంది. ఆ తలమును P వద్ద $S\equiv 0$కు స్పర్శ తలము అందురు. $U_1=V_1=W_1=0$ అయిన Pను Sకు అసాధారణ బిందువందురు.

7.7.5 సిద్ధాంతము: $E(x, y, z)\equiv 0$ సూచించెడి శంఖువుకు $P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు వద్ద స్పర్శ తలము యొక్క సమీకరణము $U_1x+V_1y+W_1z=0$.

ఉపపత్తి: దత్త బిందువు $P(x_1, y_1, z_1)$ ద్వారా పోయే ఏదైనా సరళ రేఖ $\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}\ \cdot\cdot\cdot\ (1)$

$E(x, y, z)=0\ \cdot\cdot\cdot\ (2)$ మీద P ఉన్నది. కాబట్టి $E(x_1, y_1, z_1)=0\ \cdot\cdot\cdot\ (3)$

(7.7.2) నుండి **(1)**, **(2)**లు ఖండించుకొనుటకు తుల్య నియమం $At^2+Bt=0\ \cdot\cdot\cdot\ (4)$

$A=E(\ell, m, n),\ B=\ell U_1+mV_1+nW_1$

(1), **(2)**కు స్పర్శరేఖ కనుక **(4)** యొక్క మూలములు సమానము.

అందుచేత $B=\ell U_1+mV_1+nW_1=0\ \cdot\cdot\cdot\ (5)$

P వద్ద స్పర్శరేఖ యొక్క బిందు పథము స్పర్శ తలము కనుక స్పర్శతల సమీకరణము $U_1x+V_1y+W_1z=0$

అనగా $(ax_1+hy_1+gz_1)x+(hx_1+by_1+fz_1)y+(gx_1+fy_1+cz_1)z=0$

7.7.6 స్పర్శతలము అగుటకు నియమములు: $E(x, y, z)=0\ \cdot\cdot\cdot\ (1)$ సూచించెడి శంఖువుకు,

$\ell x+my+nz=0\ \cdot\cdot\cdot\ (2)$ స్పర్శ తలము అగుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్తత నియమము.

$$K = \begin{vmatrix} a & h & g & \ell \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ \ell & m & n & o \end{vmatrix} = 0$$

ఉపపత్తి - ఆవశ్యకత: (1) సూచించెడి శంఖువు మీద $P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు వద్ద స్పర్శ తల సమీకరణము

$$U_1x + V_1y + W_1z = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$$

కాని $\ell x + my + nz = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$ కూడ (1)కు ఒక స్పర్శతలము కనుక (3), (2) ఒకే తలమును సూచించును. గుణకములను పోల్చగా

$\dfrac{U_1}{\ell} = \dfrac{V_1}{m} = \dfrac{W_1}{n} = -\lambda$ (అనుకొనుము) కాబట్టి $U_1 = -\lambda\ell$, $V_1 = -\lambda m$, $W_1 = -\lambda n$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax_1 + hy_1 + gz_1 + \lambda l = 0 \\ hx_1 + by_1 + fz_1 + \lambda m = 0 \\ gx_1 + fy_1 + cz_1 + \lambda n = 0 \\ \text{మరియు} \quad l\,x_1 + my_1 + nz_1 + \lambda \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

(A) అను సమీకరణ వ్యవస్థకు శూన్యము కాని సాధన ఉంటుంది. కాబట్టి $K = 0$

పర్యాప్తత:

నిర్ధారకము $K = 0$ అనుకొనుము. అపుడు (A)కి అశూన్య సాధన ఉండును.

$\lambda = 0$ అయిన $(x_1, y_1, z_1) \neq (0,0,0)$ మరియు $U_1 = 0, V_1 = 0, W_1 = 0$ ఇది E కు ఒకే శీర్షము $(0,0,0)$ అను సత్యమునకు వ్యతిరేకము.

$(x_1, y_1, z_1) \neq (0,0,0)$ అనునది (A)కు ఒక సాధన అనుకుంటే A నుండి

$U_1 = -\lambda\ell$, $V_1 = -\lambda m$, $W_1 = -\lambda n$ మరియు $\ell x_1 + my_1 + nz_1 = 0$ అవుతాయి.

$E(x_1, y_1, z_1) = U_1x_1 + V_1y_1 + W_1z_1 = -\lambda(\ell x_1 + my_1 + nz_1) = 0 \qquad \therefore (x, y, z) \in E$

$$\therefore\ Ux + Vy + Wz = \ell x + my + nz = 0$$

కనుక $\ell x + my + nz = 0$ ఒక స్పర్శ తలము అవుతుంది.

7.7.7 **ఉదాహరణ:** $x^2+y^2=z^2$ అను శంఖువునకు $x=0, y=1$ మరియు $x=1, y=0$ అను తలములు స్పర్శ రేఖలు అవుతాయా?

సాధన: దత్త శంఖువు $x^2+y^2=z^2 \quad \cdots \quad (1)$

దత్త రేఖ $x=0, \ y=1$

అనగా $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1} \quad \cdots \quad (2)$

(2) మీది ఏదైనా బిందువు $(1,0,r)$ ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$1=r^2 \Rightarrow r=\pm 1$$

(1), (2)ల ఖండన బిందువులు $(1, 0, \pm 1)$

$\therefore$ (1)కు (2) స్పర్శరేఖ కాదు

ఇదే విధముగా $x=1, \ y=0$ కూడా స్పర్శరేఖ కాదు.

7.7.8 **ఉదాహరణ:** $E(x,y,z)=0$ అను శంఖువుకు కల స్పర్శ తలములు మరియు

$(a\ell+hm+gn)x+(h\ell+bm+fn)y+(g\ell+fm+cn)z=0$ తలముల ఉమ్మడి రేఖ $\dfrac{x}{\ell}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$ అని చూపుము.

సాధన: దత్త శంఖువు $E(x,y,z)=0 \equiv ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gx+2fy+2wz+d=0 \quad \cdots \quad (1)$

దత్త రేఖ $\dfrac{x}{\ell}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n} \quad \cdots \quad (2)$

(2) మీది ఏదైనా బిందువు రూపము $(\ell r, mr, nr)$

(1) మీద ఏదైనా బిందువు (x_1, y_1, z_1) వద్ద స్పర్శ తల సమీకరణము $U_1x+V_1y+W_1z=0 \quad \cdots \quad (3)$

(2) రేఖ (3) తలము మీద ఉండడానికి $U_1\ell r+V_1mr+W_1nr=0$ తుల్యం.

$$U_1\ell + V_1m + W_1n = 0 \Leftrightarrow (ax_1+hy_1+gz_1)\ell+(hx_1+by_1+fz_1)m+(gx_1+fy_1+cz_1)n=0$$

$$\Leftrightarrow (a\ell+hm+gn)x_1+(h\ell+bm+fn)y_1+(g\ell+fm+cn)z_1=0$$

కనుక (x_1, y_1, z_1) బిందువు

$(a\ell + hm + gn)x + (h\ell + bm + fn)y + (g\ell + fm + cn)z = 0$

అను తలము మీద ఉంది. కనుక నిరూపణ అయినది.

7.7.9 **ఉదాహరణ:** $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ అను శంఖువునకు పరస్పర లంబ జనక రేఖ e వద్ద గీతిన స్పర్శ తలముల ఖండన బిందు పథము

$$a^2(b+c)x^2 + b^2(c+a)y^2 + c^2(a+b)z^2 = 0$$ అని చూపుము.

సాధన: దత్త శంఖువు $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

(1)కు లంబ జనక రేఖ వద్ద గీచిన స్పర్శ తలముల ఖండన రేఖను $\dfrac{x}{\ell} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

అనుకొనుము అపుడు ఆ జనక రేఖలను కల్గియున్న తల సమీకరణ (2)కు సమాంతరముగా నుండును కనుక దాని సమీకరణము $a\ell x + bmy + cnz = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$

(1), (3)లు లంబ రేఖలలో ఖండించుటకు నియమము

$$(a+b+c)\left(\ell^2 + m^2 + n^2\right) = E(\ell, m, n) \quad \cdot \cdot \cdot \quad \text{(సూత్రము)}$$

$$(a+b+c)\left((a\ell)^2 + (bm)^2 + (cm)^2\right) = a(a\ell)^2 + b(bm)^2 + c(cn)^2$$

అనగా $a \cdot a^2\ell^2 + (b+c)a^2\ell^2 + b \cdot b^2m^2 + (c+a)b^2m^2 + c \cdot c^2n^2 + (a+b)c^2n^2$

$$= a \cdot a^2\ell^2 + b \cdot b^2m^2 + c \cdot c^2n^2$$

అనగా $a^2(b+c)\ell^2 + b^2(c+a)m^2 + c^2(a+b)n^2 = 0$

అందుచేత $a^2(b+c)x^2 + b^2(c+a)y^2 + c^2(a+b)z^2 = 0$ స్పర్శరేఖ (2) పథము.

గమనిక: (1) $E(x,y,z) = 0$ అను శంఖువు, $\ell x + my + nz = 0$ అను తలములు లంబ జనక రేఖలలో ఖండించుటకు నియమము

$$(a+b+c)\left(\ell^2 + m^2 + m^2\right) = E(\ell, m, n)$$

(2) $E(x,y,z) = 0$, $\ell x + my + nz = 0$ ల ఖండన రేఖలకు లంబ తల యుగ్మ సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \ell & x \\ h & b & f & m & y \\ g & f & c & n & z \\ \ell & m & n & o & o \\ x & y & z & o & o \end{vmatrix} \equiv E(yn - zm,\ z\ell - xn,\ mx - y\ell) = 0$$

(3) పై తలముల మధ్య కోణము θ అయిన

$$\frac{\cos\theta}{(a+b+c)\left(\ell^2+m^2+n^2\right) - E(\ell,m,n)} = \frac{\sin\theta}{2\sqrt{P\left(\ell^2+m^2+n^2\right)}}$$

$$\text{ఇక్కడ} \quad P = \begin{vmatrix} a & h & g & \ell \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ \ell & m & n & o \end{vmatrix}$$

7.7.10 ఉదాహరణ: $xy + yz + zx = 0$ అను శంఖువు, $ax + by + cz = 0$ అను తలముల ఖండన రేఖలు పరస్పర లంబములైన $ab + bc + ca = 0$ లేదా $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ అని చూపుము.

సాధన: $E(x,y,z) = 0$, $\ell x + my + nz = 0$ లు లంబ రేఖలలో ఖండించుటకు నియమము

$$(a+b+c)\left(\ell^2+m^2+n^2\right) = E(\ell,m,n)$$

ఇక్కడ $a = b = c = 0,\ (\ell,\ m,\ n) = (a,\ b,\ c)$ కాబట్టి పై నియమానికి తుల్య నియమము

$$\left(a^2+b^2+c^2\right) = ab + bc + ca$$

$\therefore\ ab + bc + ca = 0$ లేదా abc చే భాగించగా

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

7.8 విలోమ శంఖువులు:

7.8.1 సిద్ధాంతము: $E(x,y,z) = 0$ అను శంఖువుకు శీర్షము వద్ద స్పర్శ తలముల లంబ రేఖల బిందుపథము మరియొక శంఖువు, దాని సమీకరణము

$$E^*(x,y,z) \equiv \begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & o \end{vmatrix} = 0$$

ఇంకా (1) $E^*(x,y,z)=0$కు శీర్షము స్పర్శ తలముల లంబరేఖల బిందుపథము $E(x,y,z)=0$

(2) $E(x,y,z)=0$, బిందు శంఖువు (0) అయిన $E^*(x,y,z)=0$ కూడా బిందు శంఖువు అవుతుంది.

ఉపపత్తి: దత్త శంఖువు $E(x,y,z)=0$

$\frac{x}{\ell}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ అనునది 0 వద్ద ఒక అభిలంబరేఖ అగుటకు నియమము (7.7.6 నుండి)

$A\ell^2+Bm^2+Cn^2+2fmn+2g\ell n+2H\ell m=0$

అభిలంబ రేఖల బిందు పథము $Ax^2+By^2+Cz^2+2H\ell y+2Fyz+2Gzx=0$

అనగా $$E^*(x,y,z)=\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & o \end{vmatrix}=0$$

7.8.2 విలోమ శంఖువులు: ఏవైనా రెండు శంఖువులు, ఒక దాని శీర్షము వద్ద స్పర్శ తలముల అభిలంబ రేఖల బిందు పథము రెండవది అయ్యేటట్లుంటే వాటిని విలోమ శంఖువులు అందురు.

గమనిక: (1) విలోమ శంఖువుల శీర్షము ఒకటే

(2) ఒక శంఖువుకి 3 పరస్పర లంబ జనక రేఖలు ఉంటే, దాని విలోమ శంఖువుకి 3 పరస్పర లంబ స్పర్శ తలములుండును.

7.8.3 ఉదాహరణ: నిరూపాకాక్ష తలములను స్పృశిస్తూపోయే శంఖువు యొక్క సమీకరణము

$\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy} \pm \sqrt{hz} = 0$ అని చూపుము.

సాధన: ఒక శంఖువుకు 3 పరస్పర లంబ జనక రేఖలు (అక్షములు) ఉంటే దాని విలోమ శంఖువుకు 3 పరస్పర లంబ స్పర్శ తలములు (నిరూపాక్ష తలములు) ఉంటాయి.

అక్షములు జనక రేఖలుగా కల శంఖువు సమీకరణము $2hxy+2fyz+2gzx=0 \quad \cdots \quad (1)$

(1) యొక్క విలోమ శంఖువు 3 నిరూపక తలములను స్పృశించును. దాని సమీకరణము

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0$$

$a = b = c = 0$ కావున $\Delta = \begin{vmatrix} o & h & g \\ h & o & f \\ g & f & o \end{vmatrix}$

$\therefore$ $A = a$ యొక్క సహ గుణావయము $= -f^2$,

$B = -g^2$, $C = -h^2$, $F = hg$, $G = hf$, $H = fg$

(2)లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన శంఖువు సమీకరణము

$$f^2x^2 + g^2y^2 + h^2z^2 - 2ghyz - 2fhzx - 2fgxy = 0$$

అనగా $(fx)^2 + (gy)^2 + (hz)^2 - 2ghyz - 2fhzx + 2fgxy = 4fgxy$

అనగా $(fx + gy - hz)^2 = \left(2\sqrt{fgxy}\right)^2$

అనగా $fx + gy - hz = \pm 2\sqrt{fgxy}$

అనగా $fx + gy \pm 2\sqrt{fgxy} = hz$

అనగా $\left(\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy}\right)^2 = \left(\sqrt{hz}\right)^2$

అనగా $\left(\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy}\right) = \pm\sqrt{hz}$

అనగా $\sqrt{fx} \pm \sqrt{gh} \pm \sqrt{hz} = 0$

7.8.4 **ఉదాహరణ:** $fyz + fzx + hxy = 0$ మరియు $\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy} \pm \sqrt{hz} = 0$ అను శంఖువులు విలోమ శంఖువులు అని చూపుము.

సాధన: ఒక శంఖువుకు 3 పరస్పర లంబ జనక రేఖలు (అక్షములు) ఉంటే దాని విలోమ శంఖువుకు 3 పరస్పర లంబ స్పర్శ తలములు (నిరూపాక్షతలములు) ఉంటాయి. కాబట్టి అక్షములు జనక రేఖలుగా కల శంఖువు సమీకరణము $2hxy + 2fyz + 2gzx = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

(1) యొక్క విలోమ శంఖువు 3 నిరూపక తలములను స్పృశించును. దాని సమీకరణము

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0$$

$a = b = c = 0$ కావున $\Delta = \begin{vmatrix} o & h & g \\ h & o & f \\ g & f & o \end{vmatrix}$

$\therefore$ $A = a$ యొక్క సహ గుణావయము $= -f^2$

$$B = -g^2,\ C = -h^2,\ F = hg,\ G = hf,\ H = fg$$

(2)లో ప్రతిక్షేపించగా కావలసిన శంఖువు సమీకరణము

$$f^2x^2 + g^2y^2 + h^2z^2 - 2ghyz - 2fhzx - 2fgxy = 0$$

అనగా $(fx)^2 + (gy)^2 + (hz)^2 - 2ghyz - 2fhzx + 2fgxy = 4fgxy$

అనగా $(fx + gy - hz)^2 = \left(2\sqrt{fgxy}\right)^2$

అనగా $fx + gy - hz = \pm 2\sqrt{fgxy}$

అనగా $fx + gy \pm 2\sqrt{fgxy} = hz$

అనగా $\left(\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy}\right)^2 = \left(\sqrt{hz}\right)^2$

అనగా $\left(\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy}\right) = \pm\sqrt{hz}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{fx} \pm \sqrt{gh} \pm \sqrt{hz} = 0$

7.8.5 **ఉదాహరణ:** $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ మరియు $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} = 0$ అను శంఖువులు పరస్పర విలోమములు అని చూపుము.

సాధన: దత్త శంఖువుల సమీకరణములు

(1) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ మరియు $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

(1) యొక్క విలోమ శంఖువు (2) అని చూపెదము.

ఇప్పుడు $\Delta = \begin{vmatrix} a & o & o \\ o & b & o \\ o & o & c \end{vmatrix}$ A, B, C వరుసగా a, b, c లు అయితే

$$\begin{aligned} A &= bc \qquad & F &= 0 \\ B &= ca & G &= 0 \\ C &= ab & H &= 0 \end{aligned}$$

విలోమ శంఖువు సమీకరణము

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0$$

అనగా $bcx^2 + cay^2 + abz^2 = 0$

అనగా $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} = 0$

7.8.6 **ఉదాహరణ:** $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ శంఖువునకు గీచిన లంబ స్పర్శ తలముల ఖండిత రేఖల బిందు పథ సమీకరణము

$$a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 = 0$$

సాధన: ఒక శంఖువునకు రెండు పరస్పర లంబ స్పర్శ తలములుంటే దాని విలోమ శంఖువునకు రెండు లంబ జనక రేఖలుంటాయి.

దత్త శంఖువు $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$

దాని విలోమ శంఖువు $bcx^2 + cay^2 + abz^2 = 0 \quad \cdots \quad (2)$

$\ell x + my + nz = 0 \quad \cdots \quad (3)$ అను తలము. **(2)**ను రెండు లంబ జనక రేఖలతో ఖండించుటకు

నియమము $a(b+c)\ell^2 + b(c+a)m^2 + c(a+b)n^2 = 0 \quad \cdots \quad (4)$

శీర్షము 0 ద్వారా (3) కు లంబ రేఖ సమీకరణము $\dfrac{x}{\ell} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n} \quad \cdots \quad (5)$

(5) యొక్క బిందు పథ సమీకరణము కొరకు (4), (5)ల నుండి ℓ, m, n విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$$a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 = 0$$

$\therefore$ విలోమ శంఖువు (2)ను పరస్పర లంబ జనక రేఖలలో ఖండించు బిందు పథము (1)కు రెండు లంబ స్పర్శ తలములుండును.

7.9 సారాంశము:

ఈ పాఠ్యాంశాలు నేర్చుకున్న పిదప విద్యార్థికి

(1) వివిధ రకములైన శంఖువు సమీకరణములను గణించుట, (2) జనక రేఖల సమీకరణములు

(3) x, y, zలలో రెండవ తరగతి సమీకరణము శంఖువు సూచించుటకు నియమములు (4) ఒక తలము శంఖువు లంబ జనక రేఖలలో ఖండించుటకు నియమము (5) స్పర్శ రేఖ, స్పర్శ తలముల సమీకరణములు, నియమములు (6) విలోమ శంఖువు సమీకరణములు కనుగొనుట మొదలగునవి తెలియును.

7.10 సాంకేతిక పదములు:

శంఖువు

శీర్షము

జనక రేఖ

సూచిత వక్రము లేక ఆధారిత వక్రము

విలోమ శంఖువు

7.11 అభ్యాసము:

1. ఒక శంఖువు యొక్క జనక రేఖల దిక్ కొసైన్‌లు $a\ell^2 + bm^2 + cn^2 = 0$ను పాటిస్తూ, అవి (α, β, γ) బిందువు ద్వారా పోతుంటే ఆ శంఖువు సమీకరణము కనుగొనుము.

2. శీర్షం $(1,1,0)$, ఆధారిత వక్రము $x^2 + y^2 = 4,\ y = 0$గా కల్గిన శంఖువు సమీకరణము కనుగొనుము.

3. 0 వద్ద శీర్షం కల్గి, జనక రేఖల దిక్ కొసైన్‌లు $3\ell^2 - 4m^2 + 5n^2 = 0$ను పాటించే శంఖువు సమీకరణము కనుగొనుము.

4. 0 వద్ద శీర్షం కల్గి, $ax^2 + by^2 = 2z,\ \ell x + my + nz = p$ సూచించెడి వక్రం ద్వారా పోవు శంఖువు సమీకరణము కనుగొనుము.

5. $15x^2-32y^2-7z^2=0$ అను శంఖువు, $3x+4y+z=0$ అను తలముల ఖండిత రేఖల సమీకరణములను కనుగొనుము.

6. $20x^2+7y^2-108z^2=0$ అను శంఖువు, $10x+7y-6z=0$ అను తలముల ఖండిత రేఖల మధ్య కోణము కనుగొనుము.

7. $\ell x+my+nz=0$ అను తలము, $4x^2-y^2+3z^2=0$ అను శంఖువును స్పృశించుటకు నియమము కనుగొనుము.

8. $\sqrt{fx}+\sqrt{gy}+\sqrt{hz}=0$ సూచించెడి శంఖువు నిరూపక తలములను స్పృశించునని చూపి, దాని విలోమ శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము.

7.11.1 సమాధానములు:

1. $a(x-\alpha)^2+b(y-\beta)^2+c(z-\gamma)^2=0$

2. $x^2-3y^2-2xy+8y-4=0$

3. $3x^2-4y^2+5z^2=0$

4. $P\left(ax^2+by^2\right)=2z(\ell x+my+nz)$

5. $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$; $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

6. $\cos^{-1}\left(\dfrac{16}{21}\right)$

7. $3\ell^2-12m^2+4n^2=0$

8. $fyz+gzx+hxy=0$

7.12 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. a) శంఖువును నిర్వచించి, ఉదాహరణ నిమ్ము.

   b) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ అను తలము అక్షములను A, B, C లలో ఖండిస్తే 0 నుండి ABC వృత్తమునకు గీచిన రేఖలచే ఏర్పడు శంఖువు సమీకరణము $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)xy+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)yz+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)zx=0$ అని చూపుము.

c) శీర్షము $(1,2,3)$ వద్ద కలిగి $x^2+y^2+z^2=4,\ x+y+z=1$ ఆధారిత వక్రము $x^2+y^2+z^2=4,\ x+y+z=1$ గా కల శంఖువు సమీకరణము కనుగొనుము.

2. a) శంఖువునకు స్పర్శరేఖ, స్పర్శ తలములను నిర్వచింపుము.

b) $E(x,y,z)=0$ అను శంఖువునకు $P(x_1, y_1, z_1)$ అను బిందువు వద్ద స్పర్శ రేఖా తలము సమీకరణము $U_1x+V_1y+W_1z=0$ అని చూపుము.

c) $x=0, y=1$ మరియు $x=1, y=0$ అను రేఖలు, $x^2+y^2=z^2$ అను శంఖువుకు స్పర్శరేఖలు అవుతాయా? వివరించుము.

7.14 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: $F(x,y,z)\equiv x^2+2y^2+2z^2-10zx+10xy+26x-2y+2z+17=0$ సమీకరణం $(1,-2,2)$ శీర్షంగా గల శంఖువును సూచించునని చూపండి.

నిర్వచనం: S అనునది, అంతరాళములోని బిందువుల సమితి అనుకొనుము. Sలో V అను స్థిర బిందువు $P\in S \Rightarrow \overline{VP}\in S$ అయ్యేటట్లు ఉంటే S శంఖువు అని, V శంఖువు యొక్క శీర్షం అని, $\overline{VP}$ శంఖువు యొక్క జనక రేఖ అని అంటాము.

సిద్ధాంతము: $x,\ y,\ z$లలో రెండవ తరగతి సాధారణ సమీకరణము $S(x,y,z)=0$ ఒక శంఖువును సూచించుటకు నియమములు $U_1=0, V_1=0, W_1=0$ మరియు

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix}=0$$

సాధన యొక్క దశల వారి విభజన:

1వ దశ: t చలరాశిని ప్రవేశపెట్టి, Sను సమఘాత పరుచుము.

$$F(x,\ y,\ z,\ t)\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2uxt+2vyt+2wzt+dt^2$$

2వ దశ: $\dfrac{\partial F}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=0,\ \dfrac{\partial F}{\partial t}=0$ సమీకరణాలను కనుగొని సూక్ష్మీకరించుము.

3వ దశ: $t = 1$ విలువను పై సమీకరణాలలో ప్రతిక్షేపించి మొదటి మూడు సమీకరణాలను సాధించుము. వీటి సాధన $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ అనుకొనుము.

4వ దశ: $x_1, y_1, z_1, 1$ విలువలు $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ సమీకరణమును తృప్తిపరుస్తాయని చూపుము.

సాధన: దత్త సమీకరణము లో

t చలరాశిని ప్రవేశపెట్టి Fను సమఘాతపర్చగా

$$F(x, y, z, t) \equiv 7x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 10zx + 10xy - 26xt - 2yt + 2zt - 17t^2 = 0$$

2) $$\frac{\partial F}{\partial x} = 14x - 10z + 10y - 26t$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 10x + 4y - 2t$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4z + 10x + 2t$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 26x - 2y + 2z - 34t$$

3) $t = 1$ విలువను పై సమీకరణములలో వ్రాయగా వచ్చు సమీకరణాలు

$$7x + 5y - 5z = 13 \quad \cdots \quad (1)$$

$$5x + 2y = 1 \quad \cdots \quad (2)$$

$$5x - 2z = 1 \quad \cdots \quad (3)$$

$$26x - 2y + 2z = 34 \quad \cdots \quad (4)$$

మొదటి మూడు సమీకరణాలను సాధించు పద్ధతి

$$(3) \times 5 - (1) \times 3 \Rightarrow 11x - 10y - 31 = 0$$

$$(2) \times 1 \Rightarrow 5x + 2y = 1$$

	x	y	1
-10	-31	11	-10
2	-1	5	2

$\Rightarrow\ x_1 = 1,\ \ y_1 = 2$

$x = 1$ విలువను **(3)**లో ప్రతిక్షేపించగా $z = 2$

మొదటి మూడు సమీకరణాల సాధన $(1,\ -2,\ 2)$.

4) $(1,\ -2,\ 2)$ విలువలను **(4)**లో ప్రతిక్షేపించగా

$26(1) - 2(-2) + 2(2) = 26 + 4 + 4 = 34$

x, y, z (4)కి సాధకాలు

ముగింపు: దత్త సమీకరణము $(1, -2, 2)$ శీర్షముగా గల ఒక శంఖువును సూచిస్తుంది.

పాఠ్యభాగ రచయిత

G. నారాయణ

పాఠము - 8

శంఖువు - II

8.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠములో విద్యార్థికి స్పర్శ శంఖువు, లంబ వర్తుల శంఖువుల గురించి వివరించబడినది. శంఖువునకు మూడు పరస్పర లంబ జనక రేఖలుండుటకు నియమము గూర్చి తెలుపబడినది.

8.2 అంశాలక్రమము:

8.3 ఉపోద్ఘాతము:

పాఠము 7లో శంఖువు గురించి కొంత వరకు నేర్చుకొన్నాము. దానికొనసాగింపే ఈ పాఠం. దీనిలో మనము గోళము యొక్క స్పర్శ శంఖువును గురించి నేర్చుకొని, దానిని ప్రతి ఉపరితలమునకు ఆపాదిస్తాము. దీనిలో $f(x, y, z) = 0$ అను వక్రమునకు 3 పరస్పర జనక రేఖలుండుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము $x^2 + y^2 + z^2$ ల గుణకముల మొత్తం శూన్యం అని తెలుసుకుంటాము. ఆధారిత వక్రం వృత్తము అయి, దాని కేంద్రము ద్వారా గీచిన లంబ రేఖ అక్షం అయితే ఆ శంఖువును లంబవర్తుల శంఖువు అని తెలుసుకొని, కొన్ని జ్యామితీయ లక్షణములను కనుగొంటాము.

8.4 స్పర్శ శంఖువు:

8.4.1 నిర్వచనము - (x_1, y_1, z_1) బిందువు నుండి ఒక ఉపరితలము S కు స్పర్శరేఖ:

L అనునది $\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ అనునది $P(x_1, y_1, z_1)$ ద్వారా పోయే సరళరేఖ $S(x, y, z)=0$ అనునది ఏదైనా ఉపరితలము అనుకొనుము. ఇవి రెండూ ఒకే ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శించుకుంటే ఆ సరళరేఖను S ఉపరితలమునకు స్పర్శరేఖ అందురు.

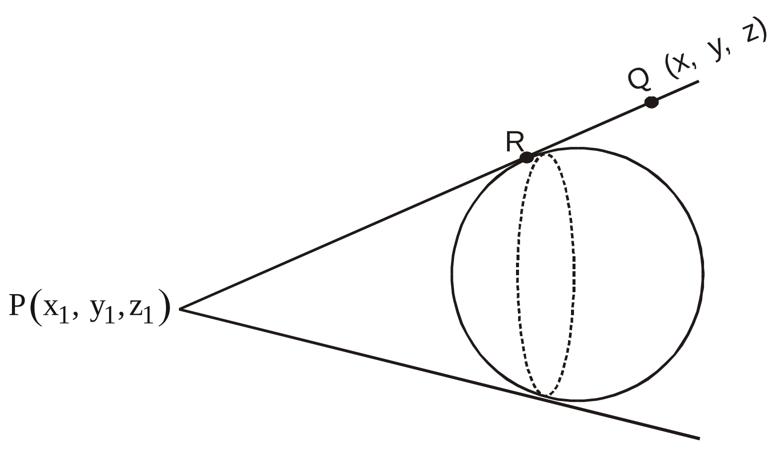
8.4.2 సిద్ధాంతము: $x^2+y^2+z^2=P^2$ అను గోళమునకు $P(x_1, y_1, z_1)$ ద్వారా గీచిన స్పర్శరేఖల బిందు పదము ఒక శంఖువు అవుతుంది. దాని సమీకరణము

$$\left(x\cdot x_1+y\cdot y_1+z\cdot z_1-p^2\right)^2=\left(x^2+y^2+z^2-p^2\right)\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2-p^2\right)$$

ఉపపత్తి: దత్త గోళము $x^2+y^2+z^2=p^2 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

$P(x_1, y_1, z_1)$ ఏదైనా బిందువు I మీద లేనిది అయి $\overline{PQ}$ అను రేఖ I కు స్పర్శరేఖ అనుకొనుము. అది గోళమును R వద్ద స్పృశించును. R, PQ ను విభజించు నిష్పత్తి $K:1$ అనుకొనిన R నిరూపకములు

$R=\left(\frac{Kx+x_1}{K+1}, \frac{Ky+y_1}{K+1}, \frac{Kz+z_1}{K+1}\right)$ ఇక్కడ $Q(x, y, z)$ స్పర్శరేఖ మీది ఏదైనా బిందువు.



Enveloping Cone

$$\left(\frac{Kx+x_1}{K+1}\right)^2+\left(\frac{Ky+y_1}{K+1}\right)^2+\left(\frac{Kz+z_1}{K+1}\right)^2=P^2$$

$$\Rightarrow (Kx+x_1)^2+(Ky+y_1)^2+(Kz+z_1)^2=P^2(K+1)^2$$

$$\Rightarrow K^2\left(x^2+y^2+z^2-P^2\right)+2k\left(x\cdot x_1+y\cdot y_1+z\cdot z_1-P^2\right)+\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2-P^2\right)=0$$

$$\Rightarrow K^2\cdot S+2K\cdot S_1+S_{11}=0 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (2)$$

PQ రేఖ $S\equiv 0$ కు స్పర్శరేఖ కనుక (2) యొక్క మూలము సమానము.

$$\Leftrightarrow \Delta\equiv b^2-4ac=0 \Leftrightarrow 4\cdot S_1^2=4S\cdot S_{11} \Leftrightarrow S_1^2=S\cdot S_{11}$$

$$\left(x\cdot x+y\cdot y_1+z\cdot z_1-P^2\right)=\left(x^2+y^2+z^2-P^2\right)\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2-P^2\right)$$

ఇది రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము కనుక ఒక శంఖువును సూచించును.

8.4.3 సిద్ధాంతము: $S(x, y, z)=0$ అను ఉపరితలమునకు $P(x_1, y_1, z_1)$ ద్వారా గీచిన స్పర్శ రేఖల బిందు పథము ఒక శంఖువు అవుతుంది. దాని సమీకరణము $S_1^2=S\cdot S_{11}$

ఉపపత్తి: దత్త ఉపరితల సమీకరణము $S(x, y, z)=0 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (1)$

దత్త బిందువు $P(x_1, y_1, z_1)$ ద్వారా పోయే ఏదైనా రేఖ L సమీకరణము $\dfrac{x-\ell_1}{\ell}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}\ \cdot\ \cdot\ \cdot (2)$

(2), (1)కు స్పర్శరేఖ అగుటకు నియమము

$$(\ell U+mV+nW)^2=S_{11}\cdot E(\ell, m, n) \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (3) \qquad (7.6.2)$$

విపర్యయంగా (3) నిజమైనచో

(a) $H(\ell, m, n)\neq 0 \Rightarrow L$ ఒక స్పర్శరేఖ.

(b) $H(\ell, m, n)=0 \Rightarrow L$ ఒక అనంత స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

$\therefore$ L ఒక స్పర్శరేఖ లేక అనంత స్పర్శరేఖ.

$$\Leftrightarrow \left(\ell U + mV + nW\right)^2 = S_{11} \cdot E\left(\ell, m, n\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x - x_1\right)U + \left(y - y_1\right)V + \left(z - z_1\right)W\right]^2 = S_{11} \cdot E\left(x - x_1, y - y_1, z - z_1\right) \quad \cdots \quad (A)$$

ఇది ఒక శంఖువును సూచించును.

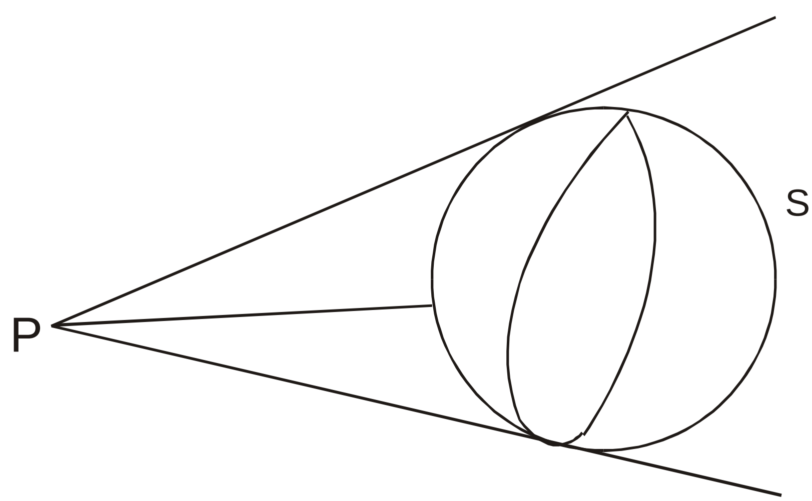
$\therefore L$ అనునది (A) సూచించెడి శంఖువునకు జనక రేఖ అవుతుంది. దాని సమీకరణము

$$\left(S_1 - S_{11}\right)^2 = S_{11}\left[\left(S - S_1\right) - \left(S_1 - S_{11}\right)\right]$$

$$\Rightarrow S \cdot S_{11} + s_{11}^2 - 2S_1 \cdot S_{11} = S_1^2 - 2S_1 \cdot S_{11} + S_{11}^2$$

$$\Rightarrow S_1^2 = S \cdot S_{11}$$

8.4.4 నిర్వచనము - స్పర్శ శంఖువు: అంతరాళములో S ఉపరితలము. P దాని మీద బిందువు అనుకొనుము. P ద్వారా Sకు గీచిన స్పర్శరేఖల బిందు పథము శంఖువు అవుతుంది. దానిని S యొక్క స్పర్శ శంఖువు అంటాము. దాని శీర్షము P.



8.4.5 ఉదాహరణ: గోళము $x^2 + y^2 + z^2 = 11$నకు $(2, 4, 1)$ బిందువు నుండి గీచిన స్పర్శ శంఖువును కనుగొనుము. దానిని $z = 0$ అను తలము లంబ అతి పరావలయములో ఖండించును అని చూపుము.

సాధన: దత్త గోళము $x^2 + y^2 + z^2 = 11 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$

దత్త బిందువు $P\left(2, 4, 1\right)$

P నుండి 1కు గీచిన స్పర్శ శంఖువు సమీకరణము

$S_1^2 = S\cdot S_{11}$ ఇక్కడ $S \equiv x^2+y^2+z^2-11,\ S_1 = 2x+2y+z-11,$

$S_{11} = 2^2+4^2+1^2-11 = 21-11 = 10$

$\therefore$ స్పర్శ శంఖువు సమీకరణము $(2x+4y+z-11)^2 = 10\left(x^2+y^2+z^2-11\right) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$

$z = 0$ తలము (2)ను ఖండిస్తే

$$(2x+4y-11)^2 = 10\left(x^2+y^2-11\right)$$

అనగా $4x^2+16y^2+121+16xy-44x-88y = 10x^2+10y^2-120$

ఈ బిందు పథము $6x^2-6y^2-16xy+44x+88y-231=0$

దీనిలో x^2 గుణకము $+y^2$ గుణకము $= 6-6 = 0$ కనుక ఇది ఒక లంబ అతి పరావలయము.

8.4.6 ఉదాహరణ: $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ అను గోళమునకు గీచిన స్పర్శ రేఖలు $d\left(x^2+y^2+z^2\right) = (ux+vy+wz)^2$ అను శంఖువు మీద ఉంటాయని చూపుము.

సాధన: దత్త గోళము $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$

O నుండి (1) గీచిన స్పర్శరేఖల బిందు పథము, (1) యొక్క స్పర్శ శంఖువు మీద ఉంటాయి. స్పర్శ శంఖువు సమీకరణము $S\cdot S_{11} = S_1^2$.

ఇక్కడ $S \equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d$ బిందువు $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$

$$\therefore\ S_{11} = d,\ S_1 = ux+vy+wz$$

స్పర్శ శంఖువు సమీకరణము $d\left(x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d\right) = (ux+vy+wz+d)^2$

8.5 మూడు పరస్పర లంబ జనక రేఖలు:

8.5.1 సిద్ధాంతము: $E(x, y, z) = 0$ అను శంఖువునకు మూడు పరస్పర లంబ జనక రేఖలుండుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము $a+b+c=0$.

ఉపపత్తి - ఆవశ్యకత: దత్త శంఖువు సమీకరణము $E(x, y, z) = 0$ అనగా

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

(1)కి మూడు పర్సపర లంబ జనక రేఖలు కలవు అని, అవి ox', oy', oz' లు అని అనుకొనుము. Oను మార్చకుండా అక్షములు Ox, OY, OZ జనక రేఖలు ox', oy', oz'కు భ్రమణ పరివర్తనము చేసినప్పుడు సమీకరణము (1) యొక్క రూపము $a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy = 0 \quad \cdots \quad (2)$ అనుకొనుము.

ox', (2) ఒక జనక రేఖ. $\therefore (1, 0, 0)$ (2) మీద ఉండును $\Rightarrow a' = 0$. ఇదే విధముగా $b' = 0, c' = 0$.

కాని భ్రమణ పరివర్తనలో $a + b + c = a' + b' + c'$ కావున $a + b + c = 0$ అవుతుంది.

పర్యాప్తత: $a + b + c = 0$ అయితే $E(x, y, z) = 0$కు మూడు పరస్పర లంబ జనక రేఖలుంటాయి అని చూపెదము.

అక్షములను X అక్షము ఒక జనక రేఖ ఏకీభవించునట్లు భ్రమణ పరివర్తనము చేసిన $a = 0$ అపుడు $b + c = 0$, అనగా $b = -c$.

$$\therefore E(x, y, z) = b\left(y^2 - z^2\right) + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0 \quad \cdots \quad (2)$$ గా మారును.

yz తలములో (2) యొక్క ఖండనము పూర్తి yz తలము కాని యెడల $x = 0$ వ్రాయుగా $E(o, y, z) \equiv b\left(y^2 - z^2\right) + 2 + yz = 0 \quad \cdots \quad (3)$.

(3)లో x^2 గుణకము $+ y^2$ గుణకము $= b - b = 0$ కనుక $f^2 \geq b(-b)$ కనుక (3) ఒక లంబ రేఖా యుగ్మమును సూచించును. అవి o ద్వారా పోవును కనుక oxతో కలిపి మూడు పరస్పర లంబ జనక రేఖలుంటాయి.

గమనిక: (1) $a + b + c = 0$ అయినపుడు $E(x, y, z) = 0$ అను శంఖువుకు ఒక జనకరేఖ L అయిన మరి రెండు జనక రేఖలు M, Nలు. L, M, Nలు పరస్పర లంబ జనక రేఖలవుతాయి. అటువంటి త్రయాలు అనేకము ఉంటాయి.

(2) $S(x, y, z) \equiv 0$కు కూడా పై సిద్ధాంతము వర్తించును.

8.5.2 ఉదాహరణ: $xy + yz + zx = 0$ సూచించెడి శంఖువు $ax + by + cz = 0$ అను తలములు రెండు లంబ జనక రేఖలలో ఖండించుకొనుటకు నియమము $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ అని చూపుము.

సాధన: దత్త శంఖువు సమీకరణము $xy + yz + zx = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

$E(x, y, z)$తో పోల్చగా $a = b = c = 0$ మరియు $g = t = h = \frac{1}{2}$.

$a + b + c = 0$ కనుక లంబ జనక రేఖా త్రయం ఉంటుంది.

దత్త తలము యొక్క సమీకరణము $ax + by + cz = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

(1), (2)లు రెండు లంబ జనక రేఖలలో ఖండించుకుంటే (2)కు లంబముగా, శీర్షం 'O' ద్వారా పోయే రేఖ మూడవది అవుతుంది. ఆ రేఖ సమీకరణము $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$

(3) మీద ఏదైనా బిందువు (ar, br, cr) శంఖువు (1) మీద ఉండును.

$$\therefore \ (ab + bc + ca)r^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$$

$\therefore$ (1), (2)లు రెండు లంబ జనక రేఖలలో ఖండించుకొనుటకు నియమము $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

8.5.3 ఉదాహరణ: $\ell x + my + nz = 0$ అను తలము

$(b-c)x^2 + (c-a)y^2 + (a-b)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ అను శంఖువు రెండు లంబ జనక రేఖలలో ఖండించుకొనుటకు నియమము

$(b-c)\ell^2 + (c-a)m^2 + (a-b)n^2 + 2fmn + 2gn\ell + 2h\ell m = 0$ అని చూపుము.

సాధన: దత్త శంఖువు సమీకరణము

$$(b-c)x^2 + (c-a)y^2 + (a-b)z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0$తో సరిపోల్చగా

$A = b-c, B = c-a, C = a-b, F = f, G = g, H = h$

$A + B + C = b - c + c - a + a - b = 0$ కనుక (1)కి మూడు లంబ జనక రేఖలుంటాయి.

దత్త తలము సమీకరణము $\ell x + my + nz = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

(1), (2)లు రెండు లంబ జనక రేఖలలో ఖండించుకున్న మూడవ లంబ జనక రేఖ (2)కు లంబంగా శీర్షం $(0, 0, 0)$ ద్వారా పోవును. ఆ రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$$

(3) మీద ప్రతి బిందువు $(\ell r, mr, nr)$ శంఖువు (1) మీద ఉండును.

$$\therefore \left[(b-c)\ell^2 + (c-a)m^2 + (a-b)n^2 + 2\ell mn + 2gn\ell + 2h\ell m\right]r^2 = 0$$

$\therefore$ (1), (2)లు పరస్పర లంబ జనక రేఖలలో ఖండించుకొనుటకు నియమము

$$(b-c)\ell^2 + (c-a)m^2 + (a-b)n^2 + 2tmn + 2gnl + 2h\ell m = 0$$

8.5.4 **ఉదాహరణ:** $5yz - 8zx - 3xy = 0$ సూచించెడి శంఖువుకు కల లంబ జనక రేఖా త్రయంలో ఒకటి $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ అయిన మిగిలిన రెఇండింది సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన: దత్త శంఖువు సమీకరణము $5yz - 2zx - 3y = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$

(1)కి కల లంబ రేఖా జనక త్రయంలో ఒక్కటైన $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$

దిక్ సంఖ్యలు $(1, 2, 3)$ కనుక మిగిలిన రెండు జనక రేఖలు $5yz - 8zx - 3xy = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$ మీద యుండును.

(1), (3)ల ఖండన రేఖ సమీకరణములు $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (4)$ అనుకొనిన

$$\ell + 2m + 3n = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (5)$$

$$5mn - 8\ell n - 3\ell m = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (6)$$

(5) నుండి $\ell = -(2m+3n)$, (6)లో ప్రతిక్షేపించిన

$$5mn + (8n + 3m)(2m + 3n) = 0$$

$$\Rightarrow 5mn + 16mn + 24n^2 + 6m^2 + 9mn = 0$$

$$\Rightarrow 6m^2 + 30mn + 24n^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 5mn + 4n^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4mn + mn + 4n^2 = 0$$

$$\Rightarrow m(m + 4n) + n(m + 4n) = 0$$

$$\Rightarrow (m + n)\,(m + 4n) = 0$$

(1), (3)ల ఖండిత రేఖల దిక్ సంఖ్యలు

(1) $\ell + 2m + 3n = 0$ $\qquad$ 2 3 1 2

$0\cdot\ell + 1\cdot m + 1\cdot n = 0$ $\qquad$ 1 4 0 1

$$\Rightarrow \frac{\ell}{8-3} = \frac{m}{0-4} = \frac{n}{1-0}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{5} = \frac{m}{-4} = \frac{n}{1}$$

(2) $\ell + 2m + 3n = 0$ $\qquad$ 2 3 1 2

$0\cdot\ell + 1\cdot m + 1\cdot n = 0$ $\qquad$ 1 1 0 1

$$\frac{\ell}{2-3} = \frac{m}{0-1} = \frac{n}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{1} = \frac{m}{1} = \frac{n}{-1}$$

$\therefore$ మిగిలిన రెండు జనక రేఖల సమీకరణము

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{3}{1} \text{ మరియు } \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

8.6 లంబ వర్తుల శంఖువు:

8.6.1 సిద్ధాంతము: L సరళరేఖ, O, L మీది ఒక బిందువు. $\theta \in (O, \pi/2)$ అనుకొనుము. OP రేఖ L తో చేయు కోణము θ అయిన P యొక్క బిందు పథము O శీర్షముగా కల శంఖువు అవుతుంది.

ఉపపత్తి - సందర్భము I : O ను మూల బిందువు, L యొక్క దిక్ కొసైన్‌లను ℓ, m, n అనుకొనుము.

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1,\ L \text{ సమీకరణములు } \frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \cdots \quad (1)$$

కావలసిన బిందు పథమును S అనుకొనుము. S మీది ఏదైనా బిందువు $P(x, y, z)$ అయిన OP దిక్ సంఖ్యలు (x, y, z).

$\therefore$ PS మీద ఉంది $\Leftrightarrow (O, P, L) = \theta$

$$\Leftrightarrow \text{Cos } \theta = \left| \frac{\ell x + my + nz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \text{Cos}^2\theta = (\ell x + my + nz)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\ell^2 - \text{Cos}^2\theta\right)x^2 + \left(m^2 - \text{Cos}^2\theta\right)y^2 + \left(n^2 - \text{Cos}^2\theta\right)z^2 + 2\ell mxy + 2mnyz + 2\ell nzx = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

(2) x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము కాబట్టి O శీర్షముగా కల శంఖువు అవుతుంది.

($\therefore (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ in (2) $a = b = c = 0$ అయిన

$\ell^2 = m^2 = n^2 = \text{Cos}^2 \neq 0$ అపుడు (2) అక్షములను కల్గియున్న శంఖువు అవుతుంది.)

$\therefore$ అది ఒక అవిశీర్ణ శంఖువు అవుతుంది.

సందర్భము II : O మూల బిందువును (α, β, γ) అయిన P యొక్క బిందు పథము

$$\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right] \text{Cos}^2\theta = \left[\ell(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)\right]^2$$

టది (α, β, γ) శీర్షముగా కల ఒక అవిశీర్ణ శంఖువు.

8.6.2 **నిర్వచనము:** S అను ఉపరితలము O వద్ద అనుషక్తమయిన రేఖల సమితి. $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. ఒక స్థిర రేఖ L తో స్థిర కోణము θ చేయు రేఖ OP అయిన P యొక్క బిందు పథము శంఖువు అవుతుంది. దీనినే లంబవర్తుల శంఖువు అందురు. ఈ శంఖువుకి L ను అక్షము అని, θ ను శీర్షార్థ కోణము అంటారు.

8.6.3 **సిద్ధాంతము:** అక్షమునకు లంబముగా ఉండే తలము మరియు శంఖువుల ఛేదకము ఒక వృత్తము అవుతుంది.

ఉపపత్తి: శంఖువు యొక్క శీర్షము O, అక్షము L, L కు లంబముగా ఉన్న తలము π మరియు శంఖువు యొక్క ఛేదకము C మరియు $P \in C$, L, C ల ఖండన బిందువు H అనుకొనుము. ON, π కు లంబ రేఖ కనుక

$$\frac{PN}{ON} = \tan\theta \Rightarrow NP^2 = ON^2 \cdot \tan^2\theta$$

$\therefore$ P యొక్క బిందు పథము, N కేంద్రముగా కల వృత్తము.

8.6.4 **సిద్ధాంతము:** శీర్షము O వద్ద కల్గి, శీర్షార్థ కోణము θ, అక్షము Z, అక్షముగా కల లంబ వృత్త శంఖువు సమీకరణము $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\theta$.

ఉపపత్తి: శీర్షము O వద్ద కలిగి, θ శీర్షార్థ కోణముగాను, అక్షము $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ గా గల శంఖువు సమీకరణము

$(\ell x + my + nz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\,\text{Cos}^2$, $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1\cdot$ Z అక్షానికి దిక్ కొసైన్‌లు

$(\ell, m, n) = (0, 0, 1)$ కావున శంఖువు సమీకరణం

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\theta$$

అనగా $x^2 + y^2 + z^2 = z^2 \sec^2\theta$

అనగా $x^2 + y^2 + z^2\,(\sec^2\theta - 1)$

అనగా $x^2 + y^2 + z^2\,\tan^2\theta$

8.6.5 లంబ రేఖా త్రయం కల్గిన లంబ వృత్త శంఖువు యొక్క శీర్షార్థ కోణము $\tan^{-1}\sqrt{2}$ అని చూపుము.

సాధన: θ శీర్షార్థ కోణముగా కల లంబవర్తుల శంఖువు సమీకరణము

$$(\ell x + my + nz)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\theta,\ \ell^2 + m^2 + n^2 = 1$$

దానికి లంబ జనక రేఖా త్రయము ఉంటే $a + b + c = 0$ దీనికి తుల్య నియమం

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = (1+1+1)\cos^2\theta \Leftrightarrow 1 = 3\cdot\cos^2\theta \Leftrightarrow \sec^2\theta = 3$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\theta + 1 = 3 \Leftrightarrow \tan^2\theta = 2 \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$$

8.6.6 లంబ జనక రేఖా త్రయము కల్గిన లంబ వృత్త శంఖువు యొక్క శీర్షార్ధ కోణము $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ అని చూపుము.

సాధన: సార్వత్రికతకు భంగము లేకుండా Oను శీర్షము గాను, Z అక్షమును అక్షముగాను తీసికొంటే లంబ వర్తుల శంఖువు సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 \tan^2 \theta \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

(1)కు పరస్పర లంబ స్పర్శ తల త్రయము ఉంటే దాని విలోమ శంఖువుకు పరస్పర లంబ స్పర్శరేఖా త్రయము ఉంటుంది.

(1) యొక్క విలోమ శంఖువు సమీకరణము

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{\tan^2 \theta} = 0$$

అనగా $\tan^2 \theta \cdot x^2 + \tan^2 \theta \cdot y^2 - z^2 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$

(2)కు పరస్పర లంబ స్పర్శరేఖా త్రయము ఉండును. కనుక $a + b + c = 0$ నియమాననుసరించి

$$2\tan^2 \theta - 1 = 0 \Rightarrow \tan^2 \theta = 1/2$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

8.6.7 **ఉదాహరణ:** నిరూపాక్షములు జనక రేఖలుగా కల లంబ వర్తుల శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: నిరూపాకాక్షములు జనక రేఖలు కనుక 'O' శీర్షము, అక్షము x, y, z అక్షములతో సమాన కోణము చేయును.

అనగా $\ell = m = n, \ell^2 + m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow \ell = m = n = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\alpha$

కావున అక్షము సమీకరణము $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ మరియు శంఖువు సమీకరణము

$$(\ell x + my + nz)^2 = \left(\ell^2 + m^2 + n^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\cos^2 \alpha$$

దీనికి తుల్యంగా

$$\left(\frac{x \pm y \pm z}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2+2\left(xy \pm yz \pm zx\right) = x^2+y^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow\ xy \pm yz \pm zx = 0$$

8.6.8 **ఉదాహరణ:** శీర్షార్థ కోణము α గా కల్గి యుండి, OX, OY ల ద్వారాను $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ ద్వారాను పోయే శంఖువు యొక్క శీర్షార్థ కోణము $\cos^{-1}\left(9-4\sqrt{3}\right)^{-1/2}$ అని చూపుము.

సాధన: దత్త శంఖువుకు జనక రేఖలు OX, OY, $x=y=z$, వీటి దిక్ కొసైన్‌లు వరుసగా

$$(1,\ 0,\ 0),\quad (0,1,\ 0),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

అక్షము యొక్క సమీకరణము $\frac{x}{\ell}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n},\ \ell^2+m^2+n^2=1$ అనుకొనుము . . . (1)

అది అన్ని జనక రేఖలతో సమాన కోణము చేయును.

OX, (1)ల మధ్య కోణము α అయితే

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot\ell + 0\cdot m + 0\cdot n}{\sqrt{1^2+0+0}\cdot\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}} = \ell$$

OY, (1)ల మధ్య కోణము $\alpha \Rightarrow \cos\alpha = m$

మరియు (1), $\frac{x}{1},\frac{y}{1},\frac{z}{1}$ ల మధ్య కోణము α కాబట్టి

$$\cos\alpha = \frac{\ell+m+n}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}} = \frac{\ell+m+n}{\sqrt{3}}$$

$\ell^2+m^2+n^2=1,\ \cos\alpha=\ell,\ \cos\alpha=m,\ \ell+m+n=\sqrt{3}\cos\alpha$

$\Rightarrow n=\left(\sqrt{3}-2\right)\cos\alpha$ లను

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \left(\sqrt{3} - 2\right)^2 \cos^2 = 1$$

$$\Rightarrow 1+1+3+4-4\sqrt{3} = \sec^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sec\alpha \left(9-4\sqrt{3}\right)^{1/2} \Rightarrow \cos\alpha = \left(9-4\sqrt{3}\right)^{-1/2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(9-4\sqrt{3}\right)^{-1/2}$$

8.7 సారాంశము:

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత విద్యార్థులు, స్పర్శ శంఖువు, లంబవర్తుల శంఖువు, ఒక శంఖువునకు పరస్పర లంబ జనక రేఖా త్రయముండుటకు నియమములు మొదలగునవి తెలిసికొని వీటి అనువర్తనాలలో ప్రావీణ్యత పొందుతారు.

8.8 సాంకేతిక పదములు:

స్పర్శ శంఖువు

లంబ వర్తుల శంఖువు

పరస్పర లంబ జనక రేఖా త్రయము

పరస్పర లంబ స్పర్శ తల త్రయము

8.9 అభ్యాసము:

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 2$ అను గోళమునకు $(1, 1, 1)$ వద్ద శీర్షము గల స్పర్శ శంఖువు సమీకరణం కనుగొనుము.

2. O నుండి $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = k^2$ అను గోళమునకు గీచిన స్పర్శ రేఖల బిందు పథము $\left(a^2 + b^2 + c^2 - k^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = (ax + by + cz)^2$ అని చూపుము.

3. $ax^2 + by^2 + 2cz = 0$ అను ఉపరితలము యొక్క స్పర్శ శంఖువుకు పరస్పర లంబ జనక రేఖా త్రయము ఉంటే దాని శీర్షము యొక్క బిందు పథము సమీకరణము కనుగొనుము.

4. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 1$ అను గోళమునకు $(1, 1, 1)$ వద్ద శీర్షము గల స్పర్శ శంఖువు సమీకరణం కనుగొనుము.

5. $11y + 6zx - 14xy = 0$ అను శంఖువునకు గీచిన పరస్పర లంబ జనక రేఖా త్రయములో ఒకటి $x = \frac{y}{2} = z$ అయిన, మిగిలిన రెండు జనక రేఖల సమీకరణములు కనుగొనుము.

6. $3yz - 2zx - 2xy = 0$ అను శంఖువునకు గీచిన పరస్పర లంబ జనక రేఖా త్రయములో ఒకటి $x = y = \dfrac{z}{2}$ అయిన మిగిలిన రెండు జనక రేఖల సమీకరణములు కనుగొనుము.

7. $ax^2 + by^2 = 1,\ z = 0$ అను వక్రమును ఖండిస్తూపోయే శంఖువుకు పరస్పర లంబ జనక రేఖా త్రయముంటే శంఖువు యొక్క శీర్ష బిందు పథము కనుగొనుము.

8. $P(2, -3, 5)$ వద్ద శీర్షము కల్గి, PQ అక్షముగా కల లంబ వర్తుల శంఖువు యొక్క శీర్షార్ధ కోణము $\dfrac{\pi}{6}$ అయిన, ఆ శంఖువు సమీకరణము కనుగొనుము.

9. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 6 = 0$ అను సమీకరణము, శీర్షము $(1, 2, -3)$ అక్షము Y అక్షమునకు సమాంతరము, శీర్షార్ధ కోణము $\dfrac{\pi}{4}$ గా గల లంబ వర్తుల శంఖువు అని చూపుము.

10. అక్షము, నిరూపాకాక్షములతో సమాన కోణములు చేస్తూ శీర్షము $P(2, -3, 5)$ వద్ద కల్గి బిందువు $(1, -2, 3)$ ద్వారా పోయే లంబ వర్తుల శంఖువు సమీకరణం కనుగొనుము.

11. శీర్షము O వద్ద కలిగి, అక్షములతో సమాన కోణములు చేయు అక్షము కల్గియున్న లంబ వర్తుల శంఖువు, దిక్ సంఖ్యలు $(1, -2, 2)$ గా గల రేఖను కల్గియుంటే దాని సమీకరణము కనుగొనుము.

12. O వద్ద శీర్షము కల్గి, అక్షము $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{3}$ గా గల లంబ వర్తుల శంఖువు $(1, 1, 2)$ ద్వారా పోతే, దాని సమీకరణము కనుగొనుము.

8.10 సమాధానములు:

1. $3x^2 - y^2 + 4zx - 10x + 2y - 4z + 6 = 0$

3. $ab\left(x^2 + y^2\right) + 2c(a+b)z - c^2 = 0$

4. $4x^2 + 3y^2 - 5z^2 - 6yz - 8x + 16z - 4 = 0$

5. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{4}\ ;\ \dfrac{x}{-11} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{7}$

6. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{1}\ ;\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$

7. $ax^2 + by^2 + (a+b)z^2 = 1$

8. $5(x^2 + y^2 + z^2) - 8(xy + yz + zx) - 4x + 86y - 58z + 278 = 0$

10. $x^2 + y^2 + z^2 + 6(xy + yz + zx) - 4(4x + 9y + z + 7) = 0$

11. $4(x^2 + y^2 + z^2) + 9(xy + yz + zx) = 0$

12. $4x^2 + 40y^2 + 19z^2 - 12(4xy + 6yz - 3zx) = 0$

8.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. (a) స్పర్శ శంఖువును నిర్వచింపుము.

   (b) $V(x_1, y_1, z_1)$ నుండి $S(x, y, z) = 0$ అను ఉపరితలమునకు గీచిన స్పర్శరేఖా పథము $S_1^2 = SS_{11}$ అను శంఖువుతో సూచించవచ్చు అని చూపుము.

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ సూచించెడి గోళమునకు, $(2, 4, 1)$ నుండి గీసిన స్పర్శ శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము. అది $z = 0$ తలమును ఒక లంబ అతి పరావలయములో ఖండించును అని చూపుము.

2. (a) లంబ వర్తుల శంఖువును నిర్వచింపుము.

   (b) ఒక లంబ వర్తుల శంఖువు దాని అక్షమునకు లంబ తలముల చేధనము వృత్తము అని చూపుము.

   (c) ఒక లంబ వర్తుల శంఖువు OX, OY, $x = y = z$ లను జనక రేఖలుగా కల్గి ఉంటే దాట శీర్షార్థ కోణము $\alpha = \cos^{-1}\left(9 - 4\sqrt{3}\right)^{-1/2}$ అని చూపుము.

8.12 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: మూల బిందువు గుండాపోయే మూడు రేఖల దిక్ కొసైన్‌లు $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 4, 12)$లకు అనుపాతంలో ఉంటే అటువంటి రేఖలతో ఏర్పడే లంబ వర్తుల శంఖువు అక్షము యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు కనుక్కోండి. లంబ వర్తుల శంఖువు శీర్షార్థ కోణం $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ అని చూపుము.

నిర్వచనము: ఒక స్థిర బిందువు గుండాపోతూ, ఈ బిందువు గుండా పోయే స్థిర సరళరేఖతో స్థిర కోణం చేసే సరళరేఖతో జనితమైన ఉపరితలాన్ని లంబ వర్తుల శంఖువు అంటాం.

సిద్ధాంతాలు:

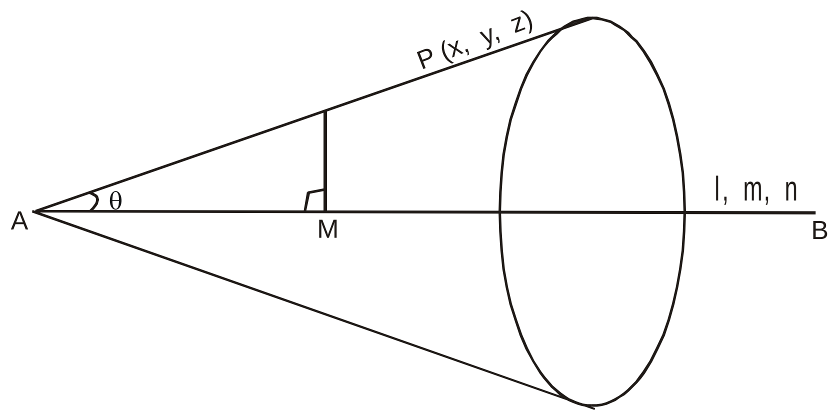
(1) మూల బిందువు శీర్షంగాను, Z అక్షం, అక్షంగాను గల లంబవర్తుల శంఖువు సమీకరణం

$x^2+y^2=z^2\tan\theta$, శీర్షార్ధ కోణం θ.

(2) శీర్షం (λ, β, γ), అక్షం దిక్ కొసైన్‌లు ℓ, m, n శీర్షార్ధ కోణం θ అయితే లంబ వర్తుల శంఖువు సమీకరణం

$$\left[\ell(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)\right]^2$$

$$=\left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]\cos\theta$$



సాధన: శంఖువు అక్షం యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు ℓ, m, n అనుకొనుము.

మూల బిందువుగుండా పోయే మూల రేఖలు OA, OB, OC అనుకొనుము. అప్పుడు OA, OB, OCల దిక్ సంఖ్యలు వరుసగా $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 4, 12)$ అగును.

శంఖువు అక్షము జనక రేఖలు OA, OB, OCలతో సమాన కోణము α చేయును కావున

$$\frac{\ell(1)+m(2)+n(2)}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\ell(2)+m(3)+n(6)}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{\ell(3)+m(4)+n(12)}{\sqrt{9+16+144}}=\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{\ell+2m+2n}{3}=\frac{3\ell+3m+6n}{7}=\frac{3\ell+4m+12n}{13}=\cos\alpha\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad(1)$$

$$\frac{\ell+2m+2n}{3}=\frac{2\ell+3m+6n}{7}\Rightarrow \ell+5m-4n=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (2)$$

మరియు

$$\frac{\ell+2m+2n}{3}=\frac{2\ell+3m+6n}{7}\Rightarrow 5\ell+11m-6n=0 \quad \cdot\cdot\cdot \quad (3)$$

(2), (3)లను సాధించగా

$$\begin{array}{cccc} & \ell & m & n \\ 5 & -4 & 1 & 5 \\ 11 & -6 & 5 & 11 \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{\ell}{-30+44}=\frac{m}{-20+6}=\frac{n}{11-25}$$

అనగా $-\ell=m=n$

కావున శంఖువు అక్షం యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $-1, 1, 1.$

మరియు దిక్ కొసైన్‌లు $\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{\ell+2m+2n}{3}=\frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}}}{3}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ముగింపు:

మూల బిందువు గుండాపోయే మూడు రేఖల దిక్ కొసైన్‌లు $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 11, 12)$లకు అనుపాతంలో ఉంటే అంటువంటి రేఖలతో ఏర్పడే లంబ వర్తుల శంఖువు అక్షం దిక్ కొసైన్‌లు $\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ మరియు శీర్షార్థ కోణం $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

పాఠ్యభాగ రచయిత

G. నారాయణ

పాఠము - 9

స్థూపకము

9.1 పాఠము యొక్క లక్ష్యము:

ఈ పాఠంలో స్థూపకము యొక్క జ్యామితీయ నిర్వచనము నుండి మొదలుకొని నిరూపక వ్యవస్థలో దాని సమీకరణము x, y, z లలో వర్గ సమీకరణము అని చూపి, వివిధ సందర్భములలో స్థూపకము సమీకరణమును కనుగొంటాము. లంబవర్తుల స్థూపకము, స్పర్శ స్థూపకములను గూర్చి తెలిసికొంటాము.

9.2 పాఠ్యాంశక్రమము:

ఈ పాఠము నందలి అంశములు

9.3 నిర్వచనములు - ఉదాహరణలు:

9.3.1 **నిర్వచనము:** అంతరాళము R^3లో S ఒక ఉపరితలము. P ఒక బిందువు. L ఒక సరళరేఖ. $P \in S$ అయిన, P ద్వారా Lకు సమాంతరముగా గీచిన సరళరేఖ PM అయితే $PM \subset S$ అయితే Sను, L అక్షముగా గల స్థూపకము అందురు. i.e., L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు (ℓ, m, n) అయి $P \in S$, $P(x, y, z)$ అయితే $(x+\ell r,\ y+mr,\ z+nr)$, $r \in R$ S మీద ఉండును. S మీద గల ఏదైనా రేఖను S కి జనక రేఖ అందురు.

9.3.2 ఉదాహరణలు: వివిధ రకములైన స్థూపకములు, వాని అక్షములు ఈ క్రింద యివ్వబడినవి.

	స్థూపకము	**అక్షము**
(ఎ)	శూన్య సమితి	ఏదైనా సరళ రేఖ
(బి)	రేఖ L	L కు సమాంతరముగానున్న ఏదైనా రేఖ
(సి)	C కొన్ని రేఖల సమితి	C లోని ఏదైనా రేఖకు సమాంతర రేఖ
(డి)	సమతలము π	π కు సమాంతరముగానున్న ఏదైనా సరళరేఖ
(ఇ)	P, సమాంతర తలముల సమితి	P లోని ఏదైనా తలమునకు సమాంతరముగానున్న రేఖ
(ఎఫ్)	P ; L అను రేఖను కల్గియున్న తలముల సమితి	L కు సమాంతరముగానున్న ఏదైనా రేఖ

9.3.3 గమనిక: పైన పేర్కొన్న స్థూపకములన్ని విశీర్ణ స్థూపకములు. మిగిలినవి అవిశీర్ణ స్థూపకములు, అవి వార్గిక ఉపరితలములు. ఈ పాఠంలో మనము 7వ పాఠంలోని సాంకేతికములను ఉపయోగిస్తాము.

9.4 వివిధ పకముల అవిశీర్ణ స్థూపకముల సమీకరణములు:

9.4.1 సిద్ధాంతము: x, y, z **లలో రెండవ తరగతి సమీకరణము స్థూపకమును సూచించుటకు నియమములు:**

$$f(x,y,z) \equiv E(x,y,z) + 2(ux+vy+wz) + d = 0,$$

$E(x,y,z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ ఒక స్థూపకమును సూచించును

$$\Leftrightarrow (1)\quad E(\ell,m,n) \equiv 0 \qquad (2)\ \ell u + mv + nw = 0$$

($f + (x, y, z) = 0$ అయినపుడల్లా) $(\ell, m, n) \neq (0,0,0)$, u, v, w లు **7.6.1**; లో యిచ్చినారు.

ఉపపత్తి: స్థూపకము నిర్వచనము ప్రకారము $f(x,y,z) = 0$ అను సమీకరణము S అను స్థూపకమును సూచించును

$$\Leftrightarrow\ P(x, y, z) \in S \Rightarrow (\ell r + x,\ mr + y,\ nr + z) \in S,\quad (\ell, m, n) \neq (0,0,0)$$

$\Leftrightarrow (1)\ E(\ell, m, n) = 0,\ (2)\ f(x, y, z) = 0$ అయినపుడల్లా $\ell u + mv + nw = 0$

$\therefore$ సిద్ధాంతము ఋజువైనది.

9.4.2: జనకరేఖలు x అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంటూ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \cdot \cdot \cdot (1)$ మరియు $\ell x + my + nz = p \cdot \cdot \cdot (2)$ అను సమతలము ఛేదించే స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: జనక రేఖ x అక్షమునకు సమాంతరము $P(x_1, y_1, z_1)$ ఏదైనా బిందువు కావలసిన స్థూపకము మీద ఉంటే

$P \in S \Rightarrow PQ \subset S$ ప్రకారము

$(x_1, y_1, z_1) \in S \Rightarrow (x_1 + r, y_1, z_1) \in S$ ఇక్కడ $(\ell, m, n) = (1, 0, 0)$

P స్థూపకము మీది ఉంది $\Leftrightarrow P$ బిందువు **(1)**, **(2)**ల మీద ఉంది

$\Leftrightarrow a\,(x_1 + r)^2 + by_1^2 + cz_1^2 = 1, \quad \ell(x_1 + r) + my_1 + nz_1 = p$ లలో, కు ఒకే సాధన ఉండును.

$$\Leftrightarrow r = \frac{-(\ell x_1 + my_1 + nz_1)}{\ell} \text{ మరియు } a(x_1 + r)^2 + by_1^2 + cz_1^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{my_1 + nz_1}{\ell} - p\right)^2 + by_1^2 + cz_1^2 = 1$$

కావలసిన శంఖువు యొక్క సమీకరణము P యొక్క బిందుపదము

$$\Rightarrow (am^2 + b\ell^2)y^2 + (an^2 + c\ell^2)z^2 + 2amnyz - 2amPy - 7anpz + aP^2 - \ell^2 = 0$$

9.4.3 $f(x, y) = 0, \quad z = 0$ అను వక్రమును స్పృశిస్తూ, $\dfrac{x}{\ell} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$ అక్షముగా గల స్థూపక సమీకరణము

$$f\left(x - \frac{\ell}{n}z, \ \ y - \frac{m}{n}z\right) = 0$$ అని చూపుము.

సాధన: అక్ష సమీకరణము $\dfrac{x}{\ell} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

దత్త వక్రం $f(x,y) = 0, \quad z = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

$P(x_1, y_1, z_1)$ అనునది కావలసిన స్థూపకము S మీద ఏదైనా బిందువనుకొనుము. అపుడు జనక రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

$P \in S \Leftrightarrow (3)$ మీది ప్రతి బిందువు S మీద ఉంది.

$\Leftrightarrow r \in R$ కు $(\ell r + x_1, mr + y_1, nr + z_1), \ (2)$ మీద ఉంది

$$\Leftrightarrow f(\ell r + x_1, \ mr + y_1) = 0, \ \ nr + z_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{z_1}{n}, \quad f\left[\left(x_1 - \frac{\ell}{n} z_1\right), \left(y_1 - \frac{m}{n} z_1\right)\right] = 0$$

$\therefore$ కావలసిన స్థూపకము యొక్క సమీకరణము

$$f\left(x - \frac{\ell}{n} z, \ \ y - \frac{m}{n} z\right) = 0$$

9.4.4 జనకరేఖలు $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ కు సమాంతరముగా ఉంటూ $f(x, y, z) = 0$, $ax + by + cz + d = 0$, $a\ell + bm + cn \neq 0$ తలమును స్పృశించే స్థూపకము సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్తరేఖ $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

దత్త వక్రం $f(x, y, z) = 0, \quad ax + by + cz + d = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

స్థూపకము మీద $P(x_1, y_1, z_1)$ ఏదైనా బిందువు అనుకొనుము.

జనక రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

(3) మీద ఏదైనా బిందువు $(\ell r + x_1, mr + y_1, nr + z_1)$

జనకరేఖ (2)ను స్పృశించును.

$$a(\ell r + x_1) + b(mr + y_1) + c(nr + z_1) + d = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (5)$$

మరియు $f(\ell r + x_1, mr + y_1, nr + z_1) = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (6)$లకు ఒక r ఉంటుంది.

(5) నుండి $r = -\left(\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a\ell + bm + cn}\right)$ (6)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$f\left(x_1 - \frac{\ell(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a\ell + bm + cn}, \ \ y_1 - \frac{m(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a\ell + bm + cn}, \ z_1 - \frac{n(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{a\ell + bm + cn}\right) = 0$$

$\therefore$ కావలసిన స్థూపకము సమీకరణము

$$f\left[\frac{(bm+cn)x-\ell(by+cz+d)}{(a\ell+bm+cn)}, \frac{(a\ell+cn)y-m(ax+cz+d)}{(a\ell+bm+cn)}, \frac{(a\ell+bm)z-n(ax+by+d)}{(a\ell+bm+cn)}\right]=0$$

9.4.5 Z అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంటూ, $ax^2+by^2=2z \cdots (1)$, $\ell x+my+nz=p \cdots (2)$ అను తలమును స్పృశిస్తూపోయే స్థూపకము సమీకరణమును కనుగొనుము.

$(a^2+b^2\neq 0, \quad n\neq 0)$.

సాధన: $P(x_1, y_1, z_1)$ అను బిందువు కావలసిన స్థూపకము మీది ఉంది అనుకొనుము. జనకరేఖ Z అక్షమునకు సమాంతరము, కనుక జనక రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1}=r, \quad r\in R \cdots (3)$$

P స్థూపకము మీది ఉంది $\Leftrightarrow (x_1, y_1+ z_1+r)$ అను బిందువు **(1)**, **(2)**ల మీద ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow ax_1^2+by_1^2=2(z_1+r), \ \ell x_1+my_1+nz_1+nr= p$ లకు ఒకే r ఉంటుంది.

$$\Leftrightarrow r=\frac{\ell x_1+my_1+nz_1-p}{n}, \quad ax_1^2+by_1^2=2(z_1+r)$$

P యొక్క బిందు పథము కావలసిన స్థూపక సమీకరణము అవుతుంది.

$\therefore$ స్థూపక సమీకరణము

$$n(ax^2+by^2)-2(\ell x+my-P)=0$$

$\Leftrightarrow (x_1+r)^2+2(y_1-2r)^2=1, \ z_1+3r=0$ లకు r ఏకైకము

$\Leftrightarrow r=\frac{-z_1}{3}$ విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(x_1-\frac{z_1}{3}\right)^2+2\left(y_1+\frac{2z_1}{3}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow (3x_1-z_1)^2+2(3y_1+2z_1)^2=9$$

కావలసిన స్థూపక సమీకరణము P యొక్క బిందు పథము

$\therefore$ స్థూపక సమీకరణము

$$9x^2 + 18y^2 + 9z^2 - 6zx + 24zy = 9$$

$$\text{i.e.} \quad 3\left(x^2 + 2y^2 + z^2\right) - 2\left(2x - 4zy\right) = 3$$

9.4.6 $xy = 1,\ z = 1$ అను వక్రమును స్పృశిస్తూ, జనక రేఖలు దిక్ సంఖ్యలు $(1, 1, 1)$గా కల రేఖకు సమాంతరముగా నున్న స్థూపకము సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: $P(x_1, y_1, z_1)$ ఏదైనా బిందువు స్థూపకము మీద ఉంది అనుకొనుము అపుడు జనక రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{1} = \frac{z - z_1}{1} = r, \ \ r \in R \quad \cdots \quad (1)$$

(1)మీది ఏదైనా బిందువు $\left(r + x_1,\ r + y_1,\ r + z_1\right) \quad \cdots \quad (2)$

దత్త వక్రము $xy = 1,\ z = 1 \quad \cdots \quad (3)$

సరళరేఖ (1), వక్రము (3)కు స్పర్శ రేఖ అయితే

$(x_1 + r)\ (y_1 + r) = 1,\ z_1 + r = 1$ సమీకరణములలో r ఏకైక సాధన యుండును.

$\Leftrightarrow\ x_1 y_1 + (x_1 + y_1) r + r^2 = z_1 + r$ కు ఏకైక సాధన ఉండును.

$\Leftrightarrow\ r^2 + (x_1 + y_1 - 1) r + x_1 y_1 - z_1 = 0$ కు ఏకైక సాధన ఉండును.

$\Leftrightarrow\ \Delta = 0$ i.e. $(x_1 + y_1 - 1)^2 = 4(x_1\ y_1 - z_1)$

కావలసిన స్థూపక సమీకరణము P యొక్క బిందు పథము అనగా

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 4z + 1 = 0$$

9.4.7 $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0$ ను స్పృశిస్తూ, జనక రేఖలు $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$ కు సమాంతరముగా కల స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త వక్రం $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0 \quad \cdots \quad (1)$

దత్త రేఖ $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3} \quad \cdots \quad (2)$

$P(x_1, y_1, z_1)$ స్థూపకము మీది ఏదైనా బిందువు అనుకొనుము

జనకరేఖలు (2)కు సమాంతరము

$\therefore$ జనక రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{-2} = \frac{z-z_1}{3} = r, \quad r \in R \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

(3) మీది ఏదైనా బిందువు $(r+x_1, y_1-2r, 3r+z_1) \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$

$P \in S \Rightarrow (4)$లో ఏకైక r కు (1)ను తృప్తిపరుచును.

$\Leftrightarrow (x_1+r)^2 + 2(y_1-2r)^2 = 1,\ z_1+3r=0$లకు r ఏకైకము.

$\Leftrightarrow r = \frac{-z_1}{3}$ విలువను ప్రతిక్షేపించగా,

$$\left(x_1 - \frac{z_1}{3}\right)^2 + 2\left(y_1 + \frac{2z_1}{3}\right)^2 = 1$$

$\Leftrightarrow \quad (3x_1 - z_1)^2 + 2(3y_1+2z_1)^2 = 9$

కావలసిన స్థూపక సమీకరణము P యొక్క బిందు పథము స్థూపక సమీకరణము

$$9x^2 + 18y^2 + 9z^2 - 6zx + 24zy = 9$$

i.e. $\quad 3\left(x^2+2y^2+z^2\right) - 2(2x-4zy) = 3$

9.5 గోళము యొక్క స్పర్శ స్థూపకము:

9.5.1 సిద్ధాంతము: $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$ అను రేఖకు సమాంతరముగా $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$ అను గోళమునకు గీచిన స్పర్శ రేఖల బిందు పథము ఒక స్థూపకము. దాని సమీకరణము

$$\left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right) = (\ell x + my + nz)^2$$

ఉపపత్తి: ఏదైనా బిందువు $P(x_1, y_1, z_1)$కు, (1)కు సమాంతరముగా P ద్వారా పోయే రేఖా సమీకరణములు

$$\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = r, \quad r \in R \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

(3) మీద ఏదైనా బిందువు $(\ell r + x_1, mr + y_1, nr + z_1)$

(3) అను రేఖ (2) గోళమును స్పృశించిన

$(\ell r + x_1)^2 + (mr + y_1)^2 + (nr + z_1)^2 = a^2$ లో r కు ఏకైక సాధన ఉండును.

$\Leftrightarrow r^2(\ell^2 + m^2 + n^2) + 2r(\ell x_1 + my_1 + nz_1) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - a^2 = 0$ కు ఒకే మూలము ఉండును.

$$\Leftrightarrow 4(\ell x_1 + my_1 + nz_1)^2 = 4(\ell^2 + m^2 + n^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - a^2)$$

$\therefore$ P యొక్క బిందు పథ సమీకరణము

$$(\ell x + my + nz)^2 = (\ell^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$$

9.5.2 నిర్వచనము: $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ అను రేఖకు సమాంతరముగా $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ అను గోళమునకు గీచిన స్పర్శరేఖల బిందు పథము ఒక స్థూపకము. ఆ స్థూపకమును $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ అక్షముగా గోళము యొక్క స్పర్శ స్థూపకము అందురు.

9.5.3 ఉదాహరణ: $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ అక్షముగా $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 1 \quad \cdots \quad (1)$ యొక్క స్పర్శ స్థూపకమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త రేఖ $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \cdots \quad (2)$

$P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు కావలసిన స్థూపకము మీది ఉంది అనుకొనుము. అపుడు జనక రేఖ సమీకరణము

$$\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{1} = \frac{z - z_1}{1} \quad \cdots \quad (3)$$

(3) మీది ఏదైనా బిందువు $(r + x_1, r + y_1, r + z_1)$

ఈ బిందువు స్థూపకము మీద ఉంది $\Leftrightarrow$ (3), (1) కు స్పర్శరేఖ

$\Leftrightarrow (r + x_1)^2 + (r + y_1)^2 + (r + z_1)^2 - 2(r + x_1) + 4(r + y_1) - 1 = 0$ కు ఒకే r ఉండును.

$\Leftrightarrow 3r^2 + 2r(x_1 + y_1 + z_1 + 1) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2x_1 + 4y_1 - 1 = 0$ కు ఒకే మూలముండును.

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \quad \text{i.e.,} \quad (x_1 + y_1 + z_1 + 1)^2 = 3(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2x_1 + 4y_1 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \; x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1z_1 + 2z_1x_1 + 2x_1 + 2y_1 + 2z_1$$

$$= \quad 3x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2 - 6x_1 + 12y_1 - 3$$

$$\Leftrightarrow \; 2\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_1y_1 - y_1z_1 - z_1x_1 + 4x_1 + 5y_1 - z_1 - 2\right) = 0$$

కావలసిన స్పర్శ స్థూపకము $P(x_1, y_1, z_1)$ యొక్క బిందు పథము

$\therefore$ స్థూపక సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 4x + 5y - z - 2 = 0$$

9.6 లంబ వర్తుల స్థూపకము:

9.6.1 నిర్వచనము: ఒక స్థూపకము యొక్క జనక రేఖలు, ఒక వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు అయిన దానిని లంబ వర్తుల స్థూపకము అందురు. వృత్తమునకు కేంద్రము ద్వారా పోవు అభిలంబ రేఖ ఆ స్థూపకమునకు ఒక జనక రేఖ అవుతుంది.

9.6.2 సిద్ధాంతము: (x_1, y_1, z_1) కేంద్రముగాను, r వ్యాసార్ధముగా వృత్తమును స్పృశిస్తూ $\dfrac{x-x_1}{\ell} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$ అక్షముగా కల లంబ వర్తుల స్థూపకము

$$\left(\ell^2 + m^2 + n^2\right)\left((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r^2\right) = \left[\ell(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1)\right]^2$$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి: స్థూపకమునకు అక్షము

$$\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad \cdot \;\cdot \;\cdot \quad (1)$$

(x_1, y_1, z_1) కేంద్రముగాను, r వ్యాసార్ధముగా కలిగి **(1)**కు లంబముగా కల వృత్త సమీకరణము

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = r^2 \quad \cdot \;\cdot \;\cdot \quad (2)$$

మరియు $\ell(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1) = 0 \quad \cdot \;\cdot \;\cdot \quad (3)$

కావలసిన స్థూపకము అక్షము **(1)**కు సమాంతరముగా, గోళము **(2)** యొక్క స్పర్శ స్థూపకము. దాని సమీకరణము **9.5.1**లో వలే

$$\left(\ell^2 + m^2 + n^2\right)\left((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 - r^2\right) = \left[\ell(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1)\right]^2$$

9.6.3 **ఉదాహరణ:** అక్షము $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$ అక్షముగా కలిగి, వ్యాసార్థము 2గా కల లంబ వర్తుల స్థూపకమును కనుగొనుము.

సాధన: అక్షము యొక్క సమీకరణము

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

స్థూపకము యొక్క వ్యాసార్థము $= 2$

r వ్యాసార్థము కల్గి $\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ అక్షముగా కల లంబ వర్తుల స్థూపకము సమీకరణము

$$\left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left[\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2+\left(z-z_1\right)^2-r^2\right]=\left[\ell\left(x-x_1\right)+m\left(y-y_1\right)+n\left(z-z_1\right)\right]^2$$

ఇక్కడ $(\ell, m, n)=(2,1,2),\ \left(x_1, y_1, z_1\right)=(1,2,3)$

$\therefore$ స్థూపక సమీకరణము

$$(4+1+4)\left((x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-4\right)=\left[2(x-1)+1(y-2)+2(z-3)\right]^2$$

$$\Rightarrow 9\left(x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+10\right)=(2x+y+2z-10)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2+9y^2+9z^2-18x-36y-54z+90$$

$$=4x^2+y^2+4z^2+100+4xy+4yz+8xz-40x-20y-40z$$

$$\Rightarrow 5x^2+8y^2+5z^2-4yz-8zx-4xy+22x-16y-14z-10=0$$

9.6.4 **ఉదాహరణ:** $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{1}$ అక్షముగా కలిగి, 2 యూనిట్ల వ్యాసార్థముగా కల లంబ వర్తుల స్థూపకము సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: స్థూపకము యొక్క అక్షము $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{1} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

వ్యాసార్థము $r = 2$

$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ అక్షముగాను, r వ్యాసార్థముగా కల లంబ వర్తుల స్థూపక సమీకరణము

$$\left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left[\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2+\left(z-z_1\right)^2-r^2\right]=\left[\ell\left(x-x_1\right)+m\left(y-y_1\right)+n\left(z-z_1\right)\right]^2$$

ఇక్కడ $(\ell, m, n)=(2,3,1),\ (x_1, y_1, z_1)=(1,0,3)$

$\therefore$ స్థూపక సమీకరణము

$$(4+9+1)\ \left((x-1)^2+y^2+(z-3)^2-4\right)=\left[2(x-1)+3y+(z-3)\right]^2$$

$$\Rightarrow 14\left(x^2+y^2+z^2-2x-6z+6\right)=\left(\overline{2x+3y+z}-5\right)^2$$

$$\Rightarrow 14x^2+14y^2+14z^2-28x-84z+84=4x^2+9y^2+z^2+12xy+6yz+4zx+25-20x-30y-10z$$

$$\Rightarrow 10x^2+5y^2+13z^2-12xy-6yz-4zx-8x+30y-74z+59=0$$

ఇది కావలసిన స్థూపక సమీకరణము.

9.6.5 **ఉదాహరణ:** $x^2+y^2+z^2=9,\quad x-y+z=3$ అను వక్రము ఆధారిత వక్రముగా కల స్థూప సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త వక్రము ఒక వృత్తము కనుక మనము ఆ వృత్తమునకు వ్యాసార్థము, కేంద్రము, స్థూప అక్షము కనుగొని సూత్రమునుపయోగిస్తాము.

దత్త వృత్తము $\quad x^2+y^2+z^2=9\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (1)$ గోళము

$x-y+z=3\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (2)$ తలము

(1)కు కేంద్రము $(0,0,0)$, వ్యాసార్థము $=3\quad (\cdot R)$

0 నుండి **(2)**కు కల దూరము $d=\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$

$\therefore$ వృత్త వ్యాసార్థము $=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$

అక్షము కేంద్రము 0 ద్వారా పోతూ **(2)**కు లంబ రేఖ కావున

అక్ష సమీకరణము $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (3)$

$\therefore$ వర్తుల స్థూపకము సమీకరణము

$$\left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-r^2\right)=\left[\ell(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)\right]^2$$

ఇక్కడ $(\ell, m, n) = (1,-1,1),\ (x_1, y_1, z_1)=(0,0,0),\ r=\sqrt{6}$

స్థూపక సమీకరణము

$$(1+1+1)\left(x^2+y^2+z^2-6\right)=(x-y+z)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-18=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx-9\right)=0$$

$\therefore$ లంబ వర్తుల స్థూపక సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx-9=0$$

9.6.6 **ఉదాహరణ:** $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,1,0)$ ద్వారా పోవు లంబ వర్తుల స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: మనము (i) దత్త బిందువులు A, B, C ల ద్వారా పోవు వృత్తమును

(ii) దాని వ్యాసార్థము

(iii) స్థూప అక్ష సమీకరణమును కనుగొని, సూత్రమునుపయోగిద్దాము.

(i) A, B, C ల ద్వారా పోవు తల సమీకరణము

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=1\Rightarrow x+y+z=1 \quad \cdots \quad (1)$$

O, A, B, C ల ద్వారా పోవు గోళ సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0 \quad \cdots \quad (2)$$

(2) యొక్క కేంద్రము $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

అక్షము $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ద్వారా పోతూ (1)కు లంబ రేఖ

$\therefore$ అక్ష సమీకరణము

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1} \quad . \; . \; . \; (3)$$

(ii) వ్యాసార్థము: ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజము

$\therefore$ దాని కేంద్రము $= G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

వ్యాసార్థము $AG = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{3}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{4+1+1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(iii) కావలసిన స్థూపక సమీకరణము

$$(1+1+1)\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\right)=\left(x-\frac{1}{2}+y-\frac{1}{2}+z-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(x^2+y^2+z^2-x-y-z+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)=\left(x+y+z-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-\cancel{3x-3y-3z}+\cancel{\frac{9}{4}}-2$$

$$= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+2xy+\cancel{\frac{9}{4}}$$

$$\cancel{-3x-3y-3z}$$

లంబ వర్తుల స్థూపక సమీకరణము

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1$$

9.7 సారాంశము:

ఈ పాఠంలో మనము స్థూపక నిర్వచనము మొదలుకొని, x, y, z లలో రెండవ తరగతి సమీకరణము స్థూపకమును సూచించుటకు నియమములు కనుగొని, తరువాత వివిధ స్థూపకముల సమీకరణములు కనుగొన్నాము. గోళము యొక్క స్పర్శ స్థూపకము, లంబ వర్తుల స్థూపకముల సమీకరణములు కనుగొన్నాము.

9.8 సాంకేతిక పదములు:

స్థూపకము

అక్షము

జనకరేఖ

ఆధారిత వక్రము లేదా సూచిత వక్రము

స్పర్శ స్థూపకము

లంబ వర్తుల స్థూపకము

9.9 అభ్యాసము:

1. జనక రేఖలు $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ కు సమాంతరముగా ఉంటూ $x^2+y^2=16,\ z=0$ వక్రము ద్వారా పోవు స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

2. అక్షము $3x=-6y=2z$ అను రేఖకు సమాంతరముగా ఉంటూ $z=0$ తలమును $x^2+\frac{y^2}{4}=4$లో ఖండిస్తూ పోయే స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

3. జనకరేఖలు z అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంటూ $ax^2+by^2=2z,\ \ell x+my+nz=P$ అను వక్రమును ఖండిస్తూ పోయే స్థూపకము సమీకరణమును కనుగొనుము.

4. జనక రేఖలు x అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంటూ, $x^2+y^2+2z^2=1,\ x-3y+z=4$ అను వక్రమును ఖండిస్తూ పోయే స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

5. అక్షము $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{2}$ గా ఉంటూ, వ్యాసార్థము 2గా కల లంబ వర్తుల స్థూపకమును కనుగొనుము.

6. ఆధారిత వక్రము $x^2+y^2+z^2=9,\ x-y+z=3$గా కల, లంబ వర్తుల స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

7. ఒక లంబ వర్తుల స్థూపకము యొక్క ఛేదనము $(1,2,3)$ కేంద్రముగా కల్గి వ్యాసార్థము 3 యూనిట్లుగా కల వృత్తము. దాని తల సమీకరణము $x+y-z=0$ అయిన, ఆ స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

8. జనక రేఖలు $x=\frac{-y}{2}=\frac{z}{3}$ కు సమాంతరముగా ఉంటూ, ఆధారిత వక్రము $x^2+2y^2=1,\ z=3$గా కల స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

9. అక్షము z అక్షముగాను, వ్యాసార్థము r గా కల లంబ వర్తుల స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

9.10 సమాధానములు:

1. $9x^2+9y^2+5z^2-6zx-12yz-144=0$

2. $36x^2+9y^2+17z^2+6yz-48zx=9$

3. $n\left(ax^2+by^2\right)+2\ell x+2my-2p=0$

4. $10y^2-6yz+3z^2+24y-8z+15=0$

5. $10x^2+5y^2+13z^2-6yz-4zx-12xy-8x+30y-74z+59=0$

6. $x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx-9=0$

7. $2\left(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx\right)-6x-12y-18z+15=0$

8. $3x^2+6y^2+3z^2+8yz-2zx+6x-24y-18z+24=0$

9. $x^2+y^2=a^2,\ z=0$

9.11 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. (a) స్థూపకము, అక్షము, జనకరేఖలను నిర్వచింపుము.

   (b) అక్షము X అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంటూ $ax^2+by^2+cz^2=1,\quad \ell x+my+nz=p$ సూచించెడి వక్రమును ఖండించు స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

   (c) జనక రేఖలు $(1,1,1)$ దిక్ సంఖ్యలుగా కల రేఖకు సమాంతరముగా ఉంటూ $xy=1,\ z=1$ సూచించెడి వక్రమును స్పర్శించు స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

2. (a) గోళమునకు స్పర్శ స్థూపకమును నిర్వచింపుము.

   (b) $\frac{x}{\ell}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ కు సమాంతరముగా ఉంటూ, $x^2+y^2+z^2=a^2$ అను గోళము స్పృశించే స్థూపక సమీకరణము

$$\left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right)=\left(\ell x+my+nz\right)^2$$ అని చూపుము.

(c) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$ అక్షముగా కల్గి యుండి, 2 యూనిట్ల వ్యాసార్థము గల లంబ వర్తుల స్థూపక సమీకరణమును కనుగొనుము.

9.12 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{1}$ అక్షముగా కలిగి, 2 యూనిట్లు వ్యాసార్థముగా గల లంబ వర్తుల స్థూపకము సమీకరణమును కనుగొనుము.

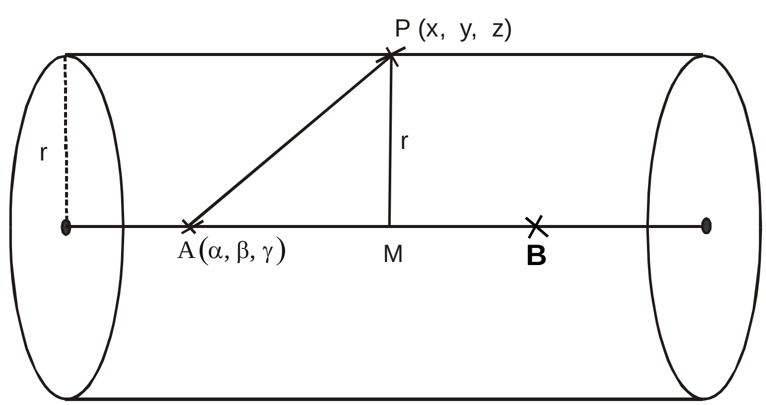
నిర్వచనము:

భూ వక్రం ఒక వృత్తం గాను, ఆ వృత్త తలానికి లంబంగా ఉండే దిశ స్థిర దిశగాను గల స్థూపాన్ని లంబ వర్తుల స్థూపకము అని అంటాము. భూ వక్రం వ్యాసార్థాన్ని స్థూపం వ్యాసార్థమనీ భూవక్రం కేంద్రం నుంచి స్థిర దిశకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖను స్థూపం అక్షమని అంటాం.

Result**:**

r వ్యాసార్థం, $\frac{x-\alpha}{\ell}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ అక్షంగా గల లంబ వర్తుల స్థూపకం సమీకరణం

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\frac{\{\ell\,(x-\alpha)+m\,(y-\beta)+n\,(z-\gamma)\}^2}{\ell^2+m^2+n^2}+r^2.$$



$$AP^2=AM^2+MP^2=AM^2+r^2$$

సాధన:

స్థూపము అక్షము AB అనుకొనుము.

$A = (1, 2, 3)$, AB సమీకరణం

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$$

AB దిక్ సంఖ్యలు **2, 3, 1.**

$\therefore$ AB దిక్ కొసైన్‌లు $= \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}$ ($\sqrt{2^2+3^2+1} = \sqrt{14}$ చే భాగించగా)

స్థూపకము పై $P(x, y, z)$ ఒక బిందువనుకుందాం.

అక్షము పైకి P నుంచి PM లంబాన్ని గీసి PA ని కలుపుదాం.

అప్పుడు PM = స్థూపకం వ్యాసార్థం $= r = 2$ (యివ్వబడినది)

PAM లంబ కోణ త్రిభుజం నుంచి

$$AP^2 = AM^2 + MP^2 = AM^2 + r^2$$

$$AP^2 = AM^2 + 4 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1) \qquad (\because \quad r = 2)$$

$$AP^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2$$

$AM = AB$ పై AP విక్షేపం

$$= \frac{2}{\sqrt{14}}(x-1) + \frac{3}{\sqrt{14}}(y-0) + \frac{1}{\sqrt{14}}(z-3)$$

$$= \frac{2x+3y+z-5}{\sqrt{14}}$$

(1) నుంచి

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{(2x+3y-z-5)^2}{14} + 4$$

$$\Rightarrow 14\left[(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2\right] = (2x+3y-z-5)^2 + 56$$

$$= (2x+3y+z)^2 + 25 - 10(2x+3y+z) + 56$$

$$\Rightarrow 14x^2 + 14y^2 + 14z^2 - 28x - 84z + 140 = 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 6yz + 4xz - 20x - 30y - 10z + 81$$

$$\Rightarrow \quad 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 - 6yz - 4zx - 12xy - 8x + 30y - 74z + 59 = 0$$

పాఠ్యభాగ రచయిత

G. నారాయణ

పాఠము - 10

కేంద్రీయ శాంఖవజములు

10.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠంలో విద్యార్థికి "కేంద్రీయ శాంఖవజము" యొక్క అవగాహన వివిధ రకాలైన కేంద్రీయ శాంఖవజాలు గూర్చి వాని విశిష్ట లక్షణముల గూర్చి తెలియజేయడమైనది. కేంద్రీయ శాంఖవజరాల స్పర్శ స్థూపము, స్పర్శ శంఖువులు వాని సమీకరణములను కనుగొంటాము.

10.2 పాఠ్యాంశక్రమము:

10.3 నిర్వచనము:

$f : R^3 \to R$ అను ప్రమేయము x, y, z లలో n వ తరగతి బహుపది అయిన $S = \{(x, y, z)/f(x, y, z) = 0\}$ సూచించెడి ఉపరితలము n వ తరగతి ఉపరితలము అని మనకు తెలియును.

మొదటి తరగతి ఉపరి తలములు - సమ తలములు

రెండవ తరగతి ఉపరితలములలో కొన్ని సరళరేఖా యుగ్మములు, తల యుగ్మము, గోళము, శంఖువు, స్థూపకము మొదలగునవి. వానిని "వార్గికములు" అని కూడా అందురు.

విశీర్ణ శంఖువు: ఒక వార్గికము (1) శూన్య సమితి, (2) ఏక మూలక సమితి, (3) సరళ రేఖ, (4) తలములో రేఖా యుగ్మము, (5) తలం అయితే దానిని విశీర్ణ శంఖువు అందురు.

10.3.1 నిర్వచనము: ఒక అవిశీర్ణ వార్గికమును శాంఖవజము అందురు.

10.3.2 కేంద్రీయ శాంఖవజము: ఒక అవిశీర్ణ వార్గిక సమీకరణము $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ అను రూపములో ఉంటే దానిని కేంద్రీయ శాంఖవజము అందురు.

10.3.3 నిర్వచనము - కేంద్రం: ఒక శాంఖవజము S మరియు $C(\alpha, \beta, \gamma)$ ఒక బిందువు.

$(x, y, z) \in S \Rightarrow (2\alpha - x,\ 2\beta - y,\ 2\gamma - z) \in S$ అయితే C ను S కు కేంద్రము అంటాము.

C ద్వారా పోయే అన్ని జ్యాలకు, అది మధ్య బిందువు అవుతుంది.

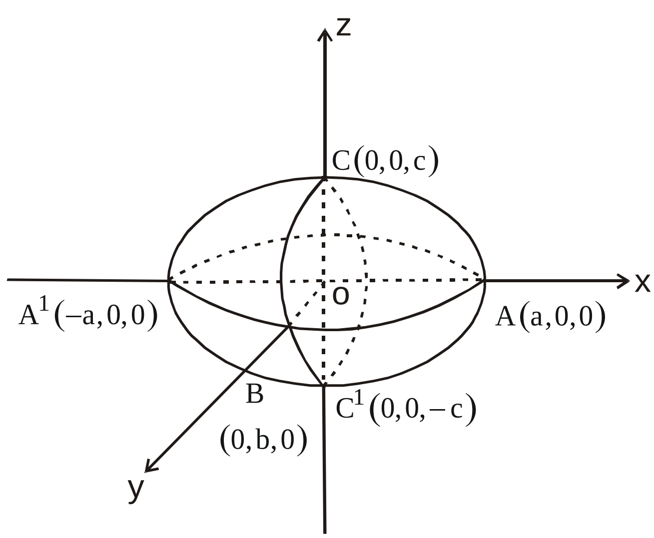
10.3.4 ప్రధాన తలము: కేంద్రము ద్వారా పోతూ దానికి లంబముగానున్న ప్రతి జ్యాను అది ద్విధాకరించే తలమును ప్రధాన తలము అందురు.

10.3.5 ప్రధాన అక్షములు: ప్రతి రెండు ప్రధాన తలముల ఖండన రేఖలను ప్రధాన అక్షములు అందురు.

10.4 దీర్ఘ వృత్తజము:

10.4.1 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ a, b, c \in R$ అను సమీకరణముతో సూచించెడి శాంఖవజమును దీర్ఘ వృత్తజము అందురు.

10.4.2 దీర్ఘ వృత్తజము యొక్క లక్షణములు



దీర్ఘ వృత్తజ సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \cdot \cdot \cdot (1)$

(a) $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0), (0, 0, \pm c)$ బిందువులు (1) మీద ఉండును. వానిని శీర్షములు అందురు.

(b) కేంద్రము $O(0, 0, 0)$, (1)కు కేంద్రము అవుతుంది. ఎందుకనగా

$(x, y, z) \in S \Rightarrow O(2 \cdot 0 - x,\ 2 \cdot 0 - y,\ 2 \cdot 0 - z) \in S$ కనుక.

(c) (1), నిరూపన తలములకు సౌష్ఠవముగా నుండును. $(\because (x, y, z) \in S \Rightarrow (\pm x, \pm y, \pm z) \in S)$

(d) xy తలం (1)కి ఒక ప్రధాన తలము ఎందుకనగా దానికి లంబముగా (1)కి గల ప్రతి జ్యాను అది ద్విధాకరించును. ఇదే విధముగా yz తలము, zx తలములు కూడా ప్రధాన తలములు. ప్రధాన తలముల ఖండన రేఖలు, నిరూపక అక్షములు కనుక నిరూపాకాక్షాలు ప్రధానాక్షాలు అవుతాయి.

(e) నిరూపక తలములతో (1) యొక్క ఛేదనము ఒక దీర్ఘ వృత్తము అవుతుంది.

(1) xy తలముతో ఛేదనము, $z=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(2) yz తలముతో ఛేదనము $x=0,\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

(3) zx తలముతో ఛేదనము $y=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

(f) xy తలమును సమాంతర తలముతో ఛేదనము $z=k,\ |k| \le |c|$ అను తలము (1)ను

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$ అను దీర్ఘ వృత్తముతో ఖండించును.

$S_k : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$ తో సూచించిన

$S = \underset{|k|<C}{U} S_k,\quad z=0$ అవుతుంది.

ఇదే విధముగా మిగిలిన ప్రధాన తలముల సమాంతర తలములను అనువర్తించును.

(g) ప్రధాన అక్షముల పొడవులు: శీర్షములను $A(a, 0, 0), A'(-a, 0, 0)$ $B(0, b, 0), B'(0, -b, 0)$ $C(0, 0, c), C'(0, 0, -c)$లు.

AA', BB', CC' లను ప్రధానాక్షముల పొడవులుగా నిర్వచిస్తాము.

అవి $AA' = 2a,\ BB' = 2b, CC' = 2c$.

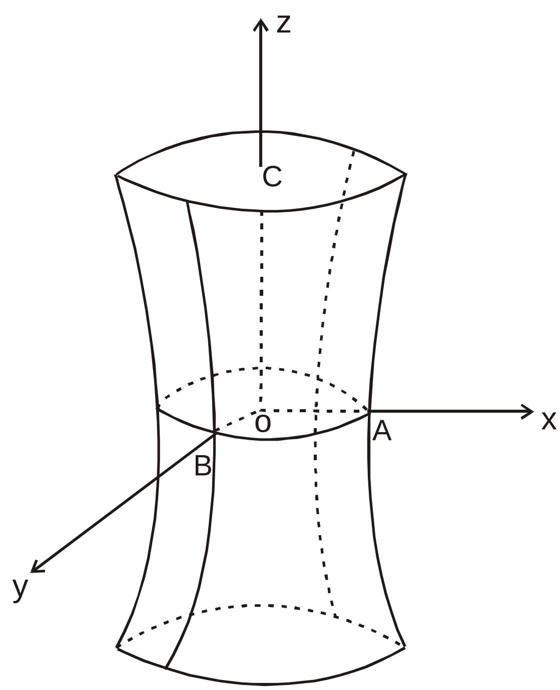
10.4.3 గమనిక (1): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ అను ఉపరితలమును మిధ్యా దీర్ఘ వృత్తజము అందురు. ఈ సందర్భములో $S=\phi$ విశీర్ణ శాంఖవజము.

గమనిక (2): $a^2=b^2$ లేదా $b^2=c^2$ లేదా $c^2=a^2$ అయిన ఆ దీర్ఘ వృత్తజమును పరిభ్రమణ దీర్ఘ వృత్తజము (Ellipsoid of revolution) అందురు.

10.5 ఏక ఖండ అతి పరావలయజము :

10.5.1 నిర్వచనము: $S \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $a, b, c \in R$ తో సూచించబడే ఉపరి తలమును ఏక ఖండ అతి పరావలయజము అందురు.

10.5.2 లక్షణములు:



(a) O ద్వారా పోయే అన్ని జ్యాలకు మధ్య బిందువు 'O' కనుక O కేంద్రము.

(b) సౌష్ఠవత: $(x, y, z) \in S \Rightarrow (\pm x, \pm y, \pm z) \in S$ కనుక S మూడు నిరూపక తలములకు సౌష్ఠవము. మూడు తలములు వానికి లంబముగా గల జ్యాలను సమద్వి ఖండన చేయును. కనుక అవి ప్రధాన తలములు.

(c) ప్రధాన తలముల ఖండన రేఖలు అక్షములు కనుక నిరూపాకాక్షాలు ప్రధాన అక్షములవుతాయి.

(d) అక్షముల మీద అంతర ఖండాలు: S, X అక్షమును $Y = 0,\ Z = 0$ వద్ద ఖండించును. అపుడు

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$$

$\therefore\ A(a,\ 0, 0),\ A'(-a, 0,\ 0)$ S మీది బిందువులు

అదే విధముగా Y అక్షము. S మీది బిందువులు $B(0, b, 0),\ B'(0, -b, 0)$ Z అక్షమును S ఖండించదు. ($Z^2 = -c^2$ కనుక)

(e) నిరూపక తలముతో ఛేదనము:

S, xy తలముల ఛేదనము $z = 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – ఒక దీర్ఘ వృత్తము

S, yz తలముల ఛేదనము $x = 0,\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – అతి పరావలయము

S, zx తలముల ఛేదనము $y = 0,\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – అతి పరావలయము

S, $z = k$ తలముల ఛేదనము $S_k = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2}$ $\quad |k| \le |c|$

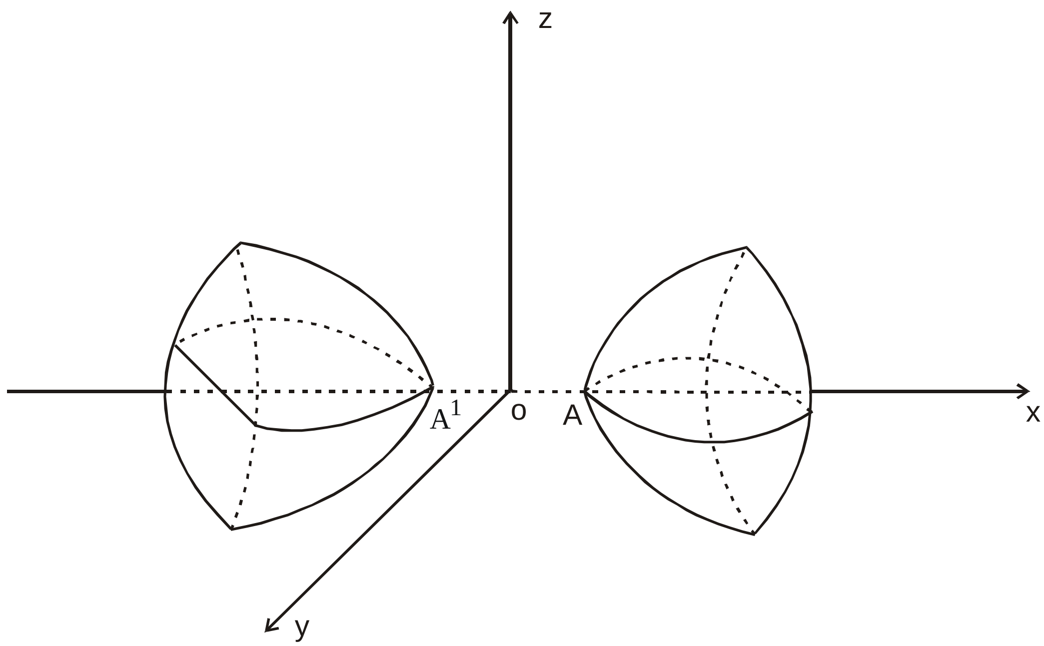
S, $x = k$ తలముల ఛేదనము $S_k = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2}$ $\quad |k| \le |a|$

S, $y = k$ తలముల ఛేదనము $S_k = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2}$ $\quad |k| \le |b|$

$$S = U\, S_k$$

10.6 ద్వి ఖండ అతి పరావలయజము:

10.6.1: $a, b, c \in R^+$ అయిన $S = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$తో సూచించబడే ఉపరితలమును ద్వి ఖండ అతి పరావలయజము అంటారు.



10.6.2 లక్షణములు:

(1) సౌష్ఠవత $(x, y, z) \in S \Rightarrow (\pm x, \pm y, \pm z) \in S$ కనుక S మూడు నిరూపక తలములు, నిరూపక అక్షములకు సౌష్ఠవము.

(2) $b \neq c$ అయిన వేరే సౌష్ఠవ తలములు లేవు.

$b = c$ అయిన x అక్షమును కల్గియున్న తలములు కూడ సౌష్ఠవ తలములు.

(3) $x = k$, $|k| \geq a$ అయిన S తో ఉమ్మడి తలము

$$S_k = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 \text{ ఒక దీర్ఘ వృత్తము.}$$

$$S = US_k$$

(4) $y = k$, Sల ఉమ్మడి తలము $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$

$z = k$, Sల ఉమ్మడి తలము $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$

అతి పరావలయములు అవుతాయి.

10.7 కేంద్రీయ శాంఖవజములు:

మనము కేంద్రీయ శాంఖవజాల గురించి చర్చిద్దాము. కేంద్రీయ శాంఖవజాన్ని Sతో సూచిస్తే, Sను ఈ విధముగా నిర్వచింపవచ్చు $S(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$, $a, \in, c \in R \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$

a, b, cలు మూడూ ధనాత్మకాలు అయిన Sఒక దీర్ఘ వృత్తజమును సూచించును.

రెండు ధనాత్మకము, ఒకటి ఋణాత్మకం అయిన S ఏక ఖండ అతి పరావలయజమును సూచించును.

ఒకటి ధనాత్మకం, రెండు ఋణాత్మకం అయితే, S ద్వి ఖండ అతి పరావలయమును సూచించును.

పైన అన్ని సందర్భములలోను

(1) O కేంద్రము

(2) నిరూపక తలములు సౌష్ఠవ తలములు (ప్రధాన తలములు)

(3) నిరూపకాక్షములు ప్రధాన అక్షములు అందువలన వానిని కేంద్రీయ శాంఖవజాలు అందురు.

సంకేతములు: ఈ పాఠములో క్రింది సంకేతాలు వాడుతాము.

$S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 - 1$

$S_1 \equiv axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1$

$S_{11} \equiv ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1$

$S_{12} \equiv ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 - 1$

$S_{ij} \equiv ax_ix_j + by_iy_j + cz_iz_j - 1$

నిర్వచనములు: 'గోళం' పాఠములో చదివినట్లుగానే మనము ఈ క్రింది వాని నిర్వచనములను కేంద్రీయ శాంఖవజము Sకు కూడా ఉపయోగిస్తాము.

(1) స్పర్శ రేఖలు - స్పర్శ తలములు

(2) S దృష్ట్యా ఒక బిందువు యొక్క ధృవ తలము

(3) S దృష్ట్యా ఒక తలము యొక్క ధృవము

(4) సంయుగ్మ బిందువులు

(5) సంయుగ్మ తలములు

(6) సంయుగ్మ రేఖలు మొదలగునవి.

ఉపపత్తులు గోళం పాఠంను అనుసరిస్తాయి. కనుక మనము వాని ఫలితములను ఈ క్రింద క్రోడీకరిద్దాం.

(1) S మీద (x_1, y_1, z_1) బిందువు వద్ద స్పర్శ తల సమీకరణము $S_1 \equiv 0$

(2) $\ell x + my + nz = p$ అను తలము S కు స్పర్శ తలము అగుటకు ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము

$$\frac{\ell^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} = p^2$$

స్పర్శ బిందువు $\left(\frac{\ell}{ap}, \frac{m}{bp}, \frac{n}{cp}\right)$

(3) S దృష్ట్యా (x_1, y_1, z_1) బిందువు యొక్క ధృవ తల సమీకరణము $S_1 \equiv 0$

(4) S దృష్ట్యా $\ell x + my + nz = p$ తలము యొక్క ధృవము $\left(\frac{\ell}{ap}, \frac{m}{bp}, \frac{n}{cp}\right)$.

(5) S దృష్ట్యా (x_1, y_1, z_1) బిందువు యొక్క స్పర్శ బిందు తలము (plane of contact) $S_1 \equiv 0$.

(6) S దృష్ట్యా $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ బిందువులు సంయుగ్మ బిందువులగుటకు నియమము $S_{12} = 0$

10.8 స్పర్శ శంఖువు:

10.8.1 సిద్ధాంతము: ఏదైనా బిందువు $P(x_1, y_1, z_1)$ నుండి $P \notin S$. S అను కేంద్రీయ శాంఖవజమునకు గీచిన స్పర్శ రేఖల బిందు పథము ఒక శంఖువు అవుతుంది.

ఉపపత్తి: దత్త కేంద్రీయ శాంఖవజము

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

దత్త బిందువు $P(x_1, y_1, z_1)$ ద్వారా ఏదైనా రేఖా సమీకరణములు

$$\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = r, \quad r \in R \quad \cdots \quad (2)$$

(2) మీది ఏదైనా బిందువు రూపము $(\ell r + x_1, mr + y_1, nr + z_1) \cdots (3)$ రేఖ (2), శాంకవజము (1)కు స్పర్శ రేఖ

$\Leftrightarrow a(\ell r + x_1)^2 + b(mr + y_1)^2 + c(nr + z_1)^2 = 1$కు ఏకైక r విలువ ఉండును.

$\Leftrightarrow \left(a\ell^2 + bm^2 + cn^2\right)r^2 + 2\left(a\ell x_1 + bmy_1 + cnz_1\right)r + \left(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1\right) = 0$ కు ఒకే ఒక మూలము ఉండును, $a\ell^2 + bm^2 + cn^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 0$, i.e. $\left(a\ell x_1 + bmy_1 + cnz_1\right)^2 = \left(a\ell^2 + bm^2 + cn^2\right)\left(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1\right) \cdots (4)$

ℓ, m, n విలువలను (2) నుండి తీసికొని (4)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\left[ax_1(x-x_1) + by_1(y-y_1) + cz_1(z-z_1)\right]^2 = \left[a(x-x_1)^2 + b(y-y_1)^2 + c(z-z_1)^2\right]$$

$$\left[ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1\right] \cdots (5)$$

ఇది $x - x_1, \; y - y_1, \; z - z_1$లలో ఒక రెండవ తరగతి సమఘాత సమీకరణము

$\therefore (x_1, y_1, z_1)$ శీర్షముగా కల ఒక శంఖువును సూచించును.

$\therefore P$ నుండి గీచిన స్పర్శ రేఖల బిందు పథము ఒక శంఖువు అవుతుంది.

10.8.2 నిర్వచనము: స్పర్శ శంఖువు: ఏదైనా దత్త బిందువు ద్వారా దత్త శాంఖవజమునకు గీచిన స్పర్శ రేఖల బిందు పథము ఒక శంఖువు అవుతుంది. ఆ శంఖువును శాంఖవజమునకు స్పర్శ శంఖువు అంటారు. దత్త బిందువు దాని శీర్షము.

10.8.3 గమనిక: స్పర్శ శంఖువు సాంకేతిక రూపములో:

10.8.2లో (5) సూచించెడి స్పర్శ శంఖువు.

$$\left[S_1 - S_{11}\right]^2 = \left[S - 2S_1 + S_{11}\right] \cdot S_{11}$$

$$\Rightarrow S_1^2 - 2S_1 \cdot S_{11} + S_{11}^2 = S \cdot S_{11} - 2S_1 \cdot S_{11} + S_{11}^2$$

$$\Rightarrow S_1^2 = S \cdot S_{11}$$

10.8.4 ఉదాహరణ: ఒక చర బిందువు P నుండి, శాంఖవజము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$కు స్పర్శ శంఖువు గీయబడినది. ఆ శంఖువు $z=0$ తలముల ఖండన తలము వృత్తము అయిన P యొక్క బిందు పథమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త శాంఖవజము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \quad \cdots \quad (1)$

బిందు పథము మీది ఏదైనా బిందువు $P(x_1, y_1, z_1)$ అనుకొనుము.

P ద్వారా (1)కు గీచిన స్పర్శ శంఖువు సమీకరణము $S\cdot S_{11}=S_1^2$.

అనగా
$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\cdot\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=\left[\frac{x\cdot x_1}{a^2}+\frac{y\cdot y_1}{b^2}+\frac{z\cdot z_1}{c^2}-1\right]^2 \quad \cdots \quad (2)$$

(2), $z=0$ తలముల ఖండన తలములు

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=\left[\frac{x\cdot x_1}{a^2}+\frac{y\cdot y_1}{b^2}-1\right]^2, \qquad z=0 \quad \cdots \quad (3)$$

(3) ఒక వృత్తము అని ఇచ్చినారు.

$f(x, y)=0$ ఒక వృత్తమైన (1) x^2 గుణకము $= y^2$ గుణకము

(2) xy గుణకము $=0$

$\therefore$ (3) ఒక వృత్తము $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right); \quad \frac{2x_1y_1}{a^2b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right) \quad \cdots \quad (4)$$

మరియు $x_1=0$ లేదా $y_1=0 \quad \cdots \quad (5)$

సందర్భము (1) $x_1=0$ మరియు $\frac{1}{a^2}\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{a^2b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2} \quad \Rightarrow \frac{y_1^2}{a^2-b^2}=\frac{z_1^2}{c^2}=-1$$

$\Rightarrow \dfrac{y_1^2}{b^2-a^2}+\dfrac{z_1^2}{c^2}=1$ $P(x_1, y_1, z_1)$ యొక్క బిందు పథము $\dfrac{y^2}{b^2-a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ అవుతుంది.

సందర్భము (2) $y_1=0$; $\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{y_1^2}{b^2}+\dfrac{z_1^2}{c^2}-1\right)=\dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{z_1^2}{c^2}-1\right)$

$$\Rightarrow \frac{z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{x_1^2}{a^2b^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2} \quad \Rightarrow \frac{z_1^2}{c^2}+\frac{x_1^2}{a^2-b^2}=1,$$

$P(x_1, y_1, z_1)$ యొక్క బిందు పథము $\dfrac{x^2}{a^2-b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ అవుతుంది.

10.8.5 ఉదాహరణ: P ఒక చర బిందువు. P నుండి శాంఖవజము $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ కు స్పర్శ శంఖువు గీయబడినది. ఆ సంఖువు $z=0$ తలముల ఛేదనము (1) ఒక పరావలయం (2) ఒక లంబ అతి పరావలయమైన P యొక్క బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త శాంఖవజము $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad \cdots \quad (1)$

కావలసిన బిందు పథము మీది ఏదైనా బిందువు $P(x_1, y_1, z_1)$ అనుకొనుము. P నుండి (1)కు గీచిన స్పర్శ శంఖువు సమీకరణము

$$S \cdot S_{11}=S_1^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=\left[\frac{x\cdot x_1}{a^2}+\frac{y\cdot y_1}{b^2}+\frac{z\cdot z_1}{c^2}-1\right]^2 \quad \cdots \quad (2)$$

ఇది, $z=0$ తలమును ఖండిస్తే

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=\left[\frac{x\cdot x_1}{a^2}+\frac{y\cdot y_1}{b^2}-1\right]^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)+\dots\dots\dots\dots = \frac{2x_1y_1\cdot xy}{a^2+b^2}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (3)$$

(మిగిలిన పదములు మన గణనలోనికి రావు. అందువలన వ్రాయలేదు.)

$f(x,y)=0$ అను రెండవ తరగతి సమీకరణముతోపోల్చిన

$$A=\frac{1}{a^2}\left(\frac{y_1}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right), \qquad B=\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right), \qquad H=\frac{x_1y_1}{a^2b^2}$$

సందర్భము (1), (3) సూచించెడి పరావలయమైన, $H^2 = AB$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2\cdot y_1^2}{\left(a^2\ b^2\right)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{\cancel{a^2b^2}}\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{x_1^2y_1^2}{a^2b^2}} = \cancel{\frac{x_1^2y_1^2}{a^2\ b^2}}+\frac{z_1^2}{c^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)-1\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=0$$

$\because \quad S_{11} \neq 0 \quad z_1^2 = c^2$

$\therefore$ P యొక్క బిందు పథము $z^2 = c^2$

ఒక సమాంతర రేఖా యుగ్మము.

సందర్భము (2) (3) సూచించెడి వక్రం లంబ అతి పరావలయమైన $A + B = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}\left(\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)+\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)=0 \ \Rightarrow \frac{x_1^2+y_1^2}{a^2b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

$$\Rightarrow x_1^2+y_1^2+\frac{z_1^2}{c^2}\left(a^2+b^2\right)=a^2+b^2 \quad \Rightarrow \frac{x_1^2+y_1^2}{a^2+b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1$$

$\therefore$ P యొక్క బిందుపథ సమీకరణము $\dfrac{x^2+y^2}{a^2+b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

10.8.6 **ఉదాహరణ:** $S \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ అను శాంఖవజమునకు P అను బిందువు నుండి మూడు పరస్పర లంబ స్పర్శ రేఖలు గీచిన యెడల P యొక్క బిందు పథము కనుగొనుము.

సాధన: దత్త శాంఖవజము $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

$P(x_1, y_1, z_1)$ బిందువు నుండి (1)కు మూడు పరస్పర లంబ స్పర్శ రేఖలు గీచినాము అనుకొనుము. అపుడు (1) యొక్క స్పర్శ శంఖువుకు మూడు పరస్పర లంబ జనక రేఖలుంటాయి.

స్పర్శ శంఖువు యొక్క సమీకరణము $S \cdot S_{11} = S_1^2$

i.e., $\left(ax^2 + by^2 + cz^2 - 1\right)\left(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1\right) = \left(axx_1 + byy_1 + czz_1 - 1\right)^2 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

(2) కు మూడు పరస్పర లంబ జనక రేఖలు ఉంటాయి.

$\Rightarrow$ x^2 గుణకము $+$ y^2 గుణకము $+$ z^2 గుణకము $= 0$

$$\Rightarrow (a + b + c)\left(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1\right) = a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2$$

$$\Rightarrow a\left(by_1^2 + cz_1^2 - 1\right) + b\left(ax_1^2 + cz_1^2 - 1\right) + c\left(ax_1^2 + by_1^2 - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow (ab + ac)x_1^2 + (bc + ba)y_1^2 + (ca + cb)z_1^2 = a + b + c$$

$P(x_1, y_1, z_1)$ యొక్క బిందుపథ సమీకరణము

$$a(b + c)x^2 + b(c + a)y^2 + c(a + b)z^2 = a + b + c$$

10.9 స్పర్శ స్థూపము:

10.9.1 **సిద్ధాంతము:** L ఒక సరళరేఖ. S ఒక కేంద్రీయ శాంఖవజమునకు, L కు సమాంతరముగా, Sకు గీచిన స్పర్శ రేఖల బిందు పథము ఒక స్థూపము అవుతుంది.

ఉపపత్తి: దత్త శాంఖవజము $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

దత్త రేఖ L యొక్క దిక్ సంఖ్యలు ℓ, m, n లు అనుకొనుము. $P(x_1, y_1, z_1) \in R^3$ ఏదైనా బిందువు ద్వారా L కు సమాంతర రేఖ సమీకరణము $\dfrac{x - x_1}{\ell} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} = r, \qquad r \in R \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

(2), (1)ను స్పృశిస్తూపోతే వానికి ఉమ్మడి బిందువు ఒకే ఒకటి ఉంటుంది. (2) మీది ఏదైనా బిందువు $(\ell r + x_1, mr + y_1, nr + z_1)$ అది (1) మీద ఉంటుంది.

$\Rightarrow a(\ell r + x_1)^2 + b(mr + y_1)^2 + c(nr + z_1)^2 = 1$కు ఒకే ఒక r ఉంటుంది.

$\Rightarrow r^2\left(a\ell^2 + bm^2 + cn^2\right) + 2(a\ell x_1 + bmy_1 + cnz_1)r + \left(ax^2 + by^2 + cz^2 - 1\right) = 0$కు ద్విరుక్త మూలము ఉంటుంది.

$\Rightarrow \Delta = 0$ i.e. $(a\ell x_1 + bmy_1 + cnz_1)^2 = \left(a\ell^2 + bm^2 + cn^2\right)\left(ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1\right)$

P యొక్క బిందుపథ సమీకరణము

$$(a\ell x + bmy + cnz)^2 = \left(a\ell^2 + bm^2 + cn^2\right)\left(ax^2 + by^2 + cz^2 - 1\right) \quad \cdots \quad (3)$$

(3) ఒక స్థూపమును సూచించును. దాని జనక రేఖల దిక్ సంఖ్యలు (ℓ, m, n), L కు సమాంతర రేఖలు.

10.9.2 నిర్వచనము: L ఒక సరళరేఖ, S ఒక కేంద్రీయ శాంఖవజము L కు సమాంతరముగా Sకు గీచిన సమాంతర రేఖల బిందుపథము ఒక స్థూపము. ఆ స్థూపమును Sకు స్పర్శ స్థూపకము అందురు.

10.9.3 ఉదాహరణ: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{\pm\sqrt{a^2 - b^2}} = \dfrac{z}{c}$ అను రేఖకు సమాంతరముగా $S \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ అను దీర్ఘ వృత్తజమునకు గీచిన స్పర్శ స్థూపకము, $z = 0$ తలమున వృత్తములో ఖండించును అని చూపుము.

సాధన: దత్త సరళరేఖ $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{\pm\sqrt{a^2 - b^2}} = \dfrac{z}{c} \quad \cdots \quad (1)$

దత్త దీర్ఘ వృత్తజము $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \quad \cdots \quad (2)$

మనకు $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ అను శాంఖవజమునకు, (ℓ, m, n) దిక్ సంఖ్యలుగా కల రేఖకు సమాంతరముగానున్న స్పర్శ స్థూపక సమీకరణము

$(a\ell x + bmy + cnz)^2 = \left(a\ell^2 + bm^2 + cn^2\right)\left(ax^2 + by^2 + cz^2 - 1\right)$ అని తెలుసు

(2)కు స్పర్శ స్థూపకము వ్రాసినపుడు

$$(\ell, m, n) = \left(0, \pm\sqrt{a^2 - b^2}, c\right), \quad (a, b, c) = \left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}\right)$$

$\therefore$ (2) యొక్క స్పర్శక స్థూపకము

$$\left[0 \pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}\,y}{b^2} + \frac{cz}{c^2}\right]^2 = \left(0 + \frac{a^2-b^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}\cdot c^2\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{z}{c} \pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}\,y}{b^2}\right]^2 = \left(\frac{a^2 \cancel{-b^2} \cancel{+b^2}}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\cdots\cdots(3)$$

ఇది $z=0$ ను ఖండించిన

$$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\,y\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2-b^2}{b^2\cdot \cancel{b^2}}\cdot y^2 = \frac{1}{\cancel{b^2}}\left(x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2-a^2\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{a^2}{b^2}y^2} - y^2 = x^2 + \cancel{\frac{a^2}{b^2}y^2} - a^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=a^2$$

$z=0,\ x^2+y^2=a^2$ ఇది ఒక వృత్తము

10.9.4 ఉదాహరణ: Z అక్షమునకు లంబముగా $ax^2+by^2+cz^2-1=0$ శాంఖవజము యొక్క స్పర్శ స్థూపకము, $z=0$ తలమును ఖండించే బిందు పథమును కనుగొనుము.

సాధన: దత్త శాంఖవజము $ax^2+by^2+cz^2-1=0 \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (2)$

Z అక్షమునకు లంబరేఖ దిక్ సంఖ్యలు $(1,1,0)$

(1) యొక్క స్పర్శ స్థూపకము $(1,1,0)$ దిశలో

$$(a\ell x+bmy+cnz)^2 = \left(a\ell^2+bm^2+cn^2\right)\left(ax^2+by^2+cz^2-1\right)$$

ఇక్కడ $(\ell,m,n)=(1,1,0)$

స్పర్శ స్థూపకము $z=0$ ను ఖండిస్తే

$$(ax+by)^2 = (a+b)\left(ax^2+by^2-1\right)$$

$$\Rightarrow a^2x^2+b^2y^2+2abxy = a^2x^2+b^2y^2+ab\left(x^2+y^2\right)-(a+b)$$

$$\Rightarrow 2abxy = ab\left(x^2+y^2\right)-(a+b)$$

$$\Rightarrow ab\left(x^2+y^2-2xy\right) = a+b$$

$\Rightarrow (x-y)^2 = \dfrac{(a+b)}{ab}$, ఇది కావలసిన బిందు పథము.

10.10 సారాంశము:

ఈ పాఠంలో మనము దీర్ఘ వృత్తజము, ఏక ఖండ అతి పరావలయజము, ద్వి ఖండ అతి పరావలయజములను గీయుట, జ్యామితీయ లక్షణములు గురించి నేర్చుకున్నాము. కేంద్రీయ శాంఖవజములు, వాని స్పర్శ శంఖువు, స్పర్శ స్థూపకముల గూర్చి నేర్చుకొన్నాము.

10.11 సాంకేతిక పదములు:

కేంద్రీయ శాంఖవజము

దీర్ఘ వృత్తజము

ఏక ఖండ అతి పరావలయజము

ద్వి ఖండ అతి పరావలయజము

10.12 అభ్యాసము:

1. $x+4y-2z=8$ అను తలమునకు సమాంతరముగా $3x^2-6y^2+9z^2=17$ అను శాంఖవజమునకు స్పర్శ తల సమీకరణములను కనుగొనుము.

2. $3x+12y-6z-17=0$ అను తలమును $3x^2-6y^2+9z^2+17=0$ అను శాంఖ వజమును స్పృశిస్తుందని చూపి స్పర్శ బిందువును కనుగొనుము.

3. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{1}$ అను రేఖ ద్వారా పోతూ $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}=1$ అను దీర్ఘ వృత్తజమును స్పృశించు తలముల సమీకరణములు కనుగొనుము.

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ అను దీర్ఘ వృత్తజమునకు గీచిన స్పర్శ తలము అక్షములతో సమాన కోణములు చేస్తే, ఆ తలములచే ఏర్పడు చతుర్ముఖి ఘన పరిమాణము $\frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)^{3/2}$ ఘ. యూనిట్లు అని చూపుము.

5. $\frac{x}{0}=\frac{y}{\pm\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z}{c}$ అను రేఖకు సమాంతరముగా $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ అను దీర్ఘ వృత్తజమునకు గీచిన స్పర్శ స్థూపకము $z=0$ అను తలమును ఒక వృత్తములో ఖండించును అని చూపుము.

6. $x=y=z$ కు సమాంతరముగా $x^2+y^2+z^2-2x+4y-1=0$ యొక్క స్పర్శ స్థూపకమును కనుగొనుము.

7. మూల బిందువు O నుండి $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ అను దీర్ఘ వృత్తజమునకు గీచిన స్పర్శ తలము మీదికి గీచిన లంబ పాదముల బిందు పథమును కనుగొనుము. ఆ స్పర్శ తలముల యొక్క అక్షఆల మీది అంతర ఖండాల వ్యుత్క్రమాల మొత్తము $\frac{1}{n}$ స్థిరము అని యిచ్చినారు.

8. $x+2y+3z=2$ సూచించెడి తలము $x^2-2y^2+3z^2=2$ అను శాంఖవజమును స్పృశిస్తుందని చూపి, స్పర్శ బిందువును కనుగొనుము.

10.13 సమాధానములు:

1. $3x+12y-6z=\pm 17$

2. $\left(-1, 2, \frac{2}{3}\right)$

3. $x+y=3,\quad x+2y+3z=6$

6. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-4x+5y-z-2=0$

8. $(1, -1, 1)$

10.14 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. (a) దీర్ఘ వృత్తజము, ద్వి ఖండ అతి పరావలయజములను నిర్వచింపుము.

   (b) P ఒక చర బిందువు. P నుండి దీర్ఘ వృత్తజము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ కు గీచిన స్పర్శ శంఖువు $z=0$ ను ఒక వృత్తములో ఖండిస్తే P యొక్క బిందు పథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

   (c) P అను చర బిందువు నుండి $ax^2+by^2+cz^2=1$ అను శాంఖవజమునకు మూడు పరస్పర లంబ స్పర్శ రేఖలు గీచిన, P యొక్క బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

2. (a) ఏక ఖండ అతి పరావలయమును నిర్వచింపుము.

   (b) P ఒక చర బిందువు. P నుండి దీర్ఘ వృత్తజము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ కు గీచిన స్పర్శ ఖంఖువు $z=0$ అను తలమును ఒక పరావలయములో ఖండించిన P యొక్క బిందు పథమును కనుగొనుము.

   (c) Z అక్షమున లంబముగా $ax^2+by^2+cz^2=1$ అను శాంఖవజమునకు స్పర్శ స్థాపకమును గీచిన అది $z=0$ ను ఖండించే బిందుపథ సమీకరణమును కనుగొనుము.

పాఠ్యభాగ రచయిత

G. నారాయణ

బోల్జానో (1781-1848)

అత్యల్పత భావన నుండి కలన గణితాన్ని బోల్జానో విజయవంతముగా వేరు చేశారు. ఆయన అనంత సమితిలోని మూలకాలకి, దాని శుద్ధ ఉపసమితిలోని మూలకాలకి, మధ్య అన్వేకానురూపతకు ఉదాహరణలు చూపించారు.

11. అనుక్రమాలు

11.1

లక్ష్యం విద్యార్ధికి అనుక్రమాలు అనుక్రమాల అవధులు, అవధుల ధర్మములను గురించి పరిచయం చేయడం ఈ పాఠం లక్ష్యం.

11.2 రూపము: ఈ పాఠాన్ని కింది విధంగా విభజించాము.

11.3 ఉపోద్ఘాతం

11.4 అనుక్రమాలు

11.5 అనుక్రమాల అవధులు

11.6 అవధుల సిద్ధాంతములు

11.7 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

11.8 సారాంశము

11.9 సాంకేతిక పదాలు

11.10 అభ్యాసములు

11.11 జవాబులు

11.12 మాదిరి పరీక్ష ప్రశ్నలు

11.13 జవాబుతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య

వాస్తవ మూల్య ప్రమేయము యొక్క విశ్లేషణ ముఖ్యంగా ప్రమేయ అవిచ్ఛిన్నత అవకలనీయత, సమాకలనీయత మొదలైన అంశాల మిద ఆధారపడి వుంది. వాస్తవ చలరాశుల అవిచ్ఛిన్నత ఈ ప్రక్రియలన్నిటిలో ఉన్నప్పటికీ, వీటిని సహజసంఖ్య చలరాశులలో బాగా వివరించగలము. తరచుగా మనకి తటస్థపడే కరణీయ సంఖ్యలను ఆ కరణీయ సంఖ్యలతో సవరించడం పరిపాటి. ఇలాంటి అనేకములైన ప్రక్రియలకు ఆధారమైన అనుక్రమాలతో పరిచయాన్ని ఇప్పుడు ఏర్పాటు చేసికొందాము. ముఖ్యంగా ఈ పాఠంలో అనుక్రమాలు పరిచయము చేసి, వాటి అవధులు, ధర్మాలు చర్చించడం జరిగింది.

11.4 అనుక్రమాలు: A, B సమితిలు, వీటి కార్టీషియన్ లబ్ధం A X B లో f ఒక వుప సమితి, A లోని ప్రతి a కి అనుగుణంగా (a,b) ∈ f అయ్యేటట్లుగా B లో వొకేవొక్క, b వుంటే f: A → B ప్రమేయమంటామని గతంలో చెప్పుకున్నాము. ఈ b ని a యొక్క f ప్రతి బింబం (లేదా విలువ) అని పి లుస్తాము. b ని f(a) తో సూచిస్తాము. సమితి f(A) ={f(a) / a ∈ A} ని f వ్యాప్తి అనీ, f ప్రదేశం A అనీ అంటాము.

సహజసంఖ్యల పమితి ∠ ప్రదేశంగా గల ప్రమేయాలకి విశిష్ఠ ప్రాధాన్యత వున్నది. సమితి A లో అనుక్రవ ంమంటే వొక ప్రమేయం f: ∠ → A. సహజసంఖ్య n విలువని f_n లేదా f(n) తో సూచిస్తూ f అనుక్రమంలో n - వ పదం అంటాము. f: ∠ → A ప్రమేయాన్ని f = (f_n) (f_n / n ∈ ∠) మరియు {f_1 …. f_n … } లతో సూచిస్తాము. ప్రమేయాలకి ఎక్కువగా A, B, C, …. X, Y, Z వంటి ప్రధానాక్షరాలు వాడి n వ పదం x_n గా గల అనుక్రమాన్ని X = (x_n) అని వ్రాస్తాము. మనం వాస్తవ సంఖ్యల ప్రమేయాల గురించి ముఖ్యంగా పరిగణంచనున్నాము. వాస్తవ స ంఖ్యల అనుక్రమం, అనగా 3 లో అనుక్రమం అంటే సహజసంఖ్యల నుండి 3 లోకి ప్రమేయము.

అనుక్రమం - వ్యాప్తి

ఒక అనుక్రమంలోని పదాలు నిర్దిష్ఠమైన క్రమంలో వ్రాయవలె. ఈ క్రమం సహజసంఖ్యల క్రమంలో వుం టుంది. ఈ క్రమం అనుక్రమంలోని ప్రతీ పదానికీ వొక స్థానం నిర్దేశిస్తుంది. ఐతే వ్యాప్తి అనుక్రమంలోని వి భిన్న పదాల సమితి మాత్రమే. అందుచేత అనుక్రమంలో విభిన్న స్థానాల్లో వున్న వొక పదం వ్యాప్తిలో వొక పర్యాయం మాత్రమే తటస్థపడుతుంది ఉదాహరణకి X : ∠ → 3, $X(n) = (-1)^{n-1}$ గా నిర్వచితమైన అనుక్రమం {1, -1, 1,-1 … } ఐతే ఈ అనుక్రమం వ్యాప్తి {1, -1}.

అనుక్రమాల అనుగమన (ఆవృతి) నిర్వచనం

పరిమిత సంఖ్యలో కొన్ని నిర్దుష్టమైన పరిమిత పదాలలో వొక సార్వత్రిక సూత్రం ద్వారా మిగిలిన పదాలను తెలిపే రీతిలో అనుక్రమాన్ని నిర్వచించడాన్ని అనుక్రమాలు అనుగమన (ఆవృతి) నిర్వచనం అంటాము.

11.4.1 ఉదాహరణ: ప్రఖ్యాతి వహించిన ఫిబునకి అనుక్రమాన్ని ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తారు. $f_1 = 1$; $f_2 = 2$ మరియు $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

దీనిలో nవ పదము, దాని ముందు రెండు పదాల మొత్తానికి సమానము. అందువలన $f_3 = 3$; $f_4 = 5$, $f_5 = 8$; $f_6 = 13$, మొదలైన పదాలతో అనుక్రమంలోని మిగిలిన అన్ని పదాలను గణించవచ్చు.

గమనిక: అనుక్రమానికి అర్థవంతంగా వ్రాయడానికి కొన్ని మొదటి పదాలు వ్రాసిన తర్వాత తప్పనిసరిగా n -

వ పదాన్ని వ్రాయాలి. అంతేకానీ మొదటి కొన్ని పదాలు రాసి చుక్కలతో తెలుపడమనేది చాలా తప్పు ఆల ోచన.

ఉదాహరణకు అనుక్రమం 1,2,3,5,8 .... లో $x_{n+1} = x_n + (n)$ మరియు $x_1 = 1$. ఈ పదాలన్నీ ఫిబునకి అనుక్రమంలోని మొదటి ఐదు పదాలు అయినప్పటికీ రెంటిలోనూ 6వ పదాలు $x_6=x_5+4=12$, $f_6 = 13$ విభిన్నం.

11.4.2 ఉదాహరణలు: (i) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{r_n}\right)$ అయినప్పుడు

(i) $X = (x_n)$ అనుక్రమంలో మొదటి నాలుగు పదాలను వ్రాయండి.

$$x_2 = \frac{1}{2}\ (x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{1}{2}\ (2 + \frac{2}{2}) = \frac{1}{2}\ (2 + 1) = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\ (\frac{3}{2} + 2.\ \frac{2}{3}) = \frac{1}{2}\left(\frac{9+8}{6}\right) = \frac{17}{2}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{2} + 2.\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{17^2 + 2.12^2}{12.17}\right) = \frac{577}{408}$$

(ii) ఇచ్చిన పదాల ఆధారంగా క్రింది అనుక్రమాల n-

వ పదాన్ని వ్రాయండి. లేదా సూత్రాన్ని వ్రాయండి.

a) 5,7,9,11 ....

మొదటి పదానికి, రెండవ పదానికి తేడా '2'.

$x_1 = 5, \; = 5 + 0 \times 2 \quad x_2 = 5+2, = 5+1.2 \quad x_3 = 5+2+2, = 5+2\times2$

$x_4 = 5+2+2+2 = 5+3.2$

$\Rightarrow x_{n+1} = 5 + 2n$

$\therefore$ అనుగమన సూత్రాన్ని అనుసరించి $x_1 = 5$ మరియు $x_{n+1} = 2 + x_n$

b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots\ldots..$

$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{8}, x_4 = -\frac{1}{16}, \ldots\ldots$

$x_2 = -\frac{1}{2}x_1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}x_2, \quad x_4 = -\frac{1}{2}x_3, \ldots..$

అయినందువలన సాధారణ పదాన్ని

$x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n$ అని వ్రాయవచ్చును.

లేదా ప్రతి $n \geq 1$ కు $x_{n+1} = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

11.4.3 నిర్వచనములు: $X = (x_n)$ అనేది వాస్తవ సంఖ్యాసమితి 3 లో అనుక్రమము.

i) $n \leq m$ అయినప్పుడు $x_n \leq x_m$ అనగా $x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots$ అయితే $X = (x_n)$ అనుక్రమాన్ని ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము లేదా ఆరోహణ అనుక్రమము అంటాము.

ii) $n \leq m$ అయినప్పుడు $x_n \geq x_m$ అనగా $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq$ ……………… అయితే X ని ఏకదిష్ట అవరోహణ అనుక్రమము లేదా అవరోహణ అనుక్రమవ ు అంటాము.

iii) $n \leq m$, అయినప్పుడు $x_n < x_m$ అయితే Xని శుద్ధమైన ఆరోహణ (ఏకదిష్ట) అనుక్రమము అని అంటాము.

iv) $n \leq m$, అయినప్పుడు $x_n < x_m$ అయితే Xని శుద్ధమైన అవరోహణ (ఏకదిష్ట) అనుక్రమము అని అంటాము.

v) X

ఏకదిష్ట ఆరోహణ లేదా ఏకదిష్ట అవరోహణ అనుక్రమము అయితే X ఏకదిష్ట అనుక్రమము అని అంటాము.

11.4.4 ఉదాహరణలు: (a) ఏ స్థిర అనుక్రమము అయినా ఏకదిష్ట అనుక్రమము. $k \in 3$, ప్రతి n కి $x_n = k$, $X = (x_n)$ అయితే ప్రతి $x_n = k$ కాబట్టి ప్రతి m,n లకి $m \leq n$ అయినా $n \leq m$ అయితే $x_n \leq x_{m-}$ (వాస్తవాన్కి (x$_m$ =

k) కాబట్టి X ఆరోహణ మరియు అవరోహణ అనుక్రమము, అందుచేత X ఏకదిష్ట అనుక్రమము.

(b) $x_n = n^2$ అయితే $x = (x_n)$ ఆరోహణ అనుక్రమం కాబట్టి ఏకదిష్టము.

(c) $x_n = (-1)^{n-1}$ అయినప్పుడు X =

(x_n) ఆరోహణ అనుక్రమము కానీ అవరోహణ కానీ కాదు కాబట్టి ఏకదిష్టం కాదు.

11.4.5 నిర్వచనము: $X = (x_n)$ మరియు $y = (y_n)$ రెండు వాస్తవానుక్రమాలు. $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots\dots\dots\dots < n_k < \dots\dots\dots\dots$ సహజ **సంఖ్యా. శుద్ధ ఆరో**హణ అనుక్రమం అవుతూ, ప్రతి k కు $y_k =$

x_{n_k} అయ్యేట్లు n_k ఉంటే Y ని X కు ఉపానుక్రమంగా నిర్వచిస్తాము. అనుక్రమము X: $x_1, x_2, \dots\dots x_n \dots\dots$ ఖచ్చితమైన ఆరోహణ $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots\dots\dots\dots < n_k < \dots\dots\dots\dots$ అనుక్రమము.

Y ఉపానుక్రమము $x_{n_1}, \dots\dots\dots \quad x_{n_2}, \dots\dots \quad x_{n_k}, \dots\dots\dots$

$$\begin{array}{ccc} x_{n_1} & x_{n_2} & x_{n_k} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y_1 & y_2 & y_k \end{array}$$

11.4.6 ఉదాహరణ: $X = (x_n)$ ఏదైనా వాస్తవానుక్రమము. ప్రతి n కి $y_n = x_{2n}$ మరియు $z_n = x_{2n-1}$ $Y=(y_n)$, $Z = (z_n)$ అయితే అవి X లో ఉపానుక్రమాలు. Y ఉపానుక్రమములో X అనుక్రమంలోని సరిపదాలు మాత్రం వుంటే Z ఉపానుక్రమములో X అనుక్రమం యొక్క బేసి పదాలు మాత్రము వుంటాయి.

X:	x_1	x_2	x_3	x_4 …………..			x_n, ……..	
Y:	-	x_2	-	x_4	-	x_6 ………… x_{2n} ………		
Z:	x_1	-	x_3	-	x_5	-	……..	x_{2n-1} ………..

11.4.7 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $n_1 < n_2 < \ldots\ldots\ldots n_k < \ldots\ldots\ldots.$ అనే ఖచ్చితమైన సహజ సంఖ్యల ఆరోహణ అనుక్రమము, $k \in \angle$ అయితే $n_k \geq k$ అని చూపండి.

నిర్వచనము: $X = (x_n)$ వాస్తవానుక్రమము m ఒక సహజ సంఖ్య అయితే $X_m = \{x_{m+n} / n \in \angle\}$ అనే అనుక్రమము X లోని m- వాలం అంటాము. $\therefore$ $X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\}$ అయితే $X_m = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\ldots..)$ అనుక్రమం X లోని m - వాలం

గమనిక: $X = (x_n)$ అనుక్రమానికి m- వాలం X లో ఉపానుక్రమం.

11.4.8 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: (x_n) ఏకదిష్ట ఆరోహణ**క్రమము** $\Leftrightarrow$ $(-x_n)$ **ఏకదిష్ట అవరో**హణ అనుక్రమము అని చూపండి.

11.4.9 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: (x_n) అనేది ధన పదాల అవరోహణ అనుక్రమము అనుకుందాము.

i) $S_n = x_1 - x_2 + x_3 \text{-----} + (-1)^{n-1}x_n$ అయితే ప్రతి n కి $S_{2n+1} > S_{2n} > 0$

ii) ప్రతి n కి $0 < S_{2n-2} < S_{2n} < S_{2n+1} < S_{2n-1} \leq x_1$ అని నిరూపించండి.

11.4.10 పరిబద్ధ అనుక్రమాలు:

నిర్వచనము: $X = (x_n)$ వాస్తవానుక్రమము. ప్రతి n కి $|x_n| \leq M$ అయ్యేటట్లు వాస్తవ సంఖ్య M వుంటే X పరిబద్ధ అనుక్రమము అని అంటాము.

గమనిక: $X = (x_n)$ పరిబద్ధ అనుక్రమము. $\Leftrightarrow$ ప్రతి n కి $|x_n| \leq M$ అయ్యేటట్లు $M \in 3$ వ్యవస్థితం

$\Leftrightarrow$ ప్రతి n కి $-M \leq x_n \leq M$ అయ్యేటట్లు 3 లో M వ్యవస్థితం. $\Leftrightarrow$ $\{x_n / n \in \angle\}$ సమితి పరిబద్ధము.

11.4.11 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:

a) $X = (x_n)$ పరిబద్ధం $\Leftrightarrow$ ప్రతి n కి $\alpha \leq x_n \leq \beta$ అయ్యేటట్లు 3లో α, β వ్యవస్థితమని నిరూపించండి.

b) X ఆరోహణ అనుక్రమము అయితే ప్రతి n కి $x_1 \leq x_n$ అని నిరూపించండి.

c) X అవరోహణ అనుక్రమము అయితే ప్రతి n కి $x_1 \geq x_n$ అని నిరూపించండి.

11.4.12 అనుక్రమాల బీజీయ ప్రక్రియలు:

$X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ అనేవి వాస్తవ అనుక్రమాలు అనుకుందాము.

i) ప్రతి n కి $z_n = x_n + y_n$ అని వ్రాసి $(z_n) = Z$ అనే అనుక్రమాన్ని $Z = X + Y$ గా నిర్వచిస్తాము.

ii) ప్రతి n కి $Z_n = x_n + y_n$ అని వ్రాసి $Z = (z_n)$ అనే అనుక్రమాన్ని $Z = XY$ గా నిర్వచిస్తాము.

iii) $c \in 3$ అయితే, $z_n = cx_n$, $Z = (z_n)$ అనే అనుక్రమాన్ని $Z = cx$ గా నిర్వచిస్తాము.

iv) ప్రతీ $y_n \neq 0$ అయితే $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ గా వ్రాసి $\frac{X}{Y} = (z_n)$ గా నిర్వచిస్తాము.

$Y^1 = Y = (-y_n)$ అనుక్రమము తీసుకుంటే, y^1 ఆరోహణ అనుక్రమము. అందువలన X, Y^1 రెండూ ఏకదిష్ట అనుక్రమాలు అవుతాయి. కానీ $X - Y^1 = X + Y$ ఏకదిష్ట అనుక్రమం కాదు. $X = (x_n)$ ఆరోహణ అనుక్రమం అయితే ప్రతి $n > m$ కి $x_n \geq x_m$ అవుతుంది. $c \geq 0$ అయితే $c\ x_n \geq c\ x_m$ అందుచేత c X ఆరోహణ అనుక్రమము, అందువల్ల ఏకదిష్ట అనుక్రమము. $c < 0$ అయితే $c\ x_n \leq c$

x కాబట్టి c

X అవరోహణ అనుక్రమము, అందువలన ఏకదిష్ట అనుక్రమము. అందుచేత $c\in 3$ అయితే cX ఏకదిష్ట అనుక్రమము. ఇదేవిధంగా, X అవరోహణ అనుక్రమం అయినప్పుడు cX ఏకదిష్ట అనుక్రమం.

11.4.13. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు: X మరియు Y అనే ఆరోహణ వాస్తవ అనుక్రమములు, $c > 0$ అయితే, X + Y మరియు cX ఆరోహణ అనుక్రమాలు అని నిరూపించండి.

11.4.14. X,

Y వాస్తవ ఆరోహణ అనుక్రమాలు అయితే XY ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమం అవుతుందా? వివరించం డి.

11.4.15. X,Y లు ఏకదిష్ట అనుక్రమాలు $c\in 3$ అయితే, X+Y, X-Y మరియు cX ఏకదిష్ట అనుక్రమాలు అవుతాయా? వివరించండి.

11.4.16 X,Y లు పరిబద్ధ వాస్తవ అనుక్రమాలు $c\in 3$ అయితే X+Y, X-Y, cX పరిబద్ధ అనుక్రమాలు అని చూపండి.

11.4.17. X,Y పరిబద్ధ వాస్తవ అనుక్రమాలు అయితే, XY పరిబద్ధ అనుక్రమం అవుతుందా? వివరించం డి.

11.4.18 ఉదాహరణలు: $b \in 3$, $B = (b^n)$ అనుక్రమమైతే $B = (b, b^2, b^3, \ldots.\ b^n, \ldots.)$ $bB = (b^2, b^3, b^4 \ldots.\ )$ bB అనేది B యొక్క 1వ వాలం, $b^2B = (b^3, b^4, b^5, \ldots\ldots.)$, B యొక్క 2వ వాలం ఇదేవిధంగా ప్రతి m కి $b^m B = (b^{m+1}, b^{m+2}, \ldots..)$, B యొక్క m వాలం $n \geq 1$, $|b| \leq 1$ అయితే $|b|^{n+1} = |b|^n\ |b| \leq |b|^n \Rightarrow |b|^n \leq 1$ కనుక $|b|^{n+1} \leq |b|^n \leq 1$ అందుచేత అనుగమనాన్ని అనుసరించి ప్రతి n కి $|b^n| \leq 1$ కనుక B పరిబద్ధము. అనుగమన సూత్రాన్ని అనుసరించి B అనుక్రమానికి $b_1 = b$ మరియు $b_{n+1} = b_n\, b$. $0 \leq b \leq 1$ అయితే $|b| = b$ మరియు $|b|^{n+1} \leq |b|^n$ కనుక $b^{n+1} \leq b^n \leq 1$ కనుక B అనుక్రమము ఏకదిష్ట అవరోహణ అనుక్రమము.

11.4.19. $X = (x_n)$ అనుక్రమంలో $x_n = 1 + (-1)^n$ అనుకుందాము. (1-1, 1+1, 1-1, 1+1, 1-1, 1+1, ……..) అనగా (0, 2, 0, 2, 2, 2, ……) n బేసి సంఖ్య అయితే $(-1)^n = -1$, కనుక $x_n = 0$ మరియు n సరిసంఖ్య అయితే $(-1)^n = -1$ కనుక $x_n = 2$. $\Rightarrow$ X ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము కానీ, అవరోహణ అనుక్రమము కానీ కాదు. కానీ X పరిబద్ధ అనుక్రవ ంము.

11.5 అనుక్రమం అవధి:

11.5.1. నిర్వచనము: $X = (x_n)$ వాస్తవానుక్రమము $x \in 3$. ప్రతి $\in > 0$ కు అనుగుణంగా $\angle$ లోని ప్రతి $n \geq k\ (\in)$ కి $|x_n - x| < \in$ అయ్యేటట్లు $\angle$ లో $k(\in)$ వ్యవస్థితం అయితే (x_n) అనుక్రమానికి x అవధి అనీ, $X = (x_n)$, x కి అభిసరిస్తుందనీ అంటాము. ఒక అనుక్రమానికి అవధి వుంటే ఆ అనుక్రమం అభిసరిస్తుందనీ, అవ ధి వ్యవస్థితం కాకుంటే అపసరిస్తుందని అంటాము. (x_n) అనుక్రమానికి x అవధి అయితే $\lim X = x$, $\lim (x_n) = x$ లేదా $x_n \rightarrow x$ అనీ వ్రాసి సంకేతపరంగా దీనిని 'x_n', x కి అభిసరిస్తుంది అని చదువుతాము.

గమనిక: $k(\in)$ అనే సంకేతాన్ని, k విలువ $\in$ మీద ఆధారపడి వుంటుందనే సూచనగా వాడతాము. కానీ $k(\in)$ బదులు k అనే వాడకం సులువు.

11.5.2(a) $k(\in)$ **కొరకు అన్వేషణ:** $\lim x_n = x$ అని నిరూపించడానికి, ఇచ్చిన ప్రతి $\in >$ 0 కి అనుగుణంగా $n \geq k(\in)$ అయితే $|x_n - x| < \in$ అయ్యేటట్లు $k(\in)$ వ్యవస్థితం అని నిరూపించాలి. ఈ $k(\in)$ సహజంగా $\in$ మీద ఆధారపడి వుంటుంది.

(i) $k \geq k(\in)$ అయితే $n \geq k \Rightarrow n \geq k(\in)$ కనుక, ఒక $k(\in)$ కనుగొనగల్గితే, ప్రతి $k \geq k(\in)$ కి అది వర్తిస్తుందని స్పష్టము.

(ii) ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $|x_n - x| < \in$ అయ్యేటట్లు $k(\in)$ అనే సహజ సంఖ్యకు బదులుగా ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య A ను, పై ధరా ర్మాన్ని పాటించేట్లు తీసుకోవచ్చును. ఎందుకంటే A లభ్యమైతే ఆర్కిమీడియన్ ధర్మాన్ని అనుసరిం చి A కంటే పెద్దదయిన ఏదైనా సహజ సంఖ్యని $k(\in)$గా ఎన్నుకొనవచ్చును. ఈ $k(\in)$ మననియ ఎమం పాటిస్తుంది.

(iii)

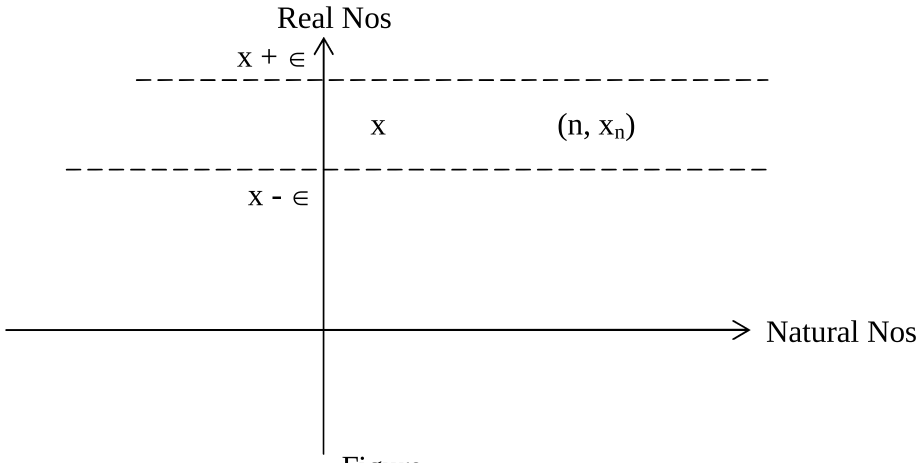
$\in$ విలువను (0,1) వివృతాంతమునకు పరిమితం చేసికోవచ్చును. ఎందుకంటే ఈ $k(\in)$ 1 కన్నా పెద్ద సంఖ్యలకి కూడా పనిచేస్తుంది. ఎందుకంటే $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - x| < \in < 1$ అయి $\in^1 \geq 1$ అయితే $\in^1 \geq 1 > \in$ కాబట్టి ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $|x_n - x| < \in < \in^1$ కాబట్టి (0,1) వివృతాంతరంలోని ప్రతి $\in$ కి $k(\in)$ కనుగొంటే చాలును.

11.5.2.

(b) **జ్యామితీయ వివరణ:** క్షితిజ రేఖమీద సహజ సంఖ్యలను, దానికి లంబరేఖ మీద వాస్తవ సంఖ్యలను సూచిస్తాము. ఈ రేఖల ఖండన బిందువునే మూల బిందువుగా వ్యవహరిస్తాము.

11.5.3. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $\lim (x_n) = x \Leftrightarrow$ ప్రతి $\in > 0$ కి $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - x| \leq \in$ అయ్యేటట్లు $\angle$ లో $k(\in)$ వ్యవస్థితమని నిరూపించండి.

(x_n) అనే వాస్తవ అనుక్రమము $x \in 3$ కు అభిసరిస్తుంది అని అన్నుపుడు, ప్రతి $\in > 0$ కు, $n \geq k$ కు, $x - \in$ నుండి $x + \in$ వరకు వున్న క్షితిజ రేఖా ఖండము అన్ని 'x_n' పదాలను కలిగి వుండేట్లు, k వ్యవస్థితం అవుతుంది.



Figure

11.5.4 అవధి ఏకైకత సిద్ధాంతము : వాస్తవానుక్రమానికి వ్యవస్థితం అయితే అది ఏకైకము.

ఉపపత్తి: (x_n) అనేది వాస్తవానుక్రమము అనుకుందాము. (x_n) కు x, x^1 అనేవి అవధులు అనుకుందాము. ప్రతి $\in > 0$ కి $0 \leq |x - x^1| < \in \quad \rightarrow \otimes$

అనే నిరూపణ ద్వారా $x = x^1$ అని చూపుదాము. $\in > 0$ అయితే $\lim (x_n) = x \Rightarrow$ ప్రతి $\frac{\in}{2} >$ 0 కు అనుగుణంగా $\angle$ లో k_1 $n \geq k_1$ అయితే $|x_n - x| < \frac{\in}{2}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం. $\rightarrow \quad (1)$

$\lim (x_n) = x^1 \Rightarrow \frac{\in}{2} > 0$ కు అనుగుణంగా k_2 , ప్రతి $n \geq k_2$ కు $|x_n - x^1| < \frac{\in}{2}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం.

$\rightarrow \quad (2)$

$m =$ గరిష్టం $\{k_1, k_2\}$ అనుకుంటే, $m \geq k_1$, $m \geq k_2$, కనుక ప్రతి $n \geq m$ కి (1), (2) అసమీకరణాలు జరుగుతాయి కాబట్టి $0 \leq |x - x^1| = |x - x_n + x_n - x^1| = ||x - x_n| + |x_n - x^1| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$. ప్రతి $\in > 0$ కి, $\otimes$ అసమీకరణము వర్తిస్తుంది. కాబట్టి $x = x^1$

11.5.5 అవధి ఉండకపోవడాన్కి మొదటి చిట్కా: అనుక్రమాల అవధి వ్యవస్థితం అయితే ఏకైకము. అనగ $\neg \lim (x_n) = \ell$ మరియు $\lim (x_n) = \ell^1$ అయితే $\ell =$

ℓ^1 అవుతుంది. కనుక ఒక అనుక్రమం అభిసరించదని (అపసరించదని) నిరూపించడానికి 11.5.4 సిద్ధాంత
ం ఎక్కువ వుపయోగకరం.

ఉదాహరణలు: i) $X = (x_n)$ అనుక్రమంలో $x_n = (-1)^{n-1}$

X అనుక్రమము ℓ కి అభిసరిస్తుందని అనుకుందాము. $\Rightarrow \lim (x_n) = \ell$

$\Rightarrow$ ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - \ell| = |(-1)^n - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు $k(\in)$ వ్యవస్థితం అవుతుంది. $n = 2k(\in) + 1$ అనుకుంటే, n-1 సరిసంఖ్య కాబట్టి $x_n = +1$ అయి, $|1 - \ell| < \in$. $0 \leq |1 - \ell| < \in$ మరియు $\in > 0$ యాదృచ్ఛికంగా తీసుకున్నందువలన $\ell = 1$. $n = 2k(\in)$ అయితే n-1 బేసిసంఖ్య అయి $x_n = -1$ అవుతుంది. $\Rightarrow$ ప్రతి $\in > 0$ కి $0 < |-1 - \ell| = |1 + \ell| < \in \Rightarrow \ell = -1$. $\therefore$ $\lim X = 1$ మరియు $\lim X = -1$ కాని అవధి ఏకైకము కనుక అనుక్రమము అభిసరించదు.

(ii) $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ అయితే $X = (x_n)$ అనుక్రమము అభిసరించదు. $\lim (x_n) = \ell$ అనుకుందాము అప్పుడు ప్రతి $\in > 0$ కి $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $0 \leq \left|\text{Sin} \frac{n\pi}{2} - l\right| < \in$ అయ్యేటట్లుగా $k(\in)$ వుంటుంది. $n = 2k(\in)$ అయితే $\frac{n\pi}{2} = \sin k(\in) \pi = 0$. అందుచేత $0 \leq |\ell| < \in$. ప్రతీ $\in > 0$ కి వర్తిస్తుంది కాబట్టి $\ell = 0$. $n = 4k(\in) + 1$ కు $\sin \frac{n\pi}{2} = \sin (2k(\in) + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. కాబట్టి $|\ell - 1| < \in$. $0 \leq |\ell - 1| < \in$ ప్రతి $\in > 0$ కి వర్తిస్తుంది కాబట్టి $\ell = 1$. ప్రతి $\in > 0$ కి $0 \leq |\ell| < \in \Rightarrow \ell = 0$ $\therefore$ (x_n) అనుక్రమానికి అవధి వ్యవస్థితం కాదు.

11.5.6 తుల్య రూపాలు:

సిద్ధాంతము: $X = (x_n)$ వాస్తవానుక్రమము. $x \in 3$ అయితే క్రింది ప్రవచనములు తుల్యాలు.

a) $X = (x_n)$ అనుక్రమం x కు అభిసరిస్తుంది.

b) ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - x| < \in$ అయ్యేట్లు $\angle$ లో $k(\in)$ వ్యవస్థితం.

c) ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $x - \in < x_n < x + \in$ అయ్యేవిధంగా $\angle$ లో $k(\in)$ వ్యవస్థితం.

d) x యొక్క ప్రతి $\in$- సామీప్యం $V_{\in}(x)$ కి అనుగుణంగా ఒక సహజ సంఖ్య k, $n \geq k$ అయినప్పుడల్లా x_n^- పదం $V_{\in}(x)$ లో ఉండేటట్లు వుంటుంది.

ఉపపత్తి: (a) $\Leftrightarrow$ (b) (నిర్వచనములు వలన)

u, v లు ఏవైనా వాస్తవ సంఖ్యలైతే

$|u - v| < \in \quad \Leftrightarrow - \in < u - v < \in$

$\Leftrightarrow v - \in < u < v + \in$

$\therefore |x_n - x| < \in \Leftrightarrow x - \in < x_n < x + \in$ అందుచేత (a) $\Leftrightarrow$ (b)

(b) జరగడాన్కి తుల్యంగా ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా, ప్రతి $n \geq k$ కి $|x_n - x| < \in$ అయ్యేటట్లు $\angle$ లో $k\in$ లో వ్యవస్థితం కావలె.

$|x_n - x| < \in \quad \Rightarrow x - \in < x_n < x + \in \Leftrightarrow$ (c) నిజము. కావున (b) $\Leftrightarrow$ (c)

$x_n \in V_{\in}(x) \quad \Leftrightarrow |x_n - x| < \in$ కాబట్టి (b) $\Leftrightarrow$ ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగాప్రతి n $\geq k$ కి, $x_n \in V_{\in}(x)$ అయ్యేట్లు k వుంటుంది. కాబట్టి (b) $\Leftrightarrow$ (d)

$\therefore$ (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) మరియు (b) $\Leftrightarrow$ (d)

$\therefore$ (a), (b), (c) మరియు (d) లు తుల్య ప్రవచనములు.

11.5.7 సిద్ధాంతము:

$X = (x_n)$ వాస్తవ అనుక్రమము. x వాస్తవ సంఖ్య. క్రింది ప్రవచనములు తుల్యములు.

(i) $X = (x_n)$ అనుక్రమము $x \in 3$ కి అభిసరించదు.

(ii) ప్రతి k కి, $n_k \geq k \quad |x_{n_k} - x| \geq \in_0$ అయ్యేట్లు $\in_0$ వ్యవస్థితం

(iii) ఒక $\in_0 > 0$, Xలో ఒక ఉపఅనుక్రమం $\{x_{n_k}\}$, ప్రతి k కి $|x_{n_k} - x| \geq \in_0$ అయ్యేవిధంగా వ్యవస్థితం.

ఉపపత్తి: (i) $\Rightarrow$ (ii)

(i) నిజము అనుకుందాము అప్పుడు ఒక $\in_0 > 0$ కి నిర్వచనంలోని నియమం వర్తించదు. ఈ $\in_0$ కి అనురూపంగా $\angle$ లో $k(\in_0)$ ప్రతి $n \geq k \in_0$ కు $|x_n - x| < \in_0$ అయ్యేవిధంగా వ్యవస్థితం కాదు. (*) కావున ఏ సహజ సంఖ్య k అయినా $k(\in_0)$ కాజాలదు. కాబట్టి (*) ని

k తృప్తిపరచదు. కనుక కనీసం ఒక్క $n \geq k$ కి (*) లో మొదటి అసమీకరణం, అనగా $|x_n - x| < \in_0$ జరగదు. అనగా $|x_n - x_0| \geq \in_0$ అయ్యేటట్లు కనీసం ఒక్క $n \geq k$ వ్యవస్థితం. అందుచేత ప్రతీ k కి ఒక $n_k \geq k$, $|x_{n_k} - x| \geq \in_0$ అయ్యేవిధంగా $\in_0 > 0$ వ్యవస్థితం అవుతుంది. అందుచేత (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : (ii) జరిగినప్పుడు $k = 1$ కి అనుగుణంగా ఒక n, $|x_{n_1} - x| \geq \in_0$ అయ్యేవిధంగా వ్యవస్థితం అవుతుంది. k = గరిష్టం $\{2, n_1 + 1\}$ అనుకుందాము. ఈ k కి అనుగుణంగా $\angle$ లో n_2, $n_2 \geq k$ $|x_{n_2} - x| \geq \in_0$ అయ్యేవిధంగా వుంటుంది. $n_2 \geq k \geq$ గరిష్టం $\{2, n_1 + 1\}$ కనుక $n_2 > n_1$. $n_k \geq k$, $|x_{n_k} - x| \geq \in_0$ అయ్యేవిధంగా $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ వ్యవస్థితం అని అనుకుందాము. k^1=గరిష్టం $\{n_k + 1, k + 1\}$ అనుకుందాము. (ii) నుండి ఈ k^1 కి అనుగుణంగా n_{k+1}, $|x_{n_{k+1}} - x| \geq \in_0$ అయ్యేటట్లు వుంటుంది. $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ మరియు $n_{k+1} \geq k+1$ కనుక అనుగమనం ప్రకారం ప్రతి k కి అనుగుణంగా n, $k \leq n_k < n_{k+1}$, $|x_{n_k} - x| \geq \in_0$ అయ్యేటట్లు వుంటుంది. $\therefore$ (iii) నియమాన్ని (x_{n_k}) ఉపానుక్రమం పాటిస్తుంది. కనుక (ii) $\Rightarrow$ (iii)

(iii)$\Rightarrow$(i): (x_n) (iii) నియమాన్ని పాటిస్తూ, (i) ని పాటించదు అని అనుకుందాము. అప్పుడు $\lim\limits_n x_n = x$ అవుతూ (iii) నియమంలోని $\in_0 > 0$ కు అనుగుణంగా $k(\in)$, ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $|x_n - x| < \in_0$ అయ్యేటట్లు వుంటుంది. $\{1,2,3, \ldots, n_1, \ldots\}$ అనుక్రమంలో (n_k) ఖచ్చితమైన ఆరోహణ అనుక్రమం కనుక $n_{k_0} \geq k(\in)$ అయ్యేట్లు n_{k_0} వుంటుంది. కాబట్టి ఒక n_{k_0} ప్రతి $n_k \geq n_{k_0}$ కి $|x_{n_k} - x| < \in_0$ అయ్యేటట్లుగానూ, $n_{k_0} \geq$

k(∈) అయ్యేటట్లు గానూ వుంటుంది. ఇది (iii) కు విరుద్ధము. $\therefore$ (iii) వాస్తవమైతే (i) నిజము. $\therefore$ (iii) $\Rightarrow$ (i)

11.5.8 అవధి వుండని వాటికి 2వ చిట్కా: 11.5.8 సిద్ధాంతము నుండి, $\lim x_n \neq x$ అని నిరూపించడానికి, $\in_0 > 0$ కు అనుగుణంగా ప్రతి n_k కి $|x_{n_k} - x| \geq \in_0$ అయ్యే విధంగా (x_n) అనుక్రమానికి (x_{n_k}) అనే ఉపానుక్రమాన్ని కనుక్కోగలిగితే చాలు అనే మరొక చిట్కా తెలిసింది. దీన్ని కింది ఉదాహరణలో వుపయోగిద్దాము.

11.5.9 ఉదాహరణ: $x_n = \dfrac{(-1)^n\ 2n}{n^2+1}$ అయితే $\lim (x_n) \neq 1$ అని చూపండి. n సరిసంఖ్య అయితే

$$|x_n - 1| = |x_n - 1| = \left|\frac{2n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{(n-1)^2}{n^2+1}\right| = \frac{(n-1)^2}{n^2+1} = \frac{(1-\frac{1}{n})^2}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$n \geq 2$ అయితే $0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1 > 1 - \dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2 \geq \dfrac{1}{4}$

మరియు $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{n^2} \leq 1 + \dfrac{1}{4} < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} > \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow |x_n - 1| \geq \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$ కనుక ప్రతి n కి $|x_{2n} - 1| \geq \dfrac{1}{2}$ కాబట్టి $\lim x_n \neq 1$

11.5.10 సిద్ధాంతము:

a) $\lim (x_n) = x$ అయితే $\lim (|x_n|) = |x|$

b) $\lim (x_n) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0$

c) $\lim (x_n) > 0$ అయితే ప్రతి $n > N$ కి $x_n > 0$ అయ్యేట్లు N వ్యవస్థితం.

నిరూపణ:

a) $||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \rightarrow \quad (1)$

అనే అసమతను ఈ సిద్ధాంతంలో ఉపయోగిస్తాము. $\lim (x_n) = x$, $\in > 0$ అయితే $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - x| < \in$ అయ్యేటట్లు $k(\in)$

వ్యవస్థితం. (1)వ అసమత నుండి ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $| |x_n| - |x| | \leq |x_n - x| < \in$. $\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కనుక $\lim (|x_n|) = |x|$

b) $\lim (x_n) = 0$ అయితే ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా ప్రతి $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n| < \in$ అయ్యేటట్లు $k(\in)$ వ్యవస్థితం. $n \geq k(\in)$ అయితే $|x_n| = | |x_n| - 0 | = | x_n| < \in$ కనుకనూ $\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కనుకనూ $\lim (|x_n|) = 0$. విలోమంగా $\lim |x_n| = 0$ అయితే ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $|x_n| = ||x_n| - 0| < \in$ అయ్యేటట్లు $\in>0$ కి అనురూపంగా $k(\in)$ వ్యవస్థితం. కనక $\lim(x_n)=0$

(c) $\lim (x_n) = x > 0$ అనుకుందాము. $\in = x$ కి అనుగుణంగా $n \geq N$ అయితే $|x_n - x| < \in$ అయ్యేటట్లు N వ్యవస్థితం. ఇట్టి ప్రతి n కి $0 = x - x < x_n < x + x$ కాబట్టి $n>N$ అయినప్పుడు $x_n > 0$.

11.5.10(a) విపర్యయం నిజం కాదు. ఉదాహరణకి $x_n = (-1)^n$ అయినప్పుడు $\lim |x_n| = \lim x_{2n} = 1$, $\lim x_{2n-1} = -1$.

11.5.11. సిద్ధాంతము: x_n వాస్తవానుక్రమము. $x \in ℜ$. (a_n) అనే ధన వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమము $\lim (a_n) = 0$ మరియు $n \geq m$ కి $|x_n - x| \leq c\, a_n$ అయ్యేటట్లు సహజ సంఖ్య m, స్థిరాంకము c వుంటే $\lim (x_n) = x$

నిరూపణ: x_n వాస్తవానుక్రమము. $x \in ℜ$. (a_n) అనే వాస్తవానుక్రమము ప్రతి n కి $a_n > 0$ మరియు $\lim\limits_n (a_n) = 0$. అని దత్తాంశము. $n \geq m$ అయితే $|x_n - x| \leq c\, a_n$ అయ్యేట్లు $c \in ℜ$, $m \in ℕ$ వున్నవి. $\lim\limits_n a_n = 0$ కాబట్టి $\in > 0$ అయితే ప్రతి $n \geq k$ కి $|a_n| < \frac{\in}{c}$ అయ్యేటట్లు k, ℕ లో వ్యవస్థితం. $a_n > 0$ కాబట్టి ప్రతి $n \geq k$ కి $a_n < \frac{\in}{c}$. $k(\in)$ = గరిష్టం $\{k, m\}$ అనుకుంటే, $n \geq k(\in) \Rightarrow n \geq m \Rightarrow a_n < \frac{\in}{c}$. $|x_n - x| < c\, a_n$ కాబట్టి $n \geq k(\in)$ కి $|x_n - x| < c\, a_n < c. \frac{\in}{c} = \in$.

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కు వర్తిస్తుంది కనుక $\lim\limits_n (x_n) = x$

11.5.12 సిద్ధాంతము: $X = (x_n)$ అనుక్రమానికి, $Y = (y_k)$ అనేది ఏదైనా ఉపానుక్రమం, $\lim X = x$ అయితే $\lim\limits_n Y = x$

నిరూపణ: $\in > 0$ అనుకోండి. $\lim_n (x_n) = x$ కనక $\in > 0$ కి అనుగుణంగా ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $|x_n - x| < \in$ అయ్యేవిధంగా $k(\in)$,

వుంటుంది. Y అనేది X కి ఉపానుక్రమము కనుక, ప్రతి k కి $y_k = x_{n_k}$ అయ్యేట్లు $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_k < \ldots\ldots$ అనే సహజ సంఖ్యల శుద్ధ ఆరోహణ అనుక్రమం వుంటుంది. 11.4.8. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న నుండి ప్రతి k కి $n_k \geq k$ కనక $k \geq k(\in)$ అయితే $n_k \geq k \geq k(\in)$ కాబట్టి $k \geq k(\in)$ అయితే $|y_k - x| = |x_{n_k} - x| < \in$, $\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కాబట్టి $\lim y_k = x$.

11.5.13 సిద్ధాంతము: $X = (x_n)$ అనుక్రమమైతే $\lim X = x \Leftrightarrow$ ఒక సహజ సంఖ్య m కి $\lim X_m = x$. ఈ సందర్భంలో ప్రతి m కి $\lim X_m = x$

ఉపపత్తి: X అనుక్రమానికి x_m అనేది ఉపానుక్రమము. మరియు $\lim X = x$ కనుక $\lim X_m = x$.

విపర్యయము: వొక m కి $\lim X_m = x$ అనుకుందాం. ప్రతీ n కి $y_n = x_{n+m}$ అని వ్రాయండి. $\in > 0$ కి అనుగుణంగా వొక సహజసంఖ్య k ప్రతి $n \geq k$ కి $|y_n - x| < \in$ అగునట్లు వుంటుంది. కాబట్టి $n \geq k$ అయితే $|x_{m+n} - x| < \in$. $n \geq k \Leftrightarrow m + n \geq m + k$ కాబట్టి $m + n \geq m + k$ అయితే $|x_{m+n} - x| < \in$ అనగా $r \geq m + k$ కి $|x_r - x| < \in$. $k(\in) = m + k$ గా ఎన్నుకుంటే, ప్రతి $r \geq k(\in)$ కి $|x_r - x| < \in$.

$\in > 0$ యాదృచ్ఛికంగా తీసుకున్నాం కాబట్టి $\lim X = x$.

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు:

11.5.14 $X = (x_n)$ అనుక్రమములో $X_1 = (x_{2n-1})$ అనేది బేసి పదాల ఉపానుక్రమము మరియు $X_2 = (x_{2n})$ అనేది సరిపదాల ఉపానుక్రమము. అనుక్రమము X అభిసరణకి తుల్యం ఉపానుక్రమాలు X_1, మరియు X_2 ఒకే అవధికి అభిసరణ చెందుట. ఈ సందర్భంలో $\lim X = \lim X_1 = \lim X_2$

11.5.15 $X = (x_n)$ వాస్తవానుక్రమము. ప్రతి సహజసంఖ్య n కి $x_n \geq 0$. $\lim ((-1)^n x_n)$ వ్యవస్థితం అయితే $\lim_n X$ వ్యవస్థితమనీ $\lim_n X = 0$ అనీ నిరూపించండి.

11.5.16 (x_n), (y_n) అను(క్రమాలు, $\lim (x_n) = x$ మరియు ప్రతి $\in>0$ కి అనుగుణంగా వొక $k(\in)$ ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $|x_n - y_n| < \in$ అయ్యేవిధంగా వ్యవస్థితం అయితే

$\lim (y_n) = x$ అని నిరూపించండి.

11.5.17. $X = (x_n)$ వాస్తవ అను(క్రమము $\ell\in$ 3. $\lim X = \ell$ అగుటకు X లోని ప్రతి ఉపానుక్రమం అవధి ℓ గా అభిసరించే వొక ఉపానుక్రమము కలిగి వుంటుందని చూపండి.

11.5.18 ఉదాహరణలు: 1. $\lim \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$

సాధన: $\in > 0$ అనుగుణంగా ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \in$ అయ్యేటట్లు సహజసంఖ్య $k(\in)$ కనుక్కోవాలి. $\frac{1}{n} < \in \Leftrightarrow n \in >1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\in}$ కాబట్టి $\frac{1}{\in} < k(\in)$ అయితే $k(\in) > \frac{1}{\in}$. $n \geq k(\in)$ అయితే $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k(\in)} < \in$. $\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కనుక $\lim (\frac{1}{n}) = 0$.

2) $\lim \left(\frac{3n+2}{n+1}\right) = 3$

సాధన: $\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n+2-3n-3}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$

పై ఉదాహరణలో వలెనే, $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $k(\in) > \frac{1}{\in}$ అయ్యేట్లు $k(\in)$ అనే సహజసంఖ్య ఎంచుకుంటే $n \geq k(\in) \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \in$. $\therefore n \geq k(\in)$ అయితే $\left|\frac{3x+2}{n+1} - 3\right| < \in$. $\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కనక $\lim\limits_{n} \left(\frac{3x+2}{n+1}\right) = 3$

3) $0 < b < 1$ అయితే $\lim (b^n) = 0$

సాధన: మనము ప్రతి $\in > 0$ అనుగుణంగా, "ప్రతి $n \geq k$ కి $|b^n - 0| < \in$ అయ్యేట్లు k అనే సహజ సంఖ్య వ్యవస్థితం అవుతుంది". నిరూపించితే చాలు. దీనికి బదులుగా $n>k$ అయినప్పుడు $|b^n|<\in$ అగునట్లు, $0 < \in < 1$ కి అనుగుణంగా $k \in 3,\ k > 0$ అయ్యేవిధంగా k కనుక్కుంటే చాలు. $0 < \in < 1$ అనుకుందాము. $\log \in < o$, $\log b < 0$ కాబట్టి $\log \frac{1}{\in} > 0, \log \frac{1}{b} > 0$ అంతే కాక $|b^n - 0| = b^n < \in \Leftrightarrow (\frac{1}{b})^n > \frac{1}{\in} \Leftrightarrow n \log \frac{1}{b} > \log \frac{1}{\in}$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\log \frac{1}{\in}}{\log \frac{1}{b}} = \frac{\log \in}{\log b} > 0 \quad \left(\because \frac{1}{10g\ b} > 0 \right)$$

$\therefore k = \frac{\log \in}{\log b}$ తీసుకుంటే ప్రతి $n \geq k$ కి $|b^n| < \in$ కనక $\lim b^n = 0$.

4) $a > 0$ అయితే $\lim \left(\frac{1}{1+na} \right) = 0$

సాధన: $0 < \in < 1$ అయినప్పుడు

$$\left| \frac{1}{1+na} - 0 \right| = \frac{1}{1+na} < \in \Leftrightarrow 1 < \in (1 + na) \Leftrightarrow 1 + na > \frac{1}{\in} \Leftrightarrow na > \frac{1}{\in} - 1$$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{a} \ (\frac{1}{\in} - 1)$ కనక $\lim\limits_{n} \frac{1}{1+na} = 0$

5. k వాస్తవసంఖ్య, ప్రతి n కి, $x_n = k$ అయితే $\lim (x_n) = k$

సాధన: ప్రతి n కి, $|x_n - k| = |k - k| = 0$ కాబట్టి $\in > 0$ అయితే ప్రతీ n కి $|x_n - k| = 0 < \in$ కనక $k(\in) = 1$. అనుకోవచ్చును. $\lim (x_n) = k$.

6) $C > 0$ అయితే $\lim (C^{1/n}) = 1$.

సాధన: $C > 0$ అయితే నిర్వచనం ప్రకారం, $C = b^n$ అయ్యేట్లు $b > 0$ వుంటుంది.

1వ సందర్భము: $C = 1$ అయితే ప్రతి n కి $C^{\frac{1}{n}} = 1$ కనక (5) నుండి $\lim (C^{1/n}) = 1$.

2వ సందర్భము: $C > 1$ మరియు $C^{1/n} = b$ అయితే $b^n = C > 1 \Rightarrow b > 1 \Rightarrow C^{1/n} > 1.$

$h = C^{1/n} - 1$ అనుకుందాము. $h > 0$ మరియు $1 + h = C^{1/n}$ కనక $(1 + h)^n =$

C ద్విపదసిద్ధాంతం ప్రకారం $C = (1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1} h + \ldots\ldots + h^n > 1 + C_1^n h = 1 + nh$

$\Rightarrow C > 1 + nh \Rightarrow C - 1 > nh \Rightarrow \dfrac{C-1}{n} > h$ కాబట్టి $|C^{1/n} - 1| = |h| = h < \dfrac{C-1}{n}$

$\in > 0$ అయితే $\dfrac{C-1}{n} < \in \Leftrightarrow (C\text{-}1) < n \in \Leftrightarrow n > \dfrac{C-1}{\in}$ కనక $\lim C^{1/n} = 1$

$\dfrac{C-1}{n} < \in \Leftrightarrow n > \dfrac{C-1}{\in}$ కనక $C^{1/n} = 1$

సందర్భము 3: $0 < C < 1$ అయితే $\dfrac{1}{C} > 1$ కనక (2) బట్టి $\lim \left(\dfrac{1}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$

$\left(\dfrac{1}{C}\right)^{\frac{1}{n}} . C^{\frac{1}{n}} = 1$ కనక $\lim C^{1/n}$ వ్యవస్థితం, మరియు $\lim C^{1/n} = 1$

7) $\lim (n^{1/n}) = 1$

సాధన: ఉదాహరణ (6)లో చేసిన విధంగా ఇది సాధిస్తాము.

$n > 1$ అయితే $n^{1/n} > 1 \Rightarrow h = n^{1/n} - 1 > 0$

$$n = (1 + h)^n = 1 + \binom{n}{1} h + \binom{n}{2} h^2 + \ldots.. + h^n > 1 + \binom{n}{2} h^2 = 1 + \frac{n.(n-1)}{2} h^2$$

$$n > 1 + \binom{n}{2} h^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{1-2} h^2 \Rightarrow n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h^2$$

$\Rightarrow 1 > \dfrac{n}{2} h^2 \Rightarrow h^2 < \dfrac{2}{n} \Rightarrow h < \sqrt{\dfrac{2}{n}} . \sqrt{\dfrac{2}{n}} < \in$ అనుకుంటే $\dfrac{2}{n} < \in^2$ అనగా $n > \dfrac{2}{\in^2}$

$n > \dfrac{2}{\in^2}$ అయినప్పుడు $0 < h < \sqrt{\dfrac{2}{n}} < \in$ కనక $0 < n^{1/n} - 1 < \in$ అందుచేత $\lim(n^{1/n}) = 1.$

8. $\lim \dfrac{n^2 - 1}{2n^2 + 3} = \dfrac{1}{2}$

సాధన: $\left|\dfrac{n^2 - 1}{2n^2 + 3} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{2n^2 - 2 - 2n^2 - 3}{2(2n^2 + 3)}\right| = \left|\dfrac{-5}{2(2n^2 + 3)}\right| = \dfrac{5}{2(2n^2 + 3)}$

$\in > 0$ అయితే $\frac{5}{2(2n^2+3)} < \in \Leftrightarrow 2 \in (2n^2+3) > 5 \Leftrightarrow 2n^2 + 3 > \frac{5}{2\in}$

$\Leftrightarrow 2n^2 > \frac{5}{2\in} - 3 \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{2}(\frac{5}{2\in} - 3) \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\in} - 3\right)}$ ($\frac{5}{2\in} - 3 > 0$ అయితే)

$\frac{5}{2\in} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2\in} > 3$ అనగా $5 > 6\in \Rightarrow 0 < \in < \frac{5}{6}$

$\therefore 0 < \in < \frac{5}{6}$ మరియు $n > \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\in} - 3\right)}$ అయితే $\left|\frac{n^2-1}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| < \in$

$\frac{5}{2\in} - 3 < 0$, అయితే ప్రతి n కి $n^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\in} - 3\right)$ కాబట్టి $\lim_n \frac{n^2-1}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$

11.6 అవధి సిద్ధాంతములు:

11.6.1 సిద్ధాంతము: అభిసరించే ప్రతీ వాస్తవ అనుక్రమము పరివద్ధము.

ఉపపత్తి: (x_n) అనుక్రమము అభిసరిస్తుందని, మరియు $(x_n) = x$ అని అనుకుందాము. $\in = 1$ కి అనుగుణంగా ఒక సహజ సంఖ్య k, ప్రతి $n \geq k$ కి $|x_n - x| < 1$ అయ్యేటట్లు ఉంటుంది.

$|\,|x_n| - |x|\,| \leq |x_n - x|$ కనుక ప్రతి $n \geq k$ కి $|\,|x_n| - |x|\,| < 1$ కనక ప్రతి $n \geq k$ కి, $|x| - 1 < |x_n| < 1 + |x|$

$M =$ గరిష్ట $\{|x_1|, \ldots |x_{k-1}|, 1 + |x|\}$ అనుకుంటే ప్రతి $1 \leq n < k$ కి $|x_n| \leq M$ మరియు

$|x_n| \leq 1 + |x| \leq M$. అనగా ప్రతి n కి $|x_n| \leq M$. కాబట్టి (x_n) పరిబద్ధ అనుక్రమము.

అపసరణకి మొదటి చిట్కా: (x_n) అనుక్రమము పరిబద్ధం కాకపోతే, (x_n) అనుక్రమం అపసరిస్తుంది.

గమనిక: ప్రతీ పరిబద్ధ అనుక్రమము అభిసరిస్తుందని చెప్పలేము. ఉదాహరణకి $x_n = (-1)^{n-1}$ అయితే (x_n) అనుక్రమము పరిబద్ధమే కానీ అభిసరించదు. (11.5.6 (i) ని చూడండి.)

11.6.2 సిద్ధాంతము: ప్రతి సహజసంఖ్య n కి $m \leq x_n \leq M$ మరియు $\lim (x_n) = x$. అయితే, $m \leq x \leq M$

నిరూపణ: $m > x$ అనుకుందాము. $\in = m - x > 0$ అనుగుణంగా, $n \geq k$ అయితే $|x_n - x| < m - x$ అయ్యేటట్లు ఒక సహజ సంఖ్య k వుంటుంది. $\Rightarrow$ ప్రతి $n \geq k$ కి, $x_n < m$ అవుతుంది. ఇది దత్తాంశమునకు విరుద్ధం కాబట్టి $m \leq x$. అసమీకరణ రెండవ భాగము అనగా $M \geq x$ నిరూపించడానికి $M<x$ అనుకొని, $\in = x - M > 0$ గా తీసికొంటే మొదటి నిరూపణలోవలెనే, ప్రతి $n \geq$

k_1 కి $|x_n - x| < x - M$ అయ్యేటట్లు సహజసంఖ్య k_1 వ్యవస్థితం కాబట్టి $n \geq k_1$ అయినప్పుడు $x_n > M$. ఇది అసంభవము కాబట్టి $x \leq M$. అందుచేత $m \leq x \leq M$

11.6.3 ఉపసిద్ధాంతము: (i) ప్రతి n కి $x_n \geq 0$ మరియు $\lim (x_n) = x$ అయితే $x \geq 0$ (ii) m స్థిర సహజ సంఖ్య $n \geq m$ అయినప్పుడు $a \leq x_n \leq b$ మరియు $\lim (x_n) = x$ అయితే $a \leq x \leq b$.

11.6.4 సిద్ధాంతము: ప్రతి n కి $x_n \leq y_n$, $\lim x_n = x$ మరియు $\lim y_n = y$ అయితే, $x \leq y$

ఉపపత్తి: $x > y$ అయితే $\frac{x-y}{2}$ కి అనురూపంగా $n \geq k$ అయినప్పుడు $|x_n - x| < \frac{x-y}{2}$ అయ్యేట్లు ఒక సహజసంఖ్య k వ్యవస్థితం. అప్పుడు $y < x - \frac{x-y}{2} < x_n < x + \frac{x-y}{2}$

కాబట్టి ప్రతి $n \geq k$ కి $x_n > \frac{x+y}{2}$

11.6.2. అసమతలోని మొదటి భాగం నుండి $y = \lim (y_n) \geq \frac{x+y}{2}$, $2y - y - x > 0$ కాబట్టి $y \geq x$. ఇది $x > y$ అనే దానికి విరుద్ధం అందుచేత $x > y$ అని మనం అనుకోవడమే తప్పు, $x \leq y$**.**

11.6.5. సిద్ధాంతము: $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ వాస్తవానుక్రమంలు. $\lim X = x$, $\lim Y = y$ అయితే

a) $\lim (X + Y) = x + y$, b) $\lim (X - Y) = x - y$, c) $c \in 3$, అయితే $\lim cX = cx$

ఉపపత్తి: a) $\in > 0$ అనుకోండి $\lim X = x$ కాబట్టి, $n \geq k_1$ అయినప్పుడు $|x_n - y| < \frac{\in}{2}$ అయ్యేట్లు ఒక k_1 వ్యవస్థితం

--------(1)

ఇట్లే పై $\in$ కి అనుగుణంగా వొక k_2 ప్రతి $n \geq k_2$ కి $|y_n - y| < \frac{\in}{2}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం ----- (2)

$k(\in) =$ గరిష్ఠం $\{k_1, k_2\}$ అనుకుంటే ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి (1), (2) వర్తిస్తాయి కనక

$|(x_n+y_n| - (x+y)| = |(x_n-x) + (y_n-y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$ కాబట్టి $\lim (X+Y) = x+y$

b) $n \geq k(\in)$ అయితే $|(x_n - y_n) - (x - y)| = |(x_n-x) - (y_n-y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$.

$\lim (X - Y) = x - y$

c) $c = 0$ అయితే $c X = 0$ మరియు $cx = 0$ $\lim (0) = 0$ కనుక $\lim cX = 0 = 0$ $\lim X = c$. $\lim X$. $c \neq 0$, $\in > 0$ అయితే, $\lim (x_n) = x$ కనుక $\in > 0$ కి అనుగుణంగా సహజసంఖ్య $k(\in) = k$, ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $|x_n - x| < \frac{\in}{|c|}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం. $n \geq k$ అయితే $|c x_n - cx| = |c|\,|x_n - x| < |c| \frac{\in}{|c|} = \in \Rightarrow (c x_n)$ అనుక్రమము cx కి అభిసరిస్తుంది.

11.6.6 ఉపసిద్ధాంతము:

A,B,C, … Z లు పరిమిత వాస్తవ అనుక్రమాలు. వీటిలో ప్రతి అనుక్రమము 3 లో అభిసరిస్తే, A+B+ … +Z మరియు ABC … Z అనుక్రమాలు కూడా అభిసరిస్తాయి, మరియు (i) lim (A + B + C + … + Z) = lim A + lim B + …. + lim Z.

ఉపపత్తి: అనుగమన సిద్ధాంతము ఉపయోగించి, ఈ సిద్ధాంతమును నిరూపిస్తాము. n = 2 కి, lim A = a, lim B = b అయ్యేట్లు రెండు అభిసరించే అనుక్రమాలు A, B లు తీసుకుంటే, సిద్ధాంతము 11.6.5(a) నుండి A + B అభిసరిస్తుందనీ, lim (A + B) = a + b అని స్పష్టం. n అనుక్రమాలకు ఈ ప్రవచనము నిజము అనుకుందాము. A_1, A_2, + …. + A_{n+1} అనేవి అభిసరించే n+1 అనుక్రమాలు వీటి అవధులు వరసగా a_1, a_2, + …. + a_{n+1} అనుకుందాము. అనుగమన సిద్ధాంతం ననుసరించి B = A_1 + …..+ A_n అభిసరిస్తుంది. మరియు lim B = lim a_1 + lim a_2 + …… + lim a_n అంతేకాక lim B = lim (A_1 + A_2 +…. A_n) = lim A_1 + lim A_2 + … + lim A_n = a_1 + a_2 +….+ a_n $\rightarrow$ (1)

B అభిసరిస్తుంది, A_{n+1} అభిసరించే అనుక్రమము కనక 11.6.5 నుండి B + A_{n+1} అనుక్రమము అభిసరిస్తుంది మరియు (a) నుండి lim (B+ A_{n+1}) = lim B + lim A_{n+1} = lim A_1 + … + lim A_{n+1}

11.6.7 సిద్ధాంతము: X = (x_n) అనుక్రమము x కి, Y = (y_n) అనుక్రమము y కి అభిసరిస్తే XY అనుక్రమము xy కి అభిసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: 3 లో ప్రతి అభిసరించే అనుక్రమము పరిబద్ధము అని తెలుసు. X అభిసరిస్తుంది కాబట్టి పరి బద్ధము.

$\Rightarrow$ ప్రతి n కి, $|x_n| < M$ అయ్యేటట్లు M అనే వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థితం. --------- (1)

lim (x_n) = x కాబట్టి $\in > 0$ అయితే ఒక సహజసంఖ్య k_1 ప్రతి $n \geq k_1$ కి $|x_n - x| < \dfrac{\in}{2\,(1+|\,y\,|)}$

అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం -------- (2)

lim (y_n) = y కాబట్టి ప్రతి $n \geq k_2$ కి $|y_n - y| < \dfrac{\in}{2M}$ అయ్యేటట్లు సహజసంఖ్య k_2 వ్యవస్థితం -----(3)

$k(\in)$ = గరిష్ఠం $\{k_1, k_2\}$ అనుకుంటే, ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి (2), (3) వర్తిస్తాయి.

$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| = |x_n (y_n - y) + (x_n - x) y|$

$\leq |x_n (y_n - y| + |y (x_n - y)| = |x_n |y_n - y| + |x_n - x| |y|$

$\leq M . \dfrac{\in}{2M} + |y| \dfrac{\in}{2(1+|y|)}$ ((1), (2), (3) నుండి)

$\leq \dfrac{\in}{2} + \dfrac{\in}{2} + \dfrac{\in}{2} = \in \therefore$ X Y అభిసరిస్తుంది మరియు $\lim (X Y) = xy$

11.6.8 ఉప సిద్ధాంతము: $X_1, X_2, \ldots X_k$ అభిసరించే అనుక్రమాలు అనుకుందాము. $X_1, X_2 \ldots X_k$ అనుక్రమాల n - వ పదాల లబ్ధాన్ని, n - వ పదంగా కలిగిన అనుక్రమము X (లబ్ధ అనుక్రమము అని అంటాము) అభిసరిస్తుంది. మరియు $\lim X = \lim (X_1) \lim (X_2) \ldots \lim (X_k)$.

ఉపపత్తి: దీనిని అనుగమన సిద్ధాంతమునుపయోగించి నిరూపిస్తాము. $k = 2$ అయినపుడు $X = X_1 X_2$ సిద్ధాంతం 11.66.6 నుండి $X_1 X_2$ అభిసరిస్తుందనీ, $\lim X = (\lim X_1) (\lim X_2)$ స్పష్టము. ఈ ప్రవచనము, ఏ k అనుక్రమాలకైనా నిజము అని అనుకుందాము.

$X_1, X_2, \ldots X_{k+1}$ అనే $(k + 1)$ అనుక్రమాల లబ్ధం X అనుక్రమము అనుకుందాము. $Y = X_2. X_3. \ldots.. X_{K+1}$ అనేది k అనుక్రమాల లబ్ధం, మరియు $X = X_1 Y$. Y అనుక్రమము అభిసరించే k- అనుక్రమాల లబ్ధం కాబట్టి, అనుగమన సూత్రాన్ని అనుసరించి Y అభిసరిస్తుంది మరియు $\lim Y = (\lim X_2) (\lim X_3) \ldots\ldots. (\lim X_{k+1})$ X_1, Y అనుక్రమాలు అభిసరిస్తాయి కనుక, సిద్ధాంతము 11.6.7 వలన $X = X$, Y అభిసరిస్తుంది మరియు $\lim X=\lim (X,Y) = (\lim X_1) (\lim Y)$

$= (\lim X_1) (\lim X_2) \ldots\ldots. (\lim X_{k+1})$

కావున అనుగమన సిద్ధాంతము ప్రకారము ఈ ప్రతిపాదన ప్రతీ n కీ వర్తిస్తుంది.

11.6.9. $Z = (z_n)$ శూన్యేతర పదాల వాస్తవానుక్రమము: అనుక్రమము Z , $z \neq 0$ కి అభిసరిస్తే, అనుక్రమము $\dfrac{1}{Z}, \dfrac{1}{z}$ కి అభిసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: $\in = \dfrac{|z|}{2}$ అనుకుందాము.

$\lim\ (z_n) = z$ కనుక, ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా ప్రతి $n \geq k_1$ కి $|z_n - z| < \frac{|z|}{2}$ అయ్యేట్లు k_1 అనే సహజసంఖ్య వ్యవస్థితం ------ (1)

$\Rightarrow$ ప్రతి $n \geq k_1$ కి $|\,|z_n| - |z|\,| \leq |z_n - z| < \frac{|z|}{2}$

$\Rightarrow$ ప్రతి $n \geq k_1$ కి $|z| - \frac{|z|}{2} < |z_n| < |z| + \frac{|z|}{2}$

$\Rightarrow$ ప్రతి $n \geq k_1$ కి $|z_n| > \frac{|z|}{2}$ ------ (2)

$\Rightarrow$ ప్రతి $n \geq k_1$ కి $\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \frac{|z_n - z|}{|z_n|\,|z|} < |z_n - z| \,.\, \frac{2}{|z|.|z|}$ ------ (3)

$\lim z_n = z$ కాబట్టి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా ఒక సహజసంఖ్య k_2, $n \geq k_2$ అయితే $|z_n - z| < \frac{\in |z|^2}{2}$ అయ్యేటట్లు k_2 వ్యవస్థితం. $k(\in)$ = గరిష్ఠం $\{k_1, k_2\}$ తీసుకుంటే, (3) అసమీకరణము నుండి, ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| < \frac{|z_n - z|}{|z|^2} < \frac{\in .|z|^2}{2|z|^2} < \in$

$\therefore \left(\frac{1}{Z}\right)$ అనుక్రమము అభిసరిస్తుంది. మరియు $\lim \left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{z}$

11.6.10. ఉపసిద్ధాంతము: $X = (x_n)$ అభిసరించే అనుక్రమము, $Y = (y_n)$ అనుక్రమము శూన్యేతర పదాలతో, శూన్యేతర సంఖ్య y కి అభిసరిస్తే $\frac{X}{Y} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ అనుక్రమము $\frac{x}{y}$ కి అభిసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: $\lim Y = y$ ప్రతి n కి $y_n \neq 0 \neq y$ కనక 11.6.9 నుండి $\lim \frac{1}{Y} = \frac{1}{y}$

11.6.7 నుండి $\lim \left(\frac{X}{Y}\right) = \lim (X \,.\, \frac{1}{Y}) = \lim X \,.\, \lim \frac{1}{Y} = \frac{x}{y}$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు:

11.6.11 $\lim (x_n) = \ell$ మరియు $r > 0$ అయితే $\lim (x_n^r) = \ell^2$

11.6.12 $b_0 \neq 0$ మరియు r సహజసంఖ్య అయితే $\lim \left(\frac{a_0 n^r + a_1 n^{r-1} + a_r}{b_0 n^r + b_1 n^{r-1} + b_r}\right) = \frac{a_0}{b_0}$ అని చూపండి.

11.6.13 $r \in \angle$, $s \in \angle$ మరియు $r < s$, $b_0 \neq 0$ అయితే $\lim \left(\frac{a_0 n^r + ... + a_r}{b_0 n^s + ... + b_s}\right) = 0$

ఈ సందర్భంలో, a, b అనేవి వాస్తవ సంఖ్యలు అయితే $a \vee b$ = గరిష్ఠం (a, b) మరియు $a \wedge b$ = కనిష్టం (a, b) అని గుర్తుచేసుకుందాం.

11.6.14 సిద్ధాంతము: (x_n) మరియు (y_n) వాస్తవానుక్రమాలు అభిసరిస్తే, (గరిష్ఠం (x_n, y_n)) అనుక్రమము అభిసరిస్తుంది మరియు lim (గరిష్ఠం (x_n, y_n)) = గరిష్ఠం {lim (x_n), lim (y_n)} అవుతుంది. అనగా $\lim (x_n \vee y_n) = \lim (x_n) \vee \lim (y_n)$.

ఉపపత్తి: $\in > 0$ కి అనుగుణంగా సహజ సంఖ్యలు k_1, k_2 ప్రతి $n \geq k_1$ కి $x - \in < x_n < x + \in \rightarrow (1)$ మరియు ప్రతి $n \geq k_2$ కి $y - \in < y_n < y + \in \rightarrow (2)$

అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం k = గరిష్టం { k_1, k_2} అనుకుంటే, ప్రతి $n \geq k$ కి (1) మరియు (2) వర్తిస్తాయి. $x \vee y = x$ అనుకుందాం. $n \geq k$ అయితే (1), (2) నుండి $x_n > x - \in = (x \vee y) - \in$ కాబట్టి $(x_n \vee y_n) \geq x_n > (x \vee y) - \in$ ---- (3)

ప్రతి $n \geq k$ కి, $x_n < x + \in \leq (x \vee y) + \in$ మరియు $y_n < y + \in = (x \vee y) + \in$

అందుచేత ప్రతి $n \geq k$ కి $x_n \vee y_n < (x \vee y) + \in \rightarrow (4)$

కనక (3), (4) నుండి ప్రతి $n \geq k$ కి $(x \vee y) - \in < x_n \vee y_n < x \vee y + \in$

$\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కాబట్టి $\lim (x_n \vee y_n) = x = x \vee y$

11.6.15 స్క్వీజ్ (శాండ్‌విచ్) సిద్ధాంతం: $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$, $Z = (z_n)$ అనుక్రమాలు

ప్రతి n కీ $x_n \leq z_n \leq y_n$ తృప్తిపరచి, $\lim_n (x_n) = \lim_n (y_n)$ అయితే అనుక్రమం Z అభిసరిస్తుంది,

$\lim (X) = \lim (Y) = \lim (Z)$

ఉపపత్తి: lim (X) = lim Y = w అనుకోండి. $\in > 0$ అయితే సహజ సంఖ్యలు N_1, N_2 కింది నియమాన్ని పాటిస్తూ వ్యవస్థితాలు.

(i) $n \geq N_1$ అయినప్పుడు $|x_n - w| < \in$ అనగా $w - \in < x_n < w + \in$ మరియు

(ii) $n \geq N_2$ అయినప్పుడు $|y_n - w| < \in$ అనగా $w - \in < y_n < w + \in$

$N(\in)$ = గరిష్ఠం $\{N_1, N_2\}$, $n \geq N(\in)$ అయితే (i), (ii) నుండి $w - \in < x_n < w + \in$ మరియు $w - \in < y_n < w + \in$ అందుచేత $n \geq N(\in)$ అయితే దత్తాంశం నుండి

$w - \in < x_n < w < x_n < z_n < y_n < w + \in$. కాబట్టి $n \geq N(\in)$ అయినప్పుడు $w - \in < z_n < w + \in$, అనగా $|z_n - w| < \in$. ఇది ప్రతీ $\in>0$ కీ వర్తిస్తుంది కాబట్టి Z అభిసరణ చెందుతుంది, lim (Z) = w.

11.6.16 ఉపసిద్ధాంతం: $X = (x_n)$ $Y = (y_n)$ $Z = (z_n)$ **అనుక్రమాలు,** m **సహజ** సంఖ్య, $n \geq m$ అయినప్పుడు $x_n \leq z_n \leq y_n$, lim (X) = lim (Y) అయితే అనుక్రమం Z అభిసరిస్తుంది, lim (X) = lim (Y) = lim (Z)

ఉపపత్తి: దత్తాంశము నుండి ప్రతి n కి, $x_{m+n} \leq y_{m+n} \leq z_{m+n}$ అయ్యేటట్లు m - వాలములు X_m , Y_m మరియు Z_m వ్యవస్థితాలు మరియు lim X_m = lim Z_m. కనక స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము నుండి, అనుక్రమము Y_m అభిసరిస్తుంది మరియు lim X_m = lim Y_m = lim Z_m . $\Rightarrow$ lim X = lim X_m ; lim Y=lim Y_m; lim Z = lim Z_m $\Rightarrow$ lim X = lim Y = lim Z

11.6.17 ఉదాహరణ: స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము నుపయోగించి అనుక్రమము (n^{1/n^2}) అవధిని కనుగొనండి.

సాధన: ప్రతి n కి $n^2 \geq n \geq 1$ కాబట్టి $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq 1$. కాబట్టి $1 \leq n^{1/n^2} \leq n^{1/n}$. స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము నుండి lim 1 = lim $(n^{1/n})$ = 1 $\Rightarrow$ lim (n^{1/n^2}) = 1

11.6.18 ఉదాహరణ: $0 < a < b$ అయి, $Z_n = (a^n + b^n)^{1/n}$ అయితే lim (z_n) = b అని చూపండి.

సాధన: $0 < a < b$ కనుక ప్రతి సహజసంఖ్య n కి, $0 < a^n < b^n$

$\Rightarrow$ ప్రతి n కి $b^n < a^n + b^n < 2\,b^n$

$\Rightarrow$ ప్రతి n కి $b < (a^n + b^n)^{1/n} < 2^{1/n}\, b$

(b) స్థిర అనుక్రమము. ఇది b కి అభిసరిస్తుంది మరియు $(2^{1/n})$ అనుక్రమము 1 కి అభిసరిస్తుంది కాబట్టి $(2^{1/n}b)$ అనుక్రమము b కి అభిసరిస్తుంది. ∴ స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము నుండి అనుక్రమము $((a^n + b^n)^{1/n})$, b కి అభిసరిస్తుంది కాబట్టి $\lim (z_n) = b$.

11.6.19 ఉదాహరణలు:

(a) $x_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+n)^2}$ అయినప్పుడు $\lim x_n = 0$ అని చూపుము.

$\frac{1}{(2n)^2} \le \frac{1}{(n+k)^2} \le \frac{1}{n^2}$ $(1\le k\le n)$ అయినప్పుడు, కాబట్టి $\frac{n}{(2n)^2} \le x_n \le \frac{n}{n^2}$. $\lim \frac{1}{4n} = \lim \frac{1}{n} = 0$ కాబట్టి స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం నుండి $\lim x_n = 0$ అని వస్తుంది.

(b) స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం వుపయోగించి $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$ అని చూపుము.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ కాబట్టి $\sqrt{n} + \sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ కాబట్టి స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం నుండి $\lim \sqrt{n+1} - \lim \sqrt{n} = 0$ అని వస్తుంది.

(c) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots\ldots.. + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ అయితే $\lim x_n = 1$ అని చూపుము. $1\le k\le n$ అయినప్పుడు $n < \sqrt{n^2+k} < (n+1)$ కనక $1 \le k \le n$ అయితే $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} \le x_n \le \frac{n}{n} = 1.$$

$\lim \frac{n}{n+1} = 1$ కాబట్టి స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం నుంచి $\lim x_n = 1$ అని స్పష్టము.

11.6.20 సిద్ధాంతము: $X = (x_n)$ వాస్తవానుక్రమము x కి అభిసరిస్తుందనీ $x_n \geq 0$ అనీ అనుకొనుము. $(\sqrt{x_n})$ అనుక్రమము అభిసరిస్తుంది మరియు $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$

ఉపపత్తి: ప్రతి n కి $x_n \geq 0$ కనుక $x \geq 0$ (11.6.3)

సందర్భము (i) $x = 0$ అయితే $\lim x_n = 0$ కాబట్టి ప్రతి $\in >$ 0 కి అనుగుణంగా సహజసంఖ్య k, ప్రతి $n \geq k$ కి $0 \leq x_n = |x_n - 0| < \in^2$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అందుచేత ప్రతి $n \geq k$ కి, $0 \leq \sqrt{x_n} < \in$.

$\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కనుక $\lim (\sqrt{x_n}) = 0$.

సందర్భము (ii) $x > 0$ అయితే, ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా సహజసంఖ్య k_1, ప్రతి $n \geq k_1$ అయితే $|x_n - x| < x$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం కాబట్టి ప్రతి $n \geq k_1$ కి, $x - x < x_n < x + x$.

$\Rightarrow$ ప్రతి $n \geq k_1$ కి $x_n > 0$. ప్రతి $\in > 0$ అనుగుణంగా సహజసంఖ్య k_2, ప్రతి $n \geq k_2$ కి $|x_n - x| < \in \sqrt{x}$ అయ్యేటట్లు వుంటుంది. $\rightarrow (1)$

$k(\in)$ = గరిష్ఠం $\{k_1, k_2\}$ మరియు $n \geq k(\in)$ అయితే $\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}$

$$= \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}$$

$\Rightarrow |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = \dfrac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} < \dfrac{\in \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \in$. $(\sqrt{x_n} + \sqrt{x} > \sqrt{x})$ కాబట్టి

కాబట్టి ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| < \in$, $\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కనుక $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$

11.6.21 నిష్పత్తి పరీక్ష: (x_n) ధనాత్మక పదాల వాస్తవ అనుక్రమము. మరియు $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$.

$L < 1$ అయితే, (x_n) అభిసరిస్తుంది మరియు $\lim (x_n) = 0$.

ఉపపత్తి: ప్రతి సహజసంఖ్య n కి, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 0$ కనుక $L = \lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 0$

$L < r < 1$ అయ్యేటట్లు r ను 3 లో తీసుకుందాము. $\in = r - L > 0$

$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$ = L కనుక, $n \geq k$ అయినప్పుడు $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \in$ అయ్యేటట్లు X వ్యవస్థితం. $\rightarrow$ (1)

కాబట్టి $n \geq k$ అయితే $L - \in < \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \in \Rightarrow 2L - r < \frac{x_{n+1}}{x_n} < r \Rightarrow 0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < r$

$\Rightarrow 0 < \frac{x_{k+1}}{x_k} \cdot \frac{x_{k+2}}{x_{K+1}} \ldots \frac{x_n}{x_{n-1}} < (r)^{n-k} \Rightarrow 0 < \frac{x_n}{x_k} < \frac{r^n}{r^k} \Rightarrow 0 < x_n < \left(\frac{x_k}{r^k}\right) r^n$

$\lim r^n = 0$ కనుక 11.6.3 ప్రకారము $\lim (x_n) = 0$

11.6.22 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: (x_n) అనేది ధనాత్మక పదాల వాస్తవానుక్రమము.

$\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L > 1$ అయితే, (x_n) అనుక్రమము అపరిబద్ధము. మరియు (x_n) అభిసరించదు.

11.6.23 అనుక్రమాలపై కోషి మొదటి సిద్ధాంతం: (s_n) అభిసరిస్తూ $\lim s_n = s$ అయితే $\lim \left(\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}\right) = \ell$

ఉపపత్తి: $x_n = s_n - \ell$ గా వ్రాయుము. అప్పుడు $\lim x_n = 0$, $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} - \ell$

కావున $\lim x_n = 0$ అయినప్పుడు $\lim \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) = 0$ అని నిరూపిస్తే సరిపోతుంది.

$\lim x_n = 0 \Rightarrow$ దత్త $\in > 0$ అనుగుణంగా ధనపూర్ణాంకము k, ప్రతి $n \geq k$ కి $|x_n| < \frac{\in}{2}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థిగతం. (x_n) అభిసరిస్తుంది కావున (x_n) పరిబద్ధము. కనుక $|x_n| < A \;\forall\; n$ అయ్యేటట్లు ఒక ధన వాస్తవ సంఖ్య A వ్యవస్థితం. $n \geq k$ అయితే $\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right| =$

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}}{n} + \frac{x_k + \ldots + x_n}{n}\right| \leq \frac{|x_1| + \ldots + |x_{k-1}|}{n} + \frac{|x_k| + \ldots + |x_n|}{n}$$

$$\leq (k-1)\frac{A}{n} + (n-k+1)\frac{\in}{2n}$$

K_1 గరిష్ఠం $\left\{\frac{2(k-1)}{\in} A, K\right\}$ అనుకుంటే ప్రతి n $\geq$ k_1 కి n $\geq$ $\frac{2(k-1)A}{\in}$ $\Longrightarrow$ $\frac{(K-1)A}{n}$ $<$ $\frac{\in}{2}$ మరియు $\frac{(n-k+1)}{n}$ $<$ 1 $\Rightarrow$ $\frac{(n-k+1)}{2n}$ $<$ $\frac{\in}{2}$ + $\frac{\in}{2}$ = $\in$ కావున ప్రతి n $\geq$ k_1 కి $\left|\frac{x_1+.....+x_n}{n}\right| \leq \frac{(K-1)A}{n} + \frac{(n-k+1)\in}{2n} < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$

ఇది ప్రతి $\in$ > 0 కు వర్తిస్తుంది కనుక lim $\left(\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\right)$ = 0 మరియు (1) నుండి lim $\left(\frac{s_1+s_2+....+s_n}{n}\right) = \lim\left(\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}+l\right) = 0 + \ell = \ell$

11.6.24 సిద్ధాంతము: ప్రతి n కి $x_n > 0$ మరియు $\lim (x_n) = \ell$ అయితే $\lim ((x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n})= \ell$

ఉపపత్తి: $x_n > 0$ కనుక $\ell \geq 0$ ఇక్కడ అంకశ్రేణి, గుణశ్రేణి మధ్య సంబంధాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

$a_1, a_2, \dots\dots a_n$ అనేవి ధనపదాలు వుంటే $\frac{a_1, + a_2 + ... + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} > 0 \quad \rightarrow (1)$

సందర్భము (1) : $\ell = 0$ అనుకుంటే $\lim\left(\frac{x_1 + x_2 + ... x_n}{n}\right) = 0$

స్క్వీజ్ సిద్ధాంతాన్ని పై అసమీకరణంకి అన్వయిస్తే, $\lim (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} = 0$

సందర్భము (ii) $\ell > 0$ అయితే $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\ell}$ $\frac{1}{x_n} = y_n$ అని వ్రాయండి.

$$\Rightarrow \lim\left(\frac{y_1+.......+y_n}{n}\right) = \frac{1}{\ell} \Rightarrow \lim\left(\frac{n}{y_1+.......+y_n}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{l}\right)} = \ell$$

మరియు

$$\frac{(y_1+.......+y_n)}{n} \geq (y_1 .... y_n)^{1/n} \Rightarrow (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \geq \frac{n}{y_1+.......+y_n}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{y_1+.......+y_n} \leq (x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... x_n}{n}$$

$\lim\left(\frac{x_1 + x_2 + ... x_n}{n}\right) = \ell$ మరియు $\lim\left(\frac{n}{y_1+.......+y_1}\right) = \ell$

$\therefore$ స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము నుండి $\lim \left((x_1\ x_2\ ......\ x_n)^{1/n} \right) = l$

11.6.25 ఉదాహరణ:

$\lim a_n = 0$, (b_n) అనేది పరిబద్ధ అనుక్రమము అయితే $\lim (a_n\, b_n) = 0$ అని నిరూపించండి.

11.6.7 సిద్ధాంతము ఈ ఉదాహరణ సాధనలో ఎందుకు ఉపయోగించలేమో వివరించండి.

వివరణ: 11.6.7 సిద్ధాంతము ఉపయోగించుటకు (a_n) మరియు (b_n) రెండు అనుక్రమాలు అభిసరించాలి. కానీ ఈ ఉదాహరణలో (b_n) పరిబద్ధ అనుక్రమము మాత్రమే. ప్రతి పరిబద్ధ అనుక్రమము అభిసరిస్తుందని చెప్పలేము. కనుక 11.6.7 సిద్ధాంతమును ఈ ఉదాహరణ సాధనలో ఉపయోగించలేము. (b_n) పరిబద్ధ అనుక్రమము కనుక ప్రతి సహజసంఖ్య n కి $|b_n| < M$ అయ్యేటట్లు M వ్యవస్థితం.

(a_n) అనుక్రమము '0' కు అభిసరిస్తుంది. కనుక ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా k అనే సహజసంఖ్య, $n \geq k$ అయినప్పుడు $|a_n| < \in/M$ అయ్యేట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది. ప్రతి $n \geq k$ కి

$|a_n\ b_n| = |a_n|\ |b_n| < M\ |a_n| < M \in / M = \in$. $\in > 0$ యాదృచ్ఛికం $\in$ మీద k ఆధారపడి వుంది కనుక $\lim (a_n b_n) = 0$

11.6.26 ఉదాహరణ: $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ అయితే అనుక్రమము (y_n) మరియు $(\sqrt{n}\ y_n)$ అభిసరిస్తాయని చూపి, వాటి అవధులు కనుక్కోండి.

సాధన: $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

ప్రతి n కి, $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ మరియు $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$ కనుక $0 \leq y_n < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

(0) స్థిరానుక్రమము మరియు $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \right)$ అనుక్రమము రెండు అ సున్నకి అభిసరిస్తాయి. కనుక, స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము నుండి (y_n) అభిసరిస్తుందనీ, $\lim (y_n) = 0$ అనీ చెప్పగలము.

(ii) $\sqrt{n}\ y_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} + \sqrt{1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + 1}$

$\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim (1 + \frac{1}{n}) = 1 \qquad \Rightarrow \lim \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) = 1$

$\therefore \lim \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right) = \lim \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) + \lim 1 = 1 + 1 = 2$ కావున

$$\lim \left(\sqrt{n}\ y_n\right) = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}\right) = \frac{1}{2}$$

11.6.27 ఉదాహరణ: lim (sin n) 3 లో వ్యవస్థితం కాదని నిరూపించుము.

సాధన: lim (sin n) = ℓ వ్యవస్థితం అనుకోండి.

$$\left.\begin{aligned} &\sin (2n + 2) + \sin (2 - 2n) = 2 \cos 2n \,.\, \sin 2 \\ &\sin (2n + 3) + \sin (1 - 2n) = 2 \cos (2n + 1) \sin 2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

అనే ఫలితాలను ఇందులో ఉపయోగిస్తాము.

lim sin (1-n) = lim (-sin (n-1)) = -lim (sin (n-1)) కనుక, (1) లో అవధులు తీసుకుంటే

$2 \sin 2 \lim \cos 2n = 0 \Rightarrow \lim \cos 2n = 0$. అదేవిధంగా $\lim \cos (2n + 1) = 0$.

$\therefore \lim \cos n = 0$.

$\sin 2n = 2 \sin n \cos n$ కాబట్టి $\ell = 0$. ప్రతి n కి $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ కనుక

$1 = \lim (\sin^2 n + \cos^2 n) = \lim (\sin^2 n) + (\lim \cos^2 n) = [\lim (\sin n)]^2 + [\lim (\cos n)]^2$
$= 0 + 0 = 0$. ఇది అసంభవం కనక lim (sin n) వ్యవస్థితం కాదు.

11.6.28 ఉదాహరణ: (x_n) పరిబద్ధ, వాస్తవ అనుక్రమము అనుకుందాము.

s_n = క.ఎ.హ. $\{x_k / k \geq n\}$ మరియు S = గ.ది.హ $\{s_n / n \in$

$\angle\}$ అయితే (x_n) యొక్క వొక ఉపానుక్రమము 'S' కు అభిసరిస్తుందని చూపండి.

$s - 1 < s \leq s_1$ = క.ఎ.హ. $\{x_k : k \geq 1\}$ కనుక $s - 1 < x_{n_1}$ అయ్యేటట్లు $n_1 \geq 1$ వుంటుంది.

$s - \frac{1}{2} < s \leq s_{n_1+1}$ = క.ఎ.హ. $\{x_k : k \geq n_1 + 1\}$ కనుక

$s - \frac{1}{2} < x_{n_2}$ అయ్యేటట్లు $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ వుంటుంది.

ఈ పద్ధతి కొనసాగించిన (x_{n_k}) అనే ఉపానుక్రమాన్ని ప్రతి సహజసంఖ్య k కి

$s - \frac{1}{k} < x_{n_k}$ అయ్యేటట్లు (x_n) లో కనుగొనవచ్చును.

$\{s_n: n \in \angle\}$ కి $s + \in$ దిగువ హద్దు కాదు. కనుక, $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $s_m < s + \in$ అయ్యేట్లు m అనే ఒక సహజ సంఖ్య ఉంటుంది.

కావున $k \geq m$ అయితే $n_k \geq k \geq m$ అందుచేత $s - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq s_k < s + \in$

$\frac{1}{\in}$ మరియు m ల కంటె పెద్ద సహజసంఖ్య $k(\in)$ తీసికుంటే, $k \geq k(\in) \Rightarrow k > \frac{1}{\in}$ కనుక $\frac{1}{k} < \in$.

$\Rightarrow s - \in < s - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq s_k < s + \in$

$\Rightarrow$ ప్రతి $k \geq k(\in)$ కి $|x_{n_k} - s| < \in \Rightarrow \lim (x_{n_k}) = s$.

11.7 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు జవాబులు:

11.4.7 $n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$. అనేది సహజ సంఖ్యలతో ఖచ్చితమైన ఆరోహణ అనుక్రమము అయితే ప్రతి k కి $n_k \geq k$ అవుతుందని నిరూపించండి.

సాధన: అనుగమన సిద్ధాంతము నుపయోగించి నిరూపిస్తాము.

$k = 1$ అయితే $n_1 \geq 1$

$k = 1$ $n_k \geq k$ అనుకోండి

$n_{k+1} > n_k$ కనుక $n_{k+1} > k$. n_{k+1} కనుక $n_{k+1} \geq k + 1$

$n_1 \geq 1$ మరియు $n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k+1$ కనుక అనుగమన సిద్ధాంతము ప్రకారము

ప్రతి k కి $n_k \geq k$

11.4.8 (x_n) ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము $\Leftrightarrow$ $(-x_n)$ ఏకదిష్ట అవరోహణ అనుక్రమము

సాధన: (x_n) ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము $\Leftrightarrow$ ప్రతి $n \geq m$ కి $x_n \geq x_m$

$\Leftrightarrow$ ప్రతి $n \geq m$ కి $-x_n \leq -x_m \Leftrightarrow (-x_n)$ ఏకదిష్ట అవరోహణ అనుక్రమము.

11.4.9 (x_n) ధనపదాల అవరోహణ అనుక్రమం, $s_n = x_1 - x_2 + \ldots. + (-1)^{n-1} x_n$ అయితే ప్రతి n కి, $0 < s_{2n-2} \le s_{2n} < s_{2n+1} \le s_{2n-1} < x_1$ అని చూపుము.

లక్ష్యం: (a) ప్రతి n కి $s_{2n-2} \le s_{2n} < s_{2n+1} \le s_{2n-1}$

(b) ప్రతి n కి $s_n > 0$

(c) ప్రతి n కి $s_n < x_1$

నిర్వచనం: ప్రతి n కి $x_{n+1} \le x_n$ అయితే (x_n) అవరోహణ అనుక్రమమంటాము.

సాధన: $s_{n+1} - s_n = (-1)^n x_{n+1}$ మరియు $x_{n+1} > 0$ కాబట్టి n సరిసంఖ్య అయితే $s_{n+1} > s_n$, బేసి సంఖ్య అయితే $s_{n+1} < s_n$. అందుచేత ప్రతి n కి $s_{2n+1} > s_{2n}$ ………… (1)

$s_{n+1} - s_{n-1} = (s_{n+1} - s_n) + (s_n - s_{n-1}) = (-1)^n (x_{n+1}) + (-1)^{n-1} x_n$

$= (-1)^{n-1} (x_n - x_{n+1})$ మరియు $x_n - x_{n+1} \ge 0$ కనక ప్రతి n కి $s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n-1} (x_{2n} - x_{2n+1}) \le 0$, అనగా $s_{2n+1} \le s_{2n-1}$ ------ (2)

$s_{2n} - s_{2n-2} = (-1)^{2n-1} (x_{2n-1} - s_{2n}) \ge 0$ అనగా $s_{2n} \ge s_{2n-2}$ ………. (3)]

(1) (2) (3) ల నుండి $s_{2n-2} \le s_{2n} < s_{2n+1} \le s_{2n-1}$

$s_{2n} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \ldots. + (x_{2n-1} - x_{2n})$, ప్రతి j కి $x_{2j-1} - x_{2j} \ge 0$ కనక

$s_{2n} \ge 0$. $s_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n+1} \ge x_{2n+1} > 0$ కనక ప్రతి n కి $s_n \ge 0$ …….. (4)

$s_{2n+1} = x_1 - x_2 + \ldots\ldots + x_{2n-1} - x_{2n} + x_{2n+1}$

$= x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) \ldots\ldots\ldots (x_{2n} - x_{2n+1})$ మరియు $x_j - x_{j+1} \ge 0$ కనక

$s_{2n+1} < x_1$ …….. (5)

(1)–(5) ల నుండి ప్రతి n కి (a) (b) (c) జరుగుతాయి, అందుచేత $0 \le s_{2n-2} \le s_{2n} < s_{2n+1} \le s_{2n-1} < x_1$.

11.4.11(a) నిర్వచనం నుండి, $X = (x_n)$ పరిబద్ధతకి, ప్రతీ n కి $|x_n| \le M$ అనగా $-M \le x_n \le M$ అయ్యేటట్లుగా 3 లో M వుండడాన్కి తుల్యము. అందుచేత (x_n) పరిబద్ధమై ప్రతీ n కి $|x_n| \le M$ అయితే $\alpha = -M$, $\beta = M$ గా తీసికోవచ్చును. విలోమంగా ప్రతీ n కి $\alpha \le x_n \le \beta$ అయితే $-M \le \alpha \le \beta \le M$ అయ్యేటట్లుగా M ఎంపిక చేసికొంటే M గరిష్ఠం $\{\beta, - \alpha\}$) కాబట్టి ప్రతీ n కి $|x_n| \le M$ కాబట్టి $X = (x_n)$ పరిబద్ధము.

(b) $X = (x_n)$ ఆరోహణ అనుక్రమం అయితే $m \geq n \Rightarrow x_m \geq x_n$. $n = 1$ అయినప్పుడు $x_m \geq x_1$ ప్రతీ m కి $x_n \geq x_1$ ఇట్లే $X = (x_n)$ అవరోహణ అనుక్రమమైతే $m \geq n \Rightarrow x_m \leq x_1$.

11.4.13 $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ అనుకోండి $n \geq m$ అయితే $x_n \geq x_m$ మరియు $y_n \geq y_m$ కాబట్టి $x_n + y_n \geq x_m + y_m$ అందుచేత X + Y ఆరోహణ అనుక్రమం.

$c > 0$, $n \geq m$ అయితే $c\, x_n \geq c\, x_m$ కాబట్టి c X ఆరోహణ అనుక్రమం.

11.4.14 $x_n = n$, $X = (x_n)$ అయితే $n < m \Rightarrow x_n < x_m$ కాబట్టి X శుద్ధ ఆరోహణ అనుక్రమం. ప్రతీ n కి $y_n = -1$, $Y = (y_n)$ అయితే Y ఆరోహణ అనుక్రమం. $X\,Y = (x_n\, y_n) = (-n)$, $n > m$ అయితే $X_n\, Y_n = -n < -m = x_m\, y_m$ కాబట్టి X Y ఆరోహణ అనుక్రమం కాదు.

11.4.15. ప్రతీ n కి $x_n = n$, $X = (x_n)$ అయితే X ఆరోహణ అనుక్రమం.

$y_1 = y_2 = -1$, $n > 2$ అయినప్పుడు $y_n = -4$ అయితే $Y = (y_n)$ అవరోహణ అనుక్రమం.

$X + Y = (1 – 1, 2 – 1, 3 – 4, 4 – 4, 5 – 4, \ldots\ldots) = (0, 1, -1, 0, 1, 2, \ldots.)$

$x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ మరియు $x_3 + y_3 < y_2 + y_2$ కాబట్టి X + Y ఆరోహణం కాదు, మరియు అవరోహణం కాదు.

$Y^1 = - Y = (-y_n))$ ఆరోహణం (Y అవరోహణం కాబట్టి)

X, Y_1 ఏకదిష్ట అనుక్రమాలైనప్పట్టికి , పైన చేసినదాన్ని బట్టి $X – Y^1 = X + Y$ ఏకదిష్ఠం కాదు.

$X = (x_n)$ ఆరోహణం, $c \geq 0$ అయితే $n \geq m$ అయినప్పుడు $x_n \geq x_m$ అందుచేత $c\, x_n \geq c\, x_m$ కాబట్టి c X ఆరోహణం, కావున ఏకదిష్టం. $c < 0$ అయితే c X అవరోహణం, అందుచేత ఏకదిష్టం. దీన్నించి X ఆరోహణమైతే c X ఏకదిష్ఠమనీ అందుచే X ఏకదిష్ఠమైతే c X ఏకదిష్ఠమనీ స్పష్ఠమౌతోంది.

11.4.16 $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$, $Z = X + Y = (z_n)$ అనుకుంటే $z_n = x_n + y_n$. X, Y పరిబద్ధాలైతే 3 లో M_1, M_2. ప్రతీ n కి $|x_n| \leq M_1$, $|y_n| \leq M_2$ అయ్యేటట్లు వుంటాయి.

కనుక $|z_n| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq M_1 + M_2$

ప్రతీ n కి $|z_n| \leq M_1 + M_2$ కాబట్టి Z పరిబద్ధ అనుక్రమం. ఇదేవిధంగా X–Y పరిబద్ధమని చూపవచ్చును. $|cx_n| = |c|\,|x_n| \leq |c|\,M_1$ కాబట్టి cX పరిబద్ధం.

11.4.17. X, Y, M_1, M_2 పై 11.4.16 లో వలె తీసికొని ప్రతీ n కి $Z_n = x_n\, y_n$, $Z = (z_n)$ అని వ్రాస్తే ప్రతీ n కి $|Z_n| = |x_n\, y_n| = |x_n|\,|y_n| \leq M_1\, M_2$ కాబట్టి Z పరిబద్ధము.

11.5.3 $\lim x_n = x$ కాబట్టి ప్రతీ ధనసంఖ్య $\in$ కి అనురూపంగా వొక $k(\in)$, $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - x| < \in$ అయ్యేటట్లుగా వుంటుంది. $|x_n - x| < \in$ అయితే $|x_n - x| \leq \in$ కాబట్టి, $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - x| \leq \in$ అనే నియమం $k(\in)$ పాటిస్తుంది.

విలోమంగా ప్రతీ $\in$ కి విపర్యయ ధర్మం జరిగితే $\frac{\in}{2}$ కి అనురూపంగా ఒక $k(\in)$, $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - x| \leq \frac{\in}{2}$ అయ్యేటట్లుగా వుంటుంది. $|x_n - x| \leq \frac{\in}{2}$ అయితే $|x_n - x| < \in$ కాబట్టి ప్రతీ $\in > 0$ కి లభించే $k(\in)$, $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - x| < \in$ నియమాన్ని పాటిస్తుంది. అందుచేత $\lim (x_n) = x$

11.5.15 $\lim (x_{2n}) = \lim (x_{2n-1}) = \ell$ అనుకోండి

$\in > 0$ కి అనుగుణంగా k_1, k_2 సహసంఖ్యలు

$(2n-1) \geq k_2$ అయితే $|x_{2n} - \ell| < \in$ ----- (1)

$(2n-1) \geq k_2$ అయితే $|x_{2n-1} - \ell| < \in$ ----- (2) అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం

$k(\in) =$ గరిష్టం $\{k_1, k_2\}$ అనుకోండి

$n \geq k(\in)$ అయితే $n \geq k_1$ మరియు $n \geq k_2$ కనక n సరిసంఖ్య అయితే (1) నుండి n బేసిసంఖ్య అయితే (2) నుండి $|x_n - \ell| < \in$ కాబట్టి $n \geq k(\in)$ అయినప్పుడు $|x_n - \ell| < \in$. $\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కనుక $\lim (x_n)$ వ్యవస్థితం మరియు $\lim (x_n) = \ell$.

11.5.15.: $\lim (-1)^n x_n = \ell$ అనుకుందాము. $\Rightarrow \lim (|(-1)^n x_n|) = |\ell|$

ప్రతి n కి $x_n \geq 0$ కనుక $\lim x_n = |\ell|$

$(-1)^{2n} x_{2n} = x_{2n}$ మరియు $(-1)^{2n-1} x_{2n-1} = - x_{2n-1}$

కనుక (x_{2n}) మరియు (x_{2n-1}) అనుక్రమాలు $((-1)^n x_n)$ అనుక్రమానికి ఉపానుక్రమాలు అవుతాయి.

$\lim (x_{2n}) = \lim (-x_{2n-1}) = \ell \Rightarrow \lim (x_{2n}) = \ell = - \lim (x_{2n-1})$.

ప్రతి n కి $x_{2n} \geq 0$ కనుక $\ell \geq 0$ $\rightarrow$ (1)

$x_{2n-1} \geq 0$ కనుక $\lim (x_{2n-1}) = - \ell \geq 0$ $\rightarrow$ (2)

(1), (2) నుండి $\ell = 0$

11.5.16. ప్రతి n కి $|y_n - x| = |y_n - x_n + x_n - x| \leq |y_n - x_n| + |x_n - x|$

ప్రతి $\in > 0$ అనుగుణంగా k_1, k_2 అనే సహజసంఖ్యలు, $n \geq k_1$ అయితే $|y_n - x_n| < \frac{\in}{2}$ మరియు

$n \geq k_2$ అయితే $|x_n - x| < \frac{\in}{2}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం $k(\in) =$ గరిష్ట $\{k_1, k_2\}$ అనుకుంటే $n \geq k(\in)$

$\Rightarrow n \geq k_1$, $n \geq k_2$ మరియు $|y_n - x| \leq |y_n - x_n| + |x_n - x| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$.

$\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కాబట్టి (y_n) అభిసరిస్తుంది, $\lim (y_n) = x$

11.5.17 $\lim (x_n) = \ell$ అయితే 11.5.12 నుండి (x_n) లోని ప్రతి ఉపానుక్రమం ℓ కి అభిసరిస్తుంది. అందుచేత మన నియమం పాటించేందుకు ఉపఅనుక్రమము సరిపోతుంది. విలోమంగా $\lim (x_n) \neq \ell$ అనుకోండి. ఒక ధనసంఖ్య $\in_0$ కింది లక్షణంతో వుంటుంది. ప్రతీ k కి ఒక n_k, $n_k > n_{k-1} \geq k$ మరియు $|x_{n_k} - \ell| \geq \in_0$ దొరకును. . . . . (1)

ఈ వుపఅనుక్రమంలోని ఏ వుపానుక్రమమూ ℓ కి అభిసరించదు. ఎందుకనగా వొక వుపఅనుక్రమాన్కి అవధి ℓ అయితే అనంత సంఖ్యాకమైన n_k లకి (1) జరగదు. $|x_{n_k} - \ell| < \in_0$ కావలె కాబట్టి) ఇది (1) కి విరుద్ధం కాబట్టి విపర్యయం సత్యము.

11.6.11 $X = (x_r)$ అనుక్రమము $X_1 = \ldots\ldots\ldots.. = X_r = X$ మరియు $X^r = X_1 X_2 \ldots. X_r$ అయితే

$X^r = (x_n^r)$ lim (X_1) = lim (X_2) = …. = lim (X_2) = lim X = x కనుక lim (x_n^r) = lim X^r = lim X_1 . lim X_2 …. Lim $X_r = (\lim X)^r$

11.6.12 r సహజసంఖ్య, $b_0 \neq 0$ అయితే

$$\frac{a_0 n^r + ... + a_r}{b_0 n^r + ... + b_r} = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_r}{n^r}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_r}{n^r}}$$

ప్రతి k కి $\lim \frac{1}{n} = 0 \lim \frac{1}{n^k} = 0$ కనుక

$$\lim \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_r}{n^r} \right) = \lim (a_0) + \lim \left(\frac{a_1}{n} \right) + ... + \lim \left(\frac{a_r}{n^r} \right)$$

$$= a_0 + a_1 . \lim (\frac{1}{n}) + ... + a^r \lim (\frac{1}{n^r}) = a_0$$

ఇదేవిధంగా

$$\lim \left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b2}{n^2} + ... + \frac{b_r}{n^r} \right) = b_0$$

$$\therefore \lim \left(\frac{a_0 n^r + ... + a_r}{b_0 n^r + ... + b_r} \right) = \frac{a_0}{b_0}$$

11.6.13 $a_0 n^r + \dots a_r = n^r \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_r}{n^r} \right)$

$$b_0 n^r + \dots b_r = n^r \left(b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_r}{n^r} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{a_0 n^r + ... + a_r}{b_0 n^r + ... + b_r} = \frac{1}{n^{s-r}} \left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_r}{n^r}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_r}{n^r}} \right)$$

$$\Rightarrow \lim \left(\frac{a_0 n^r + ... + a_r}{b_0 n^r + ... + b_r} \right) = \lim \frac{1}{n^{s-r}} \left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + a_r \frac{1}{n^r}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + b_r \frac{1}{n^r}} \right)$$

$\lim \frac{1}{n^{s-r}} = 0$ మరియు $\lim \left(\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + ... + \frac{a_r}{n^r}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + ... + \frac{b_r}{n^r}} \right) = \frac{a_0}{b_0}$

$$\therefore \lim \left(\frac{a_0 n^r + ... + a_r}{b_0 n^r + ... + b_r} \right) = 0.\ \frac{a_0}{b_0} = 0.$$

11.6.22 (x_n) ధనవాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమము

$\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = L > 1$ అయితే (x_n) పరిబద్ధము కాదు కనుక అది అభిసరించదు

సాధన: $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = L > 1$ కాబట్టి $L > L^1 > 1$ అయ్యేట్లు L^1 ఎన్నిక చేసుకొని

$\in = L - L^1 > 0$ కి అనుగుణంగా ప్రతి $n \geq k$ కి $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \in$ అయ్యేట్లు k ఉంటుంది.

ప్రతి $n \geq k$ కి $n \geq k,\ L - \in < \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \in \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > L^1$

ప్రతి $n \geq k$ కి $x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} . \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} .... \frac{x_{k+1}}{x_k} . x_k > (L^1)^{n-k-1} . x_k = (L^1)^n \frac{x_k}{(L^1)^{k+1}}$

$L^1 > 1$ కనుక, $((L^1)^n)$ అపరిబద్ధము మరియు $\frac{x_k}{(L^1)^{k+1}}$ ధనాత్మక స్థిరాంకము

$\therefore (x_n)$ అపరిబద్ధము $\Rightarrow (x_n)$ అపసరిస్తుంది.

11.8 సారాంశము:

ఈ పాఠ్యాంశము పరిశీలనగా చదివిన తర్వాత విద్యార్థికి, అనుక్రమాల అభిసరణ, అపసరణ, వాటికి సం బంధించిన విషయాల మీద అవగాహన కలుగుతుంది.

11.9 సాంకేతికపదాలు :

1. అనుక్రమము, 2. అభిసరణ, 3. అభిసరించే అనుక్రమము, 4. అవధి, 5. అపసరణ

11.10. అభ్యాసములు:

1) $X = (x_n)$ అనుక్రమాలలో మొదటి అయిదు పదాలు వ్రాయండి.

(a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (b) $x_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ (c) $\frac{1}{n^2 + n + 1}$

d) $x_1 = 1$, ప్రతి n కి $x_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$

e) $x_{n+2} = x_n . x_{n+1}$ అయి, $x_1 = x_2 = 1$

f) $y_1 = 1, y_{n+1} = 3y_n +1$

g) $z_1 = 1, z_2 = 2; z_{n+2} = \frac{z_{n+1} + z_n}{z_{n+1} - z_n}$

h) $t_1 = 3; t_2 = 5$ మరియు $t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$

2) క్రింది అనుక్రమాలలో ఏవి ఏకదిష్టం? ఏవి పరిబద్ధ అనుక్రమాలు.

a) $x_n = \frac{n}{n+1}$ b) $x_n = (-1)^n . \frac{n}{n+1}$ c) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$ d) $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

3) a) సహజ సంఖ్యా సమితిలో, సరిసంఖ్యల అనుక్రమాన్ని అనుగమనం ద్వారా నిర్వచించండి.

b) సహజ సంఖ్యా సమితిలో, బేసి సంఖ్యల అనుక్రమాన్ని అనుగమనం ద్వారా నిర్వచించండి.

4) పూర్ణాంక సమితిని ఒక అనుక్రమంగా ఏర్పాటు చేయండి.

5) క్రింది అనుక్రమాల n పదాన్కి సూత్రం వ్రాయండి.

a) 0, 4, 0, 8, 0, 12, …. b) 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ….

6) (f_n) అనేది ఫిబొనేసి అనుక్రమం అయి, α అనేది "స్వర్ణ సంఖ్య" $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ అయితే 1) $1.5\ \alpha < 2$; 2) $\alpha^2 = \alpha + 1$, 3) ప్రతి n కి $\alpha < f_{n+1}$ అని నిరూపించండి.

7) $b \in 3$ అయితే $\lim \left(\frac{b}{n}\right) = 0$ అని నిరూపించండి.

8) అవధి నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించి, క్రిందివి నిరూపించండి.

a) $\lim \frac{n^2}{n+1} = 0$ b) $\lim \frac{2n}{n+1} = 2$ c) $\lim \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$

d) $\lim \frac{2n}{n+2} = 2$ e) $\lim (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0$ f) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+5}} = 0$

9) $x_n = \frac{1}{ln\,(n+1)}$ అయితే $\lim (x_n) = 0$ అని చూపి, $\in =$

$\frac{1}{2}$ విలువకు అనుగుణంగా ప్రతి $n \geq k(\in)$ కి $x_n < \in$ అయ్యేట్లు $k(\in)$ ని కనుక్కోండి.

10) $\lim (x_n) = \ell \Rightarrow \lim |x_n| = |\ \ell\ |$ అని నిరూపించండి.

11) $\lim (-1)^n$ వ్యవస్థితం అవదని నిరూపించండి.

12) ప్రతి n కి $x_n > 0$ అయి $\lim (x_n) = 0$ అయితే $\lim (\sqrt{x_n}) = 0$ అని చూపండి.

13) $\lim (x_n) = 0$ అయితే $\lim (x_n^2) = 0$ అని చూపండి.

14) $\lim \left(\frac{1}{3^n}\right) = 0$ అని చూపండి

15) $\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0$ అని చూపండి

16) $\lim (a_n) = \ell$ మరియు $b_n = a_n - a_{n+1}$ అయితే $\lim (b_n) = 0$ అని నిరూపించండి.

17) $\lim\limits_{n} (2n)^{1/n}$ విలువను రాబట్టండి.

18) $0 < a < 1$ అయితే $\lim n^2 a^n$ కనుగొనండి.

19) $\lim \frac{n^2}{n!} = 0$ అని చూపండి.

20) కింది అసమతులలో ప్రతీ దానిని తృప్తిపరిచే అతి చిన్న సహజసంఖ్య n కనుగొనండి.

a) $\frac{n^2}{n^2+1} < 0.001$ b) $\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} < 0.0001$ c) $n^2 + (-1)^n 2n > 1000$

21) $\lim (x_{n+1} - x_n) = \ell$ అయ్యే అనుక్రమం (x_n) కి $\lim \frac{x_n}{n} = \ell$ అని చూపండి.

22) $x_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$ అయితే $\lim \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{2}$ అని నిరూపించండి.

23) a) a, b అనే వాస్తవ సంఖ్యలయితే $a \wedge b = -(-a \vee -b)$ అని చూపండి

b) $\lim (x_n) = x$, $\lim (y_n) = y$ అయితే $\lim (x_n \wedge y_n) = x \wedge y$

24) క్రింది అనుక్రమాల అభిసరణ లేదా అపసరణ పరిశీలించండి.

(i) $\frac{n}{n+n^2}$, (ii) $\frac{(-1)^n n^2}{n+1}$, (iii) $\frac{n^2}{n+n^2}$ (iv) $\frac{2n^2+3}{n^2+1}$

25) ప్రతి n కి $x_n = n$ మరియు $X = (x_n)$, $Y = (-x_n)$ అయితే X, Y లు అపసరిస్తాయి. కానీ X + Y అభిసరిస్తుందని నిరూపించండి.

26) ప్రతి $n \geq 1$ కి $x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = - y_n$ అయి, $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ అయితే X, Y లు అపసరిస్తాయనీ చూపి X.

Y అనుక్రమం యొక్క అభిసరణ లేదా అపసరణని నిర్ధారించండి.

27) X, X+Y అనుక్రమాలు అభిసరిస్తే, అనుక్రమం Y అభిసరిస్తుందని చూపండి.

28) X, Y అనుక్రమాలలో, X, X. Y లు అభిసరిస్తూ, lim X $\neq$ 0 అయితే Y అభిసరిస్తుందని నిరూపించండి.

29) a) (2^n) పరిబద్ధం కాదు అనీ, అపసరిస్తుందని చూపండి

b) ($(-1)^n n^2$ అపసరిస్తుందనీ నిరూపించండి.

30) క్రింది అనుక్రమాల అవధులు రాబట్టండి.

a) $\left(2+\frac{1}{n^2}\right)$ b) $\frac{(-1)^n}{n+2}$ c) $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ d) $\frac{n+1}{n\sqrt{n}}$

31) $\lim (3\sqrt{n})^{1/2n} = 1$ అని చూపండి.

(సూచన: $\left(3\sqrt{n}\right)^{1/2n} = \left(\sqrt{3}\right)^{1/n} . \left(n^{1/n}\right)^{1/2}$)

b) $\lim (n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}} = e$ అని చూపండి. (సూచన: $\ln (n+1) = a_n$ అనుకోండి.)

32) $0 < a < 1$, $x_n = a^n$ అయితే $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ కనుక్కొని దాని నుండి $\lim (a^n) = 0$ అని రాబట్టండి.

33) క్రింది అనుక్రమాల అవధి కనుక్కోండి.

a) $\frac{b^n}{2^n}$ b) $\frac{n}{2^n}$ c) $\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

34) $x_n = \frac{1}{n}$ అయితే $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ మరియు $\lim (x_n)$ కనుక్కోండి.

35) $x_n = n$ అయితే $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ మరియు $\lim (x_n)$ కనుక్కోండి.

36) a) $\lim (x_n) = L < 1$ అయితే, ప్రతి $n \ge k$ కి, $x_n < 1$ అయ్యేట్లు k లో వుంటుందని చూపండి.

b) $0 < r < 1$ $\lim \left(x_n^{1/n}\right) = L < 1$ $x_n>0$ అయితే, ప్రతి $n \ge k$ కి, $0<x_n<r^n$ అయ్యేటట్లు k అనే సహజసంఖ్య వుటుందని నిరూపించండి.

c) (x_n) ధనపదాల వాస్తవానుక్రమం $\lim \left(x_n^{1/n}\right) = L < 1$ అయితే $\lim x_n =$ 0 అని నిరూపించండి.

37) (13) (c) లో $L = 1$ అయితే $\lim (x_n) = 0$ కానక్కర్లేదని కింది అనుక్రమాల ద్వారా చూపండి.

a) $x_n = n$, $\lim \left(x_n^{1/n}\right) = 1$ కానీ $\lim (x_n) = \infty$

b) $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim \left(x_n^{\frac{1}{n}}\right) = 1$ కానీ $\lim (x_n) = 0$.

38) $r > 0$ అయితే $\lim\limits_{n} \left(\frac{1}{(n+1)^r} + ... + \frac{1}{(n+n)^r}\right) = 0$

39) p(x) బహుపది, $s_n = p\left(\frac{1}{n}\right)$ అయితే $\lim (s_n) = 0$ అని చూపండి.

11.11. సమాధానములు

1) a. $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \frac{1}{5.6}$ లేక $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$

b. $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}$ c. $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{13}, \frac{1}{21}, \frac{1}{31}$

d. $x_{n+1} = x_n^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1$.

e. $x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1$.

f. $y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 13, y_4 = 40, y_5 = 121$

g. $z_3 = \frac{1+2}{2-1} = 3$, $z_4 = \frac{3+2}{3-2} = 5$, $z_5 = \frac{5+3}{5-3} = 4$

h. $t_3 = 8, t_4 = 13, t_5 = 21$.

2) a) ఏకదిష్ట ఆరోహణము చెందుతుంది. b) ఏకదిష్టము కాదు

c) ఏకదిష్ట ఆరోహణము చెందుతుంది. $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1\right)$ d) ఏకాదిష్టము కాదు.

3) a) $x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + 2$

b) $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + 2$

4) $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \ldots\ldots\}$ $x_1 = 0, x_{2n} = n, x_{2n+1} = -x_{2n}$

5) a. $x_{2n} = 4n, x_{2n-1} = 0.$

b. $n \geq 0$ లేక $n \in \angle$ కి $x_{3n+1} = 1$ మిగిలిన విలువలకు $x_n = 0$

17) 1 (20) : (a) 100 (b) 1 (c) 32

24) (i) 0 (ii) అభిసరిస్తుంది (iii) 1 (iv) 2

26) 0 కి అభిసరిస్తుంది

3) $N_\in \geq 9$

11) 1 12. 0

30) (a) 2 (b) 0 (c) 1 (d) 0

32) a 33.a) 0 b) 0 c) 0

34) 1000 35) 1000

11.12 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. (x_n) వాస్తవానుక్రమము. $x \in$ 3. $\lim (a_n) = 0$ అయ్యేట్లు (a_n) అనేది ధనపదాల వాస్తవ అనుక్రమము. $c>0$ ఏదైనా స్థిర సంఖ్య. $n \geq m$ కి $|x_n - x| \leq c\, a_n$ అయితే $\lim (x_n) = x$ అని చూపండి.

2. $\lim \left(\frac{n^2}{n!}\right) = 0$ అని నిరూపించండి.

3. (x_n), (y_n), (z_n) వాస్తవానుక్రమాలు. ప్రతి n కి $x_n \leq y_n \leq z_n$ మరియు $\lim (x_n) = \lim (z_n)$ అయితే $\lim (y_n) = \lim (z_n) = \lim (x_n)$ మరియు (y_n) అనుక్రమం అభిసరిస్తుందని చూపండి.

4. $\lim \left(\frac{\sin n}{n} \right) = 0$ అని చూపండి.

5. (x_n) ధనపదాల వాస్తవానుక్రమము. $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = L$ వ్యవస్థితం.

   $L < 1$ అయితే, (x_n) అభిసరిస్తుందనీ, $\lim (x_n) = 0$ అనీ నిరూపించండి.

6. $a > 0, b > 0$ అయితే $\lim (\sqrt{(x + a)(x + b)} - n) = \frac{a + b}{2}$ అని చూపండి.

7. $0 < a < b$ కి, $z_n = (a^n + b^n)^{1/n}$ అయితే $\lim (z_n) = b$ అని చూపండి.

11.13 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య:

సమస్య: $x_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n), (n \in N)$ మరియు $s_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ అనుకొనుము

(i) $\lim (x_{2n})$ వ్యవస్థితమవుతుందా?

(ii) $\lim (x_{2n-1})$ వ్యవస్థితమవుతుందా?

(iii) $\lim (x_n)$ వ్యవస్థితమవుతుందా?

(iv) $\lim (s_n)$ వ్యవస్థితమవుతుందా?

ఉద్దేశ్యము: పైన పేర్కొన్న అవధుల వ్యవస్థితను నిర్ధారించుట.

నిర్వచనము: ప్రతి ధనాత్మక సంఖ్య $\in$ కు $n \geq N_{\in}$ అయినప్పుడు $|a_n - a| < \in$ అగునట్లుగా $a \in 3$ వ్యవస్థితమయితే (a_n) అనుక్రమము 3 లో అభిసరిస్తుంది.

ఇక్కడ $\{a_n\}$ అనుక్రమము a కు అభిసరిస్తుందని చెప్తాము. (a_n) యొక్క అవధి a అవుతుంది మరియు $\lim (a_n) = a$ గా వ్రాస్తాము. $\lim (a_n) = a$ అయ్యేటట్లుగా $a \in 3$ వ్యవస్థితమైతే $\lim a_n$ వ్యవస్థితమని అంటాము.

ఉపయోగించిన ఫలితములు: (i) $\lim (a_n) = a$ అయ్యేటట్లుగా 3 లో (a_n) ఒక అనుక్రమం అయితే (a_n) లోని ప్రతి ఉపానుక్రమాల (b_n) కు $\lim(b_{n-})$ వ్యవస్థితము మరియు $\lim (b_n) = a$.

(ii) $k \in 3$ కు ప్రతి n కు $a_n = k$ అయితే $\lim a_n = k$

(iii) $\lim \frac{1}{n} = 0.$

(iv) $\lim (a_{2n}) = \lim (a_{2n-1}) = a$ అయితే $\lim (a_n) = a$

సాధన: (i) ప్రతీ n కి $x_{2n} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{2n}) = \frac{1+1}{2} = 1$

(ii) : ప్రతీ n కి $x_{2n-1} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{2n-1}) = \frac{1-1}{2} = 0$

ఫలితము (i), (ii) ల నుండి $\lim (x_{2n}) = 1$ మరియు $\lim (x_{2n-1}) = 0$

(iii) : ఫలితము (i) నుండి $\lim (x_n)$ వ్యవస్థితము కాదు

(iv) $s_{2n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{0 + 1 + 0 + 1 + ... + 0 + 1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

$s_{2n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{2n-1}}{2n-1} = \frac{0 + 1 + 0 + 1 + \ .... + 1 + 0}{2n-1} = \frac{n-1}{2n-1}$

$$\lim s_{2n-1} = \lim \left(\frac{n-1}{2n-1}\right) = \lim \frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

ఫలితము (ii) నుండి $\lim s_{2n} = \frac{1}{2}$, ఫలితము (iv) నుండి $\lim s_n = \frac{1}{2}$

$\therefore \lim (s_n) = \frac{1}{2}$

రచయిత : ఐ. రామభద్రశర్మ

అగస్టిన్ కౌషీ (1789 - 1857):

వాస్తవ మరియు సంకీర్ణ విశ్లేషణ మరియు ప్రస్తార సమూహాల అధ్యయనానికి కౌషీ మార్గదర్శకుడు. ఆయన అనంత శ్రేణిల అభిసరణ మరియు అపసరణ, అవకలన సమీకరణములు, నిర్ధారకములు, సంభావ్యత మరియు గణితీయ భౌతిక శాస్త్రములలో పరిశోధనలు చేసారు.

పాఠము - 12

అనుక్రమాలు - II

12.1 లక్ష్యం:

ఏకదిష్ఠ అనుక్రమాలు, పరిబద్ధ అనుక్రమాలు యిత్యాది ముఖ్యమైన అనుక్రమాల తరగతులను విద్యార్థికి పరిచయం చేయు కోషీ అభిసరణ శుద్ధ అపసరణ భావాలను, బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతాన్ని చర్చించడం ఈ పాఠం ప్రధాన లక్ష్యం.

12.2 అంశాలక్రమము:

12.3 **ఉపోద్ఘాతం**

12.4 **ఏకదిష్ఠ అనుక్రమాలు**

12.5 **బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ నియమం**

12.6 **కోషీ అభిసరణ**

12.7 **శుద్ధ అపసరణ**

12.8 **స్వయం సాధక ప్రశ్నలకి జవాబులు**

12.9 **సారాంశం**

12.10 **సాంకేతిక పదాలు**

12.11 **అభ్యాసాలు**

12.12 **జవాబులు**

12.13 **మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు**

12.14 **మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య - సాధన**

12.3 ఉపోద్ఘాతం:

అనుక్రమాలలో సరళమైనవైనప్పటికీ అత్యంత ప్రధానమైన ఏకదిష్ఠ అనుక్రమాల లక్షణాల అధ్యయనంతో ఈ పాఠం ప్రారంభిస్తాము. ఏకదిష్ఠత మిక్కిలి కట్టడి చేసే నియమం అనుక్రమాలలో ఇట్టివి చాలా చిన్న సమితిగా ఏర్పడతాయి. వీటి అభిసరణ అపసరణల గురించి చర్చిస్తాము.

కొన్ని అనుక్రమాలు అవధితో పని లేకుండా అభిసరణ చెందుతాయని తెలిస్తే చాలు. ఇట్టి సందర్భాలలో అందుబాటుగా వుండే కోషీ అభిసరణ సూత్రం, పరిబద్ధ అనుక్రమాల బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ లక్షణం మరియు సంకోచిత అనుక్రమాలు వాటి ఉదాహరణలు, కోషీ అభిసరణ సూత్రం ఉపయోగించి వాటి అభిసరణ యిత్యాది పలు అంశాలను యిక్కడ చర్చిస్తాము.

12.4 ఏకదిష్ఠ అనుక్రమాలు:

ముందుగా ఏకదిష్ఠ అనుక్రమం నిర్వచనాన్ని గుర్తు చేసుకొందాము. $X=(x_n)$ అనుక్రమం. $m \ge n$ అయినప్పుడు $x_m \ge x_n$ అయితే (x_n) ఆరోహణ అనుక్రమమని $m \ge n$ అయినప్పుడు $x_m \le x_n$ అయితే X అవరోహణ అనుక్రమమని, X ఆరోహణం కాని అవరోహణం కాని అయితే ఏకదిష్ట అనుక్రమమనీ అంటాము.

12.4.1 ఏకదిష్ఠ అభిసరణ సిద్ధాంతం: ఏకదిష్ఠ వాస్తవ అనుక్రం అభిసరణ చెందుటకు తుల్యం పరిబద్ధం కావడం $X=(x_n)$ పరిబద్ధమై

(a) ఆరోహణమైతే అవధి $X=$ క.ఎ.హ. $\{x_n / n \ge 1\}$

(b) అవరోహణమైతే అవధి $X=$ గ.ది.హ. $\{x_n / n \ge 1\}$

ఉపపత్తి: $X=(x_n)$ ఏకదిష్ఠ ప్రమేయం అనుకోండి. X అభిసరణ చెందితే పరిబద్ధమని స్పష్టం. విలోమంగా X ఏకదిష్ఠం మరియు పరిబద్ధం అనుకోండి.

(a) X పరిబద్ధం కాబట్టి $\{x_n / n \ge 1\}$ సమితి పరిబద్ధం. అందుచేత ప్రతీ n కి $x_1 \le x_n \le M$ అగునట్లు ఒక ధనవాస్తవ సంఖ్య M వుంటుంది. $\{x_n / n \ge 1\}$ పై నుండి పరిబద్ధం కాబట్టి, ఈ సమితికి క.ఎ.హ. వుంటుంది. $x^* =$ క.ఎ.హ. $\{x_n / n \ge 1\}$ అని వ్రాయండి.

ప్రతి n కి $x_n \le x^*$. x^* క.ఎ.హ కాబట్టి, $\in > 0$ అయితే $x^* - \in$ ఎ.హ. కాదు. అందుచేత ఒక N కి $x^* - \in < x_N$.

X ఆరోహణ అనుక్రమం కాబట్టి $n \ge N$ అయినప్పుడు $x_n \ge x_N$. కావున $n \ge N$ అయినప్పుడు

$$x^* - \in < x_N \le x_n \le x^* < x^* + \in$$

అనగా $n \ge N$ అయినప్పుడు $\left|x^* - x_n\right| < \in$. ఇది ప్రతీ $\in > 0$ కి జరుగును కాబట్టి $\lim\limits_{n} (X) = x^*$.

(b) X అవరోహణ అనుక్రమమైన సందర్భంలో $\{x_n/n \geq 1\}$ సమితి గదిహ వ్యవస్థితం. $x_* =$ గదిహ $\{x_n/x \geq 1\}$ అని వ్రాయండి. ప్రతి n కి $x_n \geq x_*$. $\in > 0$ అయితే $x_* + \in$ ఈ సమితికి దిగువ హద్దు కాదు. అందుచేత $x_* + \in \geq x_N$ అగునట్లు ఒక N వుంటుంది. X అవరోహణ అనుక్రమం కాబట్టి $n \geq N$ అయితే $x_N \geq x_n$. కాబట్టి $n \geq N$ అయితే $x_* + \in > x_N \geq x_n \geq x_* > x_* - \in$. అనగా $n \geq N$ అయినప్పుడు $|x_n - x_*| < \in$. ఇది ప్రతీ $\in > 0$ కి జరుగును కాబట్టి $\ell\text{im}\,(X) = x_*$.

12.4.2 ఉదాహరణలు:

(1) $\ell\text{im}\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

దీనిని నేరుగా ఈ క్రింది విధంగా నిరూపించవచ్చును.

$\in > 0$ అయితే $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| < \in$ కి తుల్యం $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \in$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \in \iff \frac{1}{n} < \in^2 \iff n > \frac{1}{\in^2}$$

$k > \dfrac{1}{\in^2}$ అయ్యే సహజ సంఖ్య k తీసికొంటే, $n \geq k$ అయినప్పుడు $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| < \in$ కాబట్టి $\ell\text{im}\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

దీని నిరూపణకి ఏకదిష్ఠ అభిసరణ సిద్ధాంతం వాడవచ్చును.

$n \geq 1$ అయితే $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ కాబట్టి $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$

అందుచేత $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ఏకదిష్ఠ అవరోహణ అనుక్రమం, 0 ఒక దిగువ హద్దు, 1 ఎగువ హద్దు. $\in > 0$ అయితే $n \in \mathbb{N}$, $n > \dfrac{1}{\in^2}$ అయినప్పుడు $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \in$ కాబట్టి $\in$ దిగువ హద్దు కాదు.

అందుచేత $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}} \Big/ n \geq 1\right\}$ సమితికి గ.ది.హ. 0.

సిద్ధాంతం నుండి $\ell\text{im}\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} =$ గ.ది.హ. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}} \Big/ n \geq 1\right\} = 0$.

12.4.3 **ఉదాహరణ:** $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}$ అని వ్రాయండి. $X=(x_n)$ ఏకదిష్ఠ ఆరోహణ అపరిబద్ధ అనుక్రమము అని చూపండి.

సాధన: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1}$ కాబట్టి $x_{n+1} > x_n$.

అందుచేత ఆరోహణ అనుక్రమం (x_n) అపరిబద్ధమని x_{2^n} పరిగణించి నిరూపిద్దాము.

$$x_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$s_0 = 1, s_1 = \frac{1}{2}, 2 \le j \le n$ అయినప్పుడు $s_j = \frac{1}{2^{j-1}+1}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^j}$ అని వ్రాస్తే

$$x_{2^n} = s_0 + s_1 + \cdots\cdots + s_n$$

$2 \le j \le n$ అయితే $s_j = \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \frac{1}{2^{j-1}+k}$ $\qquad (2^j = 2^{j-1}+2^{j-1})$

$1 \le k \le 2^{j-1}$ అయితే $2^{j-1}+k \le 2^{j-1}+2^{j-1} = 2^j$ కాబట్టి

$$\frac{1}{2^{j-1}+k} > \frac{1}{2^j} \Rightarrow s_j \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \frac{1}{2^{j-1}+k} > \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \frac{1}{2^j} = \frac{2^{j-1}}{2^j} = \frac{1}{2}$$

అందుచే $s_j > \frac{1}{2}$ మరియు $x_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{n} s_j$

కాబట్టి $x_{2^n} > 1+\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{2} = 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{n}{2}+1 > \frac{n}{2}$

ప్రతి $n \ge 1$కి $x_{2^n} > \frac{n}{2}$. $\left(\frac{n}{2}\right)$ అనుక్రమం అపరిబద్ధం.

కాబట్టి (x_{2^n}) అపరిబద్ధం, కాబట్టి (x_n) అపరిబద్ధం.

(x_n) అనుక్రమం ఆరోహణమైనప్పటికీ అపరిబద్ధం. కాబట్టి అభిసరణ చెందదు.

12.4.4 ఉదాహరణ: $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+n}$ అనుకొనుము. (x_n) ఆరోహణ పరిబద్ధ అనుక్రమమనీ అందుచేత అభిసరణ చెందుతుందనీ నిరూపించుము.

సాధన: $x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n+2} = x_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \qquad (2n+2 > 2n+1)$

కాబట్టి (x_n) ఆరోహణ అనుక్రమం.

$1 \le k \le n$ అయితే $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$ కాబట్టి $0 < x_n < \frac{n}{n} = 1$.

కాబట్టి (x_n) పరిబద్ధం. (x_n) ఆరోహణ పరిబద్ధ ప్రమేయం కాబట్టి అభిసరణ చెందుతుంది.

12.4.5 S.A.Q.: $x_n = \frac{n!}{n^n}$ గా నిర్వచిస్తే (x_n) అవరోహణ అనుక్రమమనీ, ప్రతీ n కి $0 < x_n < \frac{1}{n}$ అని చూపుము మరియు $\ell im\,(x_n)$ కనుగొనుము.

12.4.6 ఉదాహరణ: $0 < b < 1$ అయితే $\ell im\ b^n = 0$ అని చూపుము.

సాధన: గణితాను గమనం నుండి $0 < b^{n+1} < b^n < 1$. అందుచేత (b^n) అవరోహణము మరియు పరిబద్ధము. ఏకదిష్ఠ అభిసరణ సిద్ధాంతం నుండి (b^n) అభిసరణ చెందును.

$\ell im\ b^n = \ell$ అనుకొనుము. (b^{2n}) ఈ అనుక్రమంలో ఉపానుక్రమం

కావున $\ell im\ b^{2n} = \ell$. $b^{2n} = (b^n)^2 \Rightarrow \ell = \ell im\,(b^{2n}) = \ell im (b^n)^2$

$= \ell im\,(b^n \cdot b^n) = (\ell im\ b^n)\ \ell im\,(b^n) = \ell \cdot \ell = \ell^2$

$\Rightarrow \ell^2 - \ell = 0 \Rightarrow \ell(\ell - 1) = 0 \Rightarrow \ell = 0$ లేదా $\ell = 1$.

ఏకదిష్ఠ అభిసరణ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\ell =$ గదిహ (b^n)

ప్రతి n కి $b^n < 1$ కాబట్టి 1 గదిహ కాదు. అందుచేత $\ell = 0$.

12.4.7 ఉదాహరణ: $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ అయితే (e_n) అనుక్రమం ఆరోహణం.

సాధన: e_n, e_{n+1}ల ద్విపద విస్తరణలలోని పదాలను పోల్చి $e_{n+1} > e_n$ అని చూపుదాము.

$$e_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+\binom{n+1}{1}\cdot\frac{1}{n+1}+\binom{n+1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\cdots\cdots\cdots+\binom{n+1}{r}\left(\frac{1}{n+1}\right)^r+\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+\binom{n}{r}\frac{1}{n^r}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^n}$$

పై విస్తరణలోని $(r+1)$ పదాలు వరుసగా $\binom{n+1}{r}\frac{1}{(n+1)^r}$ మరియు $\binom{n}{r}\frac{1}{n^r}$ ($0 \le r \le n$ అయినప్పుడు)

e_{n+1} విస్తరణలో $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ ఎక్కువగా వచ్చిన $(n+2)$ వ పదము.

$1 \le r \le n$ అయితే $\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,\frac{1}{n^r} = \frac{1}{r!}\,\frac{n(n-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}{n^r}$

$$= \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$$

$$n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{k}{n} > \frac{k}{n+1} \Rightarrow 1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1} \quad (1 \le k \le r-1)$$

కాబట్టి $\binom{n}{r}\frac{1}{n^r} < \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\cdots\cdots\left(1-\frac{r-1}{n+1}\right) = \binom{n+1}{r}\frac{1}{(n+1)^r}$

అందుచేత $1 \le r \le n$ అయినప్పుడు e_{n+1} విస్తరణలోని $(r+1)$ - పదము e_n లోని $(r+1)$ పదం కన్న పెద్దది.

అంతేకాక e_{n+1} విస్తరణలోని $(n+2)$ - పదం $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ అధికంగా వున్నందున $e_{n+1} > e_n$.

అందుచేత (e_n) ఆరోహణ అనుక్రమం.

12.4.8 స్వయం సాధన ప్రశ్న : $2 < n \in \mathbb{N}$ అయినప్పుడు $2^{n-1} < n!$ వుపయోగించి $2 < e_n < 3$ అని చూపుము.

12.4.9 స్వయం సాధన ప్రశ్న : $a > 0$, $s_1 > 0$ అయితే $s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right)$ అని నిర్వచించి, $n > 2$ అయినప్పుడు $s_{n+1} < s_n$ అనీ (s_n) ఒక ధన సంఖ్య s కి అభిసరిస్తుందనీ $s^2 = a$ అని చూపుము.

12.4.10 ఉదాహరణ: $y_1 = 1, y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$, $n \geq 1$గా వ్రాయండి. (y_n) శుద్ధ ఆరోహణ అనుక్రమమని పరిబద్ధమని చూపుము.

సాధన: $y_2 = \frac{5}{4}$ కాబట్టి $y_1 < y_2 < 2$ అని, ప్రతి $y_n > 0$ అనీ స్పష్టం.

(i) గణితానుగమనమం వాడి ప్రతీ k కి $0 < y_k < 2$ అని నిరూపిద్దాము.

$0 < y_n < 2$ అయితే $0 < 2y_n < 4$ $\Rightarrow 0 < 2y_n + 3 < 7 \Rightarrow 0 < y_{n+1} = \frac{2y_n + 3}{4} < \frac{7}{4}$

$\Rightarrow 0 < y_{n+1} < 2$. $0 < y_1 < 2$ మరియు $0 < y_n < 2$ అయితే $0 < y_{n+1} < 2$ కాబట్టి గణితానుగమనం నుండి ప్రతి n కి $0 < y_n < 2$.

(ii) గణితానుగమనం వాడి ప్రతి n కి $y_n < y_{n+1}$ అని నిరూపిద్దాము.

$0 < y_1 < y_2$ అని ముందుగానే చూశాము. $0 < y_n < y_{n+1}$ అనుకోండి.

అప్పుడు $0 < 2y_n + 3 < 2y_{n+1} + 3$, అందుచేత $0 < \frac{2y_n + 3}{4} < \frac{2y_{n+1} + 3}{4}$

అనగా $0 < y_{n+1} < y_{n+2}$.

$0 < y_1 < y_2$ అనీ, $0 < y_n < y_{n+1}$ అయితే $0 < y_{n+1} < y_{n+2}$ అని సరి చూశాము కనుక గణితానుగమనం ద్వారా ప్రతి n కి $0 < y_n < y_{n+1}$ జరుగుతుంది.

అనగా (y_n) శుద్ధ ఆరోహణ అనుక్రమం.

(y_n) శుద్ధ ఆరోహణం మరియు పరిబద్ధం కనుక అభిసరణ చెందును.

12.4.11 ఉదాహరణ: $z_1 = 1$, $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$ అని వ్రాయండి. $Z = (z_n)$ శుద్ధ ఆరోహణ మరియు పరిబద్ధ అనుక్రమమని చూపండి.

సాధన: గణితానుగమనం వాడి ఈ అంశాలు నిరూపిస్తాము.

(a) $1 \le z_n < z_{n+1}$ ప్రతి n కి జరుగునని నిరూపిద్దాము.

$z_2 = \sqrt{2z_1} = \sqrt{2} > 1 = z_1$ కాబట్టి $1 = z_1 < z_2$.

$1 < z_k < z_{k+1}$ అయితే $2 < 2z_k < 2z_{k+1}$ కాబట్టి

$\sqrt{2} < \sqrt{2z_k} < \sqrt{2z_{k+1}}$ కాబట్టి $\sqrt{2} < z_{k+1} < z_{k+2}$

$1 < \sqrt{2}$ కాబట్టి $1 < z_{k+1} < z_{k+2}$. గణితానుగమనం నుండి $\mathbb{N}$ లోని ప్రతీ n కి $1 \le z_n < z_{n+1}$.

(b) ప్రతి n కి $1 \le z_n < 2$ అని నిరూపిద్దాము. ఇది $n = 1$ అయినప్పుడు స్పష్టము.

$1 \le z_k < 2$ అనుకోండి. అప్పుడు $2 \le 2z_k < 4$ కాబట్టి $\sqrt{2} \le \sqrt{2z_k} < 2$

అందుచేత $1 \le z_{k+2} < 2$ కాబట్టి $1 \le z_{k+2} < 2$ గణితానుగమనం నుండి $\mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $1 \le z_n < 2$ అనగా (z_n) పరిబద్ధము.

12.4.12 ఉదాహరణ: $x_1 = 8$ మరియు ప్రతి n కి $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ అనుకొనుము. (x_n) పరిబద్ధము మరియు ఏకదిష్టము అని చూపుము.

సాధన: $x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2 = \frac{8}{2} + 2 = 6 < 8 = x_1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 2$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2, \quad x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + 2 \text{ కాబట్టి } x_{n+1} - x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n - x_{n+1}) \quad \cdots \quad (1)$$

గణితానుగమనం వాడి ప్రతి n కి $x_{n+1} - x_{n+2} = \frac{1}{2^n}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2^{n-1}}$ అని చూపుదాం $\quad \cdots \quad (2)$

(1)లోని n ని $(n+1)$గా మార్చిన $x_{n+2} - x_{n+3} = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_{n+2})$

(2) n కి వర్తిస్తే $x_{n+2} - x_{n+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2^{n+1}}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2^{n+1}} \; 2 = \frac{1}{2^n}$

గణితానుగమనం నుండి $\mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $x_{n+1} - x_{n+2} = \frac{1}{2^n}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2^n} > 0$

అందుచేత (x_n) శుద్ధ అవరోహణ అనుక్రమం. $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ కాబట్టి

ప్రతి n కి $x_1 > x_n > 2$, అందుచేత (x_n) పరిబద్ధము, $2 \le x_n \le 8 \ (n \in \mathbb{N})$.

12.4.13 ఉదాహరణ: $x_1 > 1$, ప్రతి n కి $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ అయితే (x_n) పరిబద్ధము మరియు ఏకదిష్టము అని చూపుము.

$$x_2 = 2 - \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_2 - x_1 = 2 - \frac{1}{x_1} - x_1 = -\left(x_1 - 2 + \frac{1}{x_1}\right)$$

కాబట్టి $x_2 - x_1 = -\left(\sqrt{x_1} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2 \le 0$. అందుచేత $x_2 < x_1$.

గణితానుగమనం వాడి ప్రతి n కి $x_{n+1} < x_n$ అని చూపుదాము. $x_2 < x_1$ అని నిరూపించడం జరిగింది కదా! $k \in \mathbb{N}$,

$0 < x_{k+1} < x_k < 2$ అయితే $0 < \frac{1}{x_k} < \frac{1}{x_{k+1}}$ కాబట్టి $2 - \frac{1}{x_{k+1}} < 2 - \frac{1}{x_k}$

అందుచేత $0 < x_{k+2} < x_k < 2$ కనుక గణితానుగమనం నుంచి $x_{n+1} < x_n < 2$

ప్రతి n కి $1 < x_n$ అని నిరూపిస్తే $1 < x_n < x_1$ కాబట్టి (x_n) పరిబద్ధమౌతుంది.

$x_2 = 2 - \frac{1}{x_1} > 2 - 1 = 1$ అని స్పష్టము. $x_k > 1$ అయితే $\frac{1}{x_k} < 1$ కాబట్టి

$2 - \frac{1}{x_k} > 2 - 1 = 1$ అనగా $x_{k+1} > 1$. గణితానుగమనం నుండి ప్రతి n కి $x_n > 1$ అందుచేత (x_n) పరిబద్ధము.

12.4.14 ఉదాహరణ: $\mathbb{R}$ లో A ఎగువ నుండి పరిబద్ధ సమితి, u = క.ఎ.హ. A అయితే u కి అభిసరించేలా A లో ఒక ఆరోహణ అనుక్రమం (x_n) వుంటుందని చూపండి.

సాధన: A లో u వుంటే ప్రతి n కి $x_n = u$ గా తీసికొనవచ్చును. A లో u వుండనప్పుడు $y_1 = u - 1 < u$ కాబట్టి y_1, A కి ఎ.హ. కాదు, అందుచేత $y_1 < x_1 \le u$ అగునట్లు A లో x_1 లభిస్తుంది.

$u \notin A$, $x_1 \in A$ కాబట్టి $u \neq x_1$ అందుచేత $y_1 < x_1 < u$.

$y_2 =$ గరిష్ఠ $\left(u - \frac{1}{2}, x_1\right)$ అనుకొనుము. $y_2 < u$ కాబట్టి పై రీతిగా $y_2 < x_2 < u$ అగునట్లు A లో x_2 లభిస్తుంది. ఈ పద్ధతి కొనసాగించి, $x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}$ లను పొంది $y_n =$ గరిష్ఠం $\left(u - \frac{1}{n}, x_{n-1}\right)$ అని వ్రాద్దాము.

$u - \frac{1}{n} < u, x_{n-1} < u$ కాబట్టి $y_n < u$ అందుచేత పై మాదిరిగా $y_n < x_n < u$ అగునట్లు A లో x_n లభిస్తుంది.

A అనంత సమితి కాబట్టి ఈ పద్ధతి అనంతంగా కొనసాగగలదు. ఈ పద్ధతి ద్వారా A లో అనుక్రమాలు (x_n), (y_n). ప్రతి n కి $y_n < x_n < u$, $u - \frac{1}{n} \leq y_n$, $u - \frac{1}{n} < x_n < u$ అగునట్లు లభిస్తాయి. ప్రతి n కి $0 < u - x_n < \frac{1}{n}$ మరియు $\ell im \frac{1}{n} = 0$. కాబట్టి స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం నుంచి $\ell im\left(u - x_n\right) = 0$.

12.4.15 పరిబద్ధ అనుక్రమానికి ఊర్ధ్వ అవధి, అధో అవధి:

(x_n) పరిబద్ధ ప్రమేయం, $s_n =$ క.ఎ.హ. $\{x_k / k \geq n\}$, $t_n =$ గ.ది.హ. $\{x_k / k \geq n\}$ అని వ్రాసి క్రిందివి నిరూపించుము.

(a) (t_n) ఆరోహణ అనుక్రమం

(b) (s_n) అవరోహణ అనుక్రమం

(c) ప్రతి n కి $t_n \leq s_n$; $(t_n), (s_n)$ అభిసరిస్తాయి, $\ell im\left(t_n\right) \leq \ell im\left(s_n\right)$

(d) $\ell im\left(t_n\right) = \ell im\left(s_n\right) = \ell$ అయితే (x_n), ℓ కి అభిసరిస్తుంది.

(x_n) కి $\ell im\ t_n$ అధో అవధి, $\ell im\ s_n$ ఊర్ధ్వ అవధి అంటారు.

ఉపపత్తి: (a) (t_n) **ఆరోహణం:** $k \geq n$ అయితే $t_n \leq x_k$ కాబట్టి $k \geq n+1$ అయినప్పుడు $t_n \leq x_k$. అందుచేత $\{s_k / k \geq n+1\}$ సమితికి t_n గ.ది.హ. ఈ సమితికి t_{n+1} గ.ది.హ. కాబట్టి $t_{n+1} \leq t_n$ అందుచేత (t_n) ఆరోహణ అనుక్రమం.

(b) (s_n) **ఆవరోహణ అనుక్రమం:** నిర్వచనం నుండి $s_n = \sup\{x_k / k \ge n+1\}$ కావున $k \ge n+1$ అయితే $s_n \ge s_{n+1}$ అనగా (s_n) అవరోహణ అనుక్రమం.

(c) $(s_n), (t_n)$ **అభిసరిస్తాయి:** $\ell im\ t_n \le \ell im\ s_n$. (x_n) పరిబద్ధ అనుక్రమం కాబట్టి ప్రతి n కి $m \le x_n \le M$ అగునట్లు m, M లభిస్తాయి. $n \in \mathbb{N}, k \ge n$ అయితే $m \le x_k \le M$ కావున $m \le$ గ.ది.హ. $\{s_k / k \ge n\} \le$ క.ఎ.హ. $\{s_k / k \ge n\} \le M$.

అనగా $m \le t_n \le s_n \le M$. $(s_n), (t_n)$ పరిబద్ధమూ (t_n) ఆరోహణం (s_n) పరిబద్ధం కాబట్టి $\ell im\ s_n, \ell im\ t_n$ $\mathbb{R}$ లో వ్యవస్థితం. ప్రతి n కి $t_n \le s_n$ కాబట్టి $m \le \ell im\, t_n \le \ell im\ s_n$.

(d) $\ell im\,(s_n) = \ell im(t_n) = \ell$ అయితే (x_n) అభిసరణ చెందుతుంది మరియు $\ell im\ x_n = \ell$.

$\in > 0$ అయితే సహజ సంఖ్యలు N_1, N_2 $n > N_1$ అయినప్పుడు $\ell + \in > s_n$

$n \ge N_2$ అయినప్పుడు $\ell - \in < t_n$ అగునట్లుగా వుంటాయి.

$N(\in) =$ గరిష్ఠం $\{N_1, N_2\}$ అయితే, $n \ge N$ అయితే $\ell - \in < t_n \le s_n < \ell + \in$ ప్రత్యేకించి $\ell - \in < t_N \le s_N < \ell + \in$. ఇప్పుడు $n \ge N$ అయితే $\ell - \in < t_N \le x_n \le s_n < \ell + \in$ కాబట్టి $|x_n - \ell| < \in$. ప్రతి $\in > 0$ అనురూపంగా N, $n \ge N$ అయితే $|x_n - \ell| < \in$ అగునట్లుగా లభిస్తోంది కావున $\ell im\ x_n = \ell$.

12.5 బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం:

నిర్వచనం: (I_n) అంతరాల అనుక్రమం ప్రతి n కి $I_n \supseteq I_{n+1}$ అనగా $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots\ I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$ అయితే (I_n) కుదించబడిన అంతరాల అనుక్రమం అంటాము.

12.5.1 సిద్ధాంతం: (I_n) కుదించబడిన అంతరాల అనుక్రమం, ప్రతీ I_n పరిబద్ధమూ సంవృతమూ అయితే ప్రతి n కి $\alpha \in I_n$ అగునట్లు ఒక సంఖ్య α వుంటుంది.

ఉపపత్తి: $I_n = [a_n, b_n]$ అనుకొనుము. $m \ge n$ అయితే $I_n \supseteq I_m$ కాబట్టి $a_n \le a_m \le b_m \le b_n \cdots$ (1).

అందుచేత (a_n) ఆరోహణం (b_n) అవరోహణం $\cdot \cdot \cdot$ (2)

అంతేకాక $m < n$ అయినప్పుడు $a_m < a_n \le b_n \le b_m$ $\cdot \cdot \cdot$ (3)

(1) (3)ల నుండి ప్రతి m, n లకి $a_m \le b_n$ $\cdot \cdot \cdot$ (4)

(4) నుండి (a_n) అనుక్రమానికి ప్రతి b_n ఎగువహద్దు అని, (b_n) అనుక్రమానికి ప్రతి a_n దిగువహద్దు అని స్పష్టము. క.ఎ.హ. $(a_n) = a$, గ.ది.హ. $(b_n) = b$ అయితే ప్రతి n కి $a_n \le a \le b \le b_n$ అనీ $a \le \alpha \le b$ అయితే ప్రతి I_n లోనూ α వుంటుందనీ తెలుస్తోంది.

12.5.2 సిద్ధాంతము: $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ కుదింపబడిన పరిబద్ధ సంవృతాంతరాల అనుక్రమం, I_n అంతరపు నిడివి $b_n - a_n$లు. గ.ది.హ. $(b_n - a_n) = 0$ పాటిస్తే, ప్రతి n కి I_nలో వుండే మూలకం α ఏకైకం.

ఉపపత్తి: సిద్ధాంతము 12.5.1. నుండి (a_n) అనుక్రమం ఆరోహణం, (b_n) అవరోహణం, ప్రతి $b_n, (a_n)$కి క.ఎ.హ. మరియు ప్రతి $a_n, (b_n)$కి గ.ది.హ. అంతేకాక $a =$ క.ఎ.హ. (a_n), $b =$ గ.ది.హ. (b_n) అయితే $\mathbb{N}$లోని ప్రతి n కి $a_n \le a \le b \le b_n$ కాబట్టి $0 \le b - a \le b_n - a_n$.

$b - a$, $\{b_n - a_n / n \in \mathbb{N}\}$ కి ది.హ. కాబట్టి $0 \le b - a \le$ గ.ది.హ. $(b_n - a_n / n \in \mathbb{N}) = 0$ కాబట్టి $b = a$

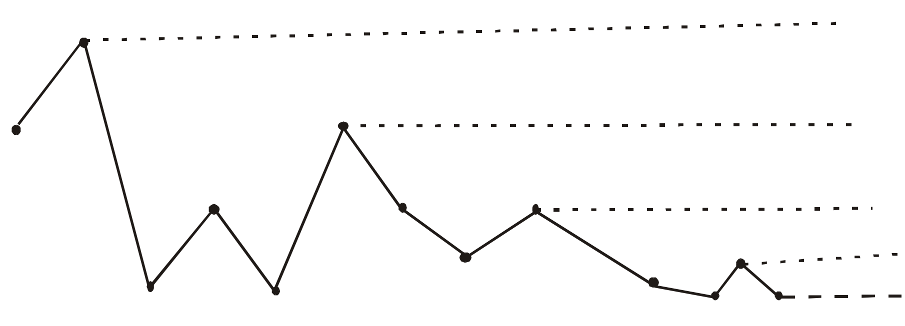
ప్రతి n కి $\alpha \in I_n \Rightarrow$ ప్రతి n కి $a_n \le \alpha \le b_n \Rightarrow a \le \alpha \le b \Rightarrow a = b = \alpha$

అందుచేత ప్రతి n కి I_nలో వుండే α ఏకైకము.

12.5.3 ఏకదిష్ఠ ఉప అనుక్రమ సిద్ధాంతం:

$X = (x_n)$ వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమం అయితే X ఏకదిష్ఠ ఉప అనుక్రమం కలిగి వుంటుంది.

ఉపపత్తి: $n \ge m$ అయినప్పుడు $x_m \ge x_n$ అయితే x_m, X అనుక్రమానికి ఒక శిఖరం అంటాము.



సందర్భం (1): X లో శిఖరాలులేనప్పుడు x_1 శిఖరం కానందున $x_1 < x_{n_1}$ అగునట్లు సహజ సంఖ్య n_1, x_{n_1} శిఖరం కానందున $x_{n_1} < x_{n_2}$ అగునట్లు సహజ సంఖ్య $n_2 > n_1$ అదే రీతిగా అనుగమనం ద్వారా ప్రతి k కి $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$ అగునట్లు సహజ సంఖ్యలు $n_{k+1} > n_k$ లభిస్తాయి.

$1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, $x_1 < x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < x_{n_{k+1}} < \cdots$

కాబట్టి X లో $\left(x_{n_k}\right)$ ఆరోహణమగుచున్న ఉప అనుక్రమం.

సందర్భం (2): X లోని శిఖరాల సంఖ్య పరిమితమనీ, $x_{n_1}, \cdots, x_{n_r}$ లు మాత్రం X శిఖరాలని అనుకుందాము. సందర్భము (1)లోని వాదన $m_1 = n_r + 1$ తో ప్రారంభిద్దాము. $m_1 > n_r$ కాబట్టి x_{m_1}, X కి శిఖరం కానందున $x_{m_1} < x_{m_2}$ అగునట్లు $m_2 > m_1$ వుంటుంది. x_{m_2} శిఖరం కానందున $x_{m_2} < x_{m_3}$ అగునట్లు $m_3 > m_2$ వుంటుంది. సందర్భం (1)లోని వాదన ఇదేరీతిగా కొనసాగిస్తే $x_{m_1} < x_{m_2} < x_{m_3} < \cdots < x_{m_k} < \cdots$ అనే ఒక ఆరోహణ ఉప అనుక్రమం లభిస్తుంది.

సందర్భం (3): x లోని శిఖరాల సంఖ్య అనంతమనీ $P = \{ m / m \in \mathbb{N},\ x_m \in \mathbb{N}, x_m\ X$ కి శిఖరం $\}$ అని అనుకుందాము. $\mathbb{N}$ లో P అనంత వుపసమితి. P లోని మొదటి మూలకం m_1 అనుకోండి. x_{m_1} x కి మొదటి శిఖరం. P నుంచి m_1 తొలగిద్దాం. $P - \{m_1\}$, $\mathbb{N}$ లో అనంత వుపసమితి అయినందున $P - \{m_1\}$ లో మొదటి సంఖ్య వుంటుంది. ఇది m_2 అనుకుంటే $m_1 < m_2$ మరియు x_{m_1} శిఖరమైనందున $x_{m_1} \geq x_{m_2}$. $\mathbb{N}$ లో $P - \{m_1, m_2\}$ అనంత వుపసమితి కావున మొదటి మూలకం కలిగి వుంటుంది. ఈ మొదటి మూలకం m_3 అనుకుంటే $m_3 > m_2 > m_1 \cdot$ x_{m_2} శిఖరం కాబట్టి $x_{m_2} > x_{m_3}$ అందుచేత $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq x_{m_3}$. ఈ పద్ధతి కొనసాగించి $(k+1)$ దశలో $P - \{m_1, \cdots\cdots\cdots\cdots m_k\}$ అనంత సమితిలోని మొదటి సంఖ్య m_{k+1} ఎంచుకుందాం. $m_{k+1} > m_k$ కావున $x_{m_k} \geq x_{m_{k+1}}$ అందుచేత $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots\cdots\cdots\cdots \geq x_{m_k} \geq x_{m_{k+1}}$. P అనంత సమితి అయినందున ఈ రీతిగా ప్రతీ దశలోనూ ఒక సంఖ్య తొలగించినప్పటికీ P లోని సంఖ్యలన్నీ సమగ్రంగా తొలగింపబడడం జరగదు, ఈ పద్ధతిలో X లో అనంత అవరోహణ అనుక్రమం $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots\cdots\cdots\cdots \geq x_{m_k} \geq \cdots\cdots$ లభించును.

12.5.4 **బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం:** ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యల పరిబద్ధ అనుక్రమంలోనూ అభిసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం వుంటుంది.

మొదటి ఉపపత్తి: ఈ ఉపపత్తి ఏకదిష్ఠ ఉప అనుక్రమ సిద్ధాంతం పై ఆధారపడుతుంది. X వాస్తవ సంఖ్యల పరిబద్ధ అనుక్రమం కావున ఒక ఏకదిష్ఠ ఉపానుక్రమాన్ని కలిగి వుంటుంది. ఇట్టి ఉపానుక్రమం పరిబద్ధము ఏకదిష్ఠము అయినందున 12.4.1. నుండి అభిసరణ చెందును.

రెండో ఉపపత్తి: $X=(x_n)$ పరిబద్ధ ప్రమేయమైనపుడు ప్రతి n కి $a \le x_n \le b$ అగునట్లు వాస్తవ సంఖ్యలు a, b వుంటాయి. ఇప్పుడు $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq I_k \supseteq I_{k+1} \supseteq \cdots\cdots$ అగునట్లు కుదింపబడిన పరిబద్ధ సంవృతాల అనుక్రమం $\{I_k\}$ ని నిర్వచిస్తాము. $n_1 = 1$, $I=[a, b]$, $c=\dfrac{a+b}{2}$ $I'=[a, c]$, $I''=[c, b]$ $A_1=\{n \in \mathbb{N}/n \ge 1, x_n \in I'\}$, $B_1=\{n \in \mathbb{N}/n \ge 1, x_n \in I''\}$ అని వ్రాయండి. ప్రతి x_n, I' లేదా I'' లలో ఒక అంతరంలో వుంటుంది. A_1 లేదా B_1 అనంత సమితికావలె. A_1 అనంతమైతే $I_1 = I'$ అని వ్రాయండి. A_1లోని మొదటి సంఖ్యని n_2 అని వ్రాయండి. A_1 పరిమిత సమితి అయితే B_1 అనంత సమితి. ఇప్పుడు $I_1 = I''$, B_1లోని మొదటి సంఖ్య n_2 అని మరియు $I_1=[a_1, b_1]$ అని వ్రాయండి.

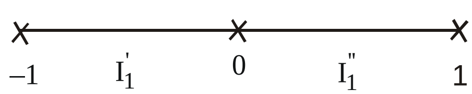
ఇప్పుడు I_1 ని రెండు సమ భాగాలు I_1', I_1'' గా విభజించి $A_2=\{n \in \mathbb{N}/n > n_1, x_n \in I_1'\}$, $B_2=\{n \in \mathbb{N}/n > n_1, x_n \in I_1''\}$ అని వ్రాసి పై మాదిరిగా A_2 అనంత సమితి అయితే A_2లోని మొదటి సంఖ్యని n_2, A_2 పరిమిత సమితి అయితే B_2 అనంత సమితి కాబట్టి ఇందలి మొదటి సంఖ్యను n_2 చేత సూచించండి. A_2 అనంత సమితి అయితే $I_2 = I_1'$, A_2 పరిమిత సమితి అయితే $I_2 = I_1''$ అనీ $I_2=[a_2, b_2]$ అని వ్రాయండి.

ఈ పద్ధతి కొనసాగించగా మనకు అనంతమైన కుదింపబడిన సంవృత పరిబద్ధ అంతరాల అనుక్రమం $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots\cdots$ లభిస్తుంది. $I_k=[a_k, b_k]$ నిడివి $b_k - a_k$ I_{k-1} నిడివి $b_{k-1} - a_{k-1}$ లో సగం కావున $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$. అంతేకాక $[a, b]$లో ఒక అనుక్రమం $\{x_{n_k}\}$ ప్రతి k కి $x_{n_k} \in I_k$ అగునట్లు లభిస్తుంది. కుదింపబడిన అంతరాల సిద్ధాంతం నుండి ఒకే ఒక α ప్రతీ I_k లోను వుంటుంది. $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, $a_k \le \alpha \le b_k$ కాబట్టి ప్రతి k కి $0 \le \left| x_{n_k} - \alpha \right| \le b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$, $\ell im \dfrac{b-a}{2^k} = 0$ కావున స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం నుండి $\ell im\, x_{n_k} = \alpha$.

12.5.5 ఉదాహరణ: $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $I_1=[-1, 1]$లకు బొల్జానో వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం రెండో ఉపపత్తి అనువర్తించండి.

సాధన: ప్రతి n కి $x_{2n} = \dfrac{1}{2n}$, $x_{2n-1} = \dfrac{-1}{2n-1}$

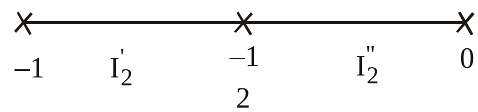
మొదటి మెట్టు: $I_1 = I = [-1, 1]$, $I' = [-1, 0]$, $I'' = [0, 1]$, $n_1 = 1$



$$A_1 = \{n \in \mathbb{N}/n > 1,\ x_n \in I'\} = \{n/x_n \le 0\} = \{3, 5, 7, 9, \cdots\cdots\cdots\}$$

$$B_1 = \{n \in \mathbb{N}/\ n > 1,\ x_n \in I''\} = \{n/x_n > 0\} = \{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\cdots\}$$

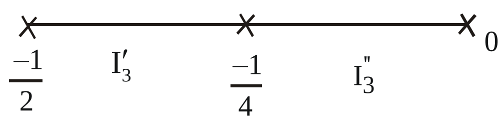
$$n_2 = 3,\ I_2 = [-1, 0],\ I_2' = \left[-1, \frac{-1}{2}\right],\ I_2'' = \left[\frac{-1}{2}, 0\right]$$



$$A_2 = \{n/n \in \mathbb{N},\ n > 3,\ x_n \in I_2'\} = \left\{n/n > 3,\ x_n \le \frac{-1}{2}\right\} = \phi$$

$$B_2 = \{n/n \in \mathbb{N}\ \ x_n \in I_2''\} = \left\{n > 3 \big/ 0 > x_n > \frac{-1}{2}\right\} = \{5, 7, 9, \cdots\cdots\cdots\}$$

$$n_3 = 5,\ I_3 = \left[\frac{-1}{2}, 0\right] = I_3' \cup I_3'',\ I_3' = \left[\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right],\ I_3'' = \left[\frac{-1}{4}, 0\right]$$



$$A_3 = \{n/n > 5,\ x_n \in I_3'\} = \phi$$

$$B_3 = \{n > 5/x_n \in I_3''\} = \{7, 9, \cdots\cdots\cdots\}$$

ఈ పద్ధతి కొనసాగించి ప్రతి k కి $n_k = 2k - 1$,

$$A_k = \phi,\ B_k = \{2k+1,\ 2k+3,\ 2k+5, \cdots\cdots\cdots\}, \qquad I_k = \left[\frac{-1}{2(k-1)},\ 0\right],\ x_{n_k} = \frac{-1}{2k-1}$$

రాబట్టవచ్చును. దీన్నించి $\ell im\ x_{n_k} = \ell im \dfrac{-1}{2k-1} = 0$.

12.5.6 **ఉదాహరణ:** (x_n) పరిబద్ధ ప్రమేయం, $s =$ క.ఎ.హ. $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ అనుకొనుము. $s \notin \{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ అయితే s కి అభిసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం $\{x_{n_k}\}$, $\{x_n\}$ లో వుంటుందని చూపుము.

సాధన: $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ సమితికి క.ఎ.హ. s, $y_1 = s-1 < s$ కాబట్టి $y_1 < x_{n_1} \le s$ అగునట్లు అత్యల్ప సహజ సంఖ్య n_1 వుంటుంది. $y_2 =$ గరిష్ఠం $\left\{s-\frac{1}{2}, x_{n_1}\right\}$ అయితే $y_2 < s$ కావున పై రీతిగా ఒక అత్యల్ప n_2, $n_2 > n_1$, $y_2 < x_{n_2} < s$ అగునట్లుగా వుంటుంది. ఈ పద్ధతి కొనసాగించి కింది లక్షణాలతో $\left(x_{n_k}\right)$ ఉప అనుక్రమం $\left(y_k\right)$ అనుక్రమం పొందగలము.

లక్షణాలు (i) $y_k =$ గరిష్ఠం $\left\{s-\frac{1}{k}, x_{n_{k-1}}\right\}$

(ii) $y_k < x_{n_k} < s$

(iii) n_k పై లక్షణాలతో అత్యల్పం

$s-\frac{1}{k} < x_{n_k} < s$ కాబట్టి, $0 \le s - x_{n_k} < \frac{1}{k}$

స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం నుంచి $\ell im\ s - x_{n_k} = 0$ కావున $\ell im\ x_{n_k} = s$.

12.6 కోషీ అభిసరణ:

ఏకదిష్ఠ అభిసరణ సిద్ధాంతం అనువర్తనం, అనుక్రమాల సమితిలో అతి చిన్నదైన ఏకదిష్ఠ అనుక్రమాల వరకే పరిమితం. ఇప్పుడు మనం నేర్చుకోనున్న కోషీ సూత్రం ఎట్టి నిబంధనా లేకుండా అన్ని అనుక్రమాలకీ వర్తిస్తుంది.

నిర్వచనం: $X = (x_n)$ అనుక్రమం కింది నియమం పాటిస్తే కోషీ అనుక్రమం అంటాము.

నియమం: $\in > 0$ అయితే దానికి అనువర్తనంగా $\mathbb{N}$లో $N_\in$, $m > n \ge N_\in$ అయ్యే సహజ సంఖ్యలు m, nలకు $|x_m - x_n| < \in$ అగునట్లు వ్యవస్థితం. (ఇక నుండి పై నియమంలో m, n సహజ సంఖ్యలని ప్రతీ తడవ చెప్పకుండా సూక్ష్మంగా $m > n \ge N_\in$ అని వ్రాస్తాము.) మన ధ్యేయం కోషీ అనుక్రమాలు ఖచ్చితంగా అభిసరణ అనుక్రమాలు మాత్రమేనని నిరూపించుటయే ప్రస్తుత ధ్యేయం.

12.6.1 ఉదాహరణలు: (a) $\left(\frac{1}{n}\right)$ అనుక్రమం కోషీ అనుక్రమం. $\in$ ధన సంఖ్య $\frac{1}{k} < \in$ కావాలంటే $\frac{1}{\in} < k$ కావలె. ఆర్కిమెడీస్ సూత్రం నుంచి $\frac{2}{\in}$ కన్న పెద్ద సహజ సంఖ్య $N_\in$ లభిస్తుంది. m, n సహజ సంఖ్యలు

$m \geq N_\in$, $n \geq N_\in$ అయితే $\frac{1}{m} < \frac{\in}{2}$, $\frac{1}{n} < \frac{\in}{2}$ కావున $\frac{1}{m} < \frac{\in}{2}$ మరియు $\frac{1}{n} < \frac{\in}{2}$ అయ్యేటట్లు m, n లకి

$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$. కావున $\left(\frac{1}{n}\right)$ కోషీ అనుక్రమం.

(b) $\left\{(-1)^n\right\}$ కోషీ అనుక్రమం కాదు.

ఇది కోషీ అనుక్రమమైతే $\in = \frac{1}{2}$ కి అనురూపంగా సహజ సంఖ్య H, $m \geq H, n \geq H$ అయితే $\left|(-1)^n - (-1)^m\right| < \frac{1}{2}$ అగునట్లు వ్యవస్థితం కావలె. $m = 2H, n = 2H+1$ ప్రత్యేక సందర్భంలో $\left|(-1)^m - (-1)^n\right| = \left|(-1)^{2H} - (-1)^{2H+1}\right| = |1+1| = 2 < \frac{1}{2}$ కావలె. ఇది అసంభవం కనుక $\left\{(-1)^n\right\}$ కోషీ అనుక్రమం కాదు.

12.6.2 లెమ్మా: $X = (x_n)$ అభిసరణ చెందే వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమమైతే X కోషీ అనుక్రమం.

ఉపపత్తి: $\ell im(X) = x$ మరియు $\in > 0$ అనుకొనుము. $\in$ కి అనురూపంగా సహజ సంఖ్య $N_\in$, $m \geq N_\in$ అయితే

$|x_n - x| < \frac{\in}{2}$ అగునట్లు లభిస్తుంది.

$m \geq N_\in$, $n \geq N_\in$ అయితే $|x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n|$

$\leq |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$ కనుక (x_n) కోషీ అనుక్రమం.

12.6.3 లెమ్మా: ప్రతి కోషీ అనుక్రమం పరిబద్ధము.

ఉపపత్తి: $X = (x_n)$ కోషీ అనుక్రమం అయితే $\in = 1$ కి అనురూపంగా $m \geq N, n \geq N$ అయినప్పుడు $|x_m - x_n| < 1$ అగునట్లు ఒక సహజ సంఖ్య N లభిస్తుంది. కాబట్టి $m \geq N$ అయినప్పుడు $|x_m - x_N| < 1$.

అట్టి m కి $|x_m| - |x_N| \leq |x_m - x_N| < 1$ కాబట్టి $|x_m| < 1 + |x_N|$

ఇప్పుడు $M =$ గరిష్ఠం $\left\{|x_1|, |x_2|, \cdots\cdots\cdots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\right\}$ అనుకోండి.

$1 \le i \le N$ అయితే $|x_i| \le M$ మరియు $i \ge N$ అయితే $|x_i| \le 1 + |x_N| \le M$ కావున ప్రతి n కి $|x_n| \le M$ అందుచేత (x_n) పరిబద్ధం.

12.6.4 ఉదాహరణ: పరిబద్ధ అనుక్రమం తప్పనిసరిగా కోషీ అనుక్రమం కావలెనని లేదు.

ప్రతి n కి $x_n = -1$, $y_n = 1$ మరియు

$$Z = (Z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \cdots\cdots\cdots) = (1, -1, 1, -1, \cdots\cdots\cdots)$$

అప్పుడు $z_n = (-1)^n$, $|z_n| = |(-1)^n| = 1$ కాబట్టి Z పరిబద్ధం. కాని Z కోషీ అనుక్రమం కాదు. $(12.6.1\,(b))$.

12.6.5 లెమ్మా: ఒక కోషీ అనుక్రమం $X = (x_n)$ కి అభిసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం $X' = (x_{n_k})$ కలిగి వుంటే X అభిసరణ చెందును మరియు $\ell im(X) = \ell im(X')$.

ఉపపత్తి: (x_n) కోషీ అనుక్రమం అయినందున $\in > 0$ అయినప్పుడు ఒక సహజ సంఖ్య k_1, $n \ge k_1$, $m \ge k_1$ అయితే $|x_n - x_m| < \frac{\in}{2}$ అగునట్లుగా వ్యవస్థితము. (x_{n_k}) అవధి x అయితే పై $\in > 0$ కి అనురూపంగా సహజ సంఖ్య k_2, $n_k \ge k_2$ అయినప్పుడు $|x_{n_k} - x| < \frac{\in}{2}$ అగునట్లు లభిస్తుంది. $k(\in) =$ గరిష్ఠం $\{k_1, k_2\}$ అనుకోండి.

$1 < n_1 < n_2 < \cdots\cdots\cdots\cdots < n_k < \cdots\cdots\cdots \mathbb{N}$ లో శుద్ధ ఆరోహణ అనుక్రమం కావున ప్రతి k కి $n_k \ge k$.

$k_0 \ge k(\in)$, $k \ge k_0$ అయితే $n_k \ge n_{k_0} \ge k_0 \ge k(\in)$ కనుక $|x_{n_k} - x| < \frac{\in}{2}$.

$n \ge k_0$ అయితే $|x_n - x| = |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2}$

$\in$ యాదృచ్ఛిక ధన సంఖ్య కావున

$$\ell im\,(x_{n_k}) = \ell \underset{n}{im}(X) = \underset{n_k}{\ell im}\, x_{n_k}$$

అనగా $\ell im(X) = \ell im(X')$

12.6.6 కోషీ అభిసరణ సూత్రం: వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమం అభిసరణకి అది కోష్ అనుక్రమం అగుట తుల్యము.

ఉపపత్తి: $X = (x_n)$ $\mathbb{R}$ లోఅనుక్రమమనుకొనుము. X అభిసరణ చెందుతూ అవధి $x_n = x$ అయితే 12.6.2 నుండి $X = (x_n)$ కోషీ అనుక్రమం.

విపర్యయంగా $X=(x_n)$ కోషీ అనుక్రమం అయితే లెమ్మా 12.6.3 నుండి $X=(x_n)$ పరిబద్ధము. బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ నుండి X లో అభిసరణ చెందు ఉప అనుక్రమం (x_{n_k}) లభిస్తుంది. 12.6.5 నుండి X అభిసరిస్తుంది మరియు $\ell im\,(x_n)=\ell im(x_{n_k})$.

12.6.7 సంకోచిత అనుక్రమాల అనువర్తనం:

నిర్వచనం: (x_n) వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమం, $0<c<1$, $\mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $|x_{n+2}-x_{n+1}|\le c\,|x_{n+1}-x_n|$ అయితే (x_n) సంకోచిత అనుక్రమమంటాము. ఈ నియమం పాటించే ప్రతి c సంకోచిత అనుక్రమాన్కి స్థిర పదమనీ, సూక్ష్మంగా సంకోచిత స్థిర పదమనీ అంటాము.

12.6.8 సిద్ధాంతం: ప్రతి సంకోచిత అనుక్రమం కోషీ అనుక్రమం అందుచేత అభిసరణ చెందుతుంది.

ఉపపత్తి: (x_n) సంకోచిత అనుక్రమం, c సంకోచిత స్థిర పదం అనుకోండి. ప్రతి n కి $|x_{n+2}-x_{n+1}|\le c\,|x_{n+1}-x_n|$ కాబట్టి $|x_3-x_2|\le c\,|x_2-x_1|$ మరియు $|x_{n+3}-x_{n+2}|\le c\,|x_{n+2}-x_{n+1}|\le c^2\,|x_{n+1}-x_n|$.

అందుచేత గణితాను గమనం నుండి ప్రతి n కి $|x_{n+2}-x_{n+1}|<c^n\,|x_2-x_1|$.

ఇప్పుడు (x_n) కోషీ అనుక్రమమనీ చూపగలము.

$m>n$ అయితే $|x_m-x_n|=|x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+\cdots\cdots+x_{n+1}-x_n|$

$$\le |x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots\cdots\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$\le\left(c^{m-2}+c^{m-3}+\cdots\cdots\cdots+c^{n-1}\right)\,|x_2-x_1|$$

$$=c^{n-1}\left(c^{m-n-1}+c^{m-n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+1\right)\,|x_2-x_1|$$

$$=c^{n-1}\,\frac{\left(1-c^{m-n}\right)}{1-c}\,|x_2-x_1|$$

$$<\frac{c^{n-1}}{1-c}\cdot|x_2-x_1| \qquad \left(0<c^{m-n}<1\right)$$

$0<c<1$ కాబట్టి $\ell im\ c^n=0$. అందుచేత $\in>0$ అయినప్పుడు దానికి అనురూపంగా $\mathbb{N}$ లో $k(\in)$, $n\ge k(\in)$ అయితే

$$c^{n-1} < \frac{(1-c)\in}{1+|x_2-x_1|}$$

అగునట్లు వ్యవస్థితం. అందుచేత $n \ge k(\in)$ అయినప్పుడు

$$\frac{c^n \cdot |x_2-x_1|}{1-c} < c^{n-1}\frac{(1+|x_2-x_1|)}{1-c} < \in$$

కాబట్టి $m > n \ge k(\in)$ అయితే $|x_m - x_n| < \in$. దీన్నించి (x_n) కోషీ అనుక్రమము అని అందుచేత అభిసరణ చెందుతుందనీ తెలుస్తోంది.

12.6.9 ఉప సిద్ధాంతం: సంకోచిత స్థిర పదం c. $x^* = \ell im\, x_n$ లతో సంకోచిత అనుక్రమం (x_n) అయితే ప్రతి n కి

$$\text{(i)}\quad \left|x^* - x_n\right| \le \frac{c^{n-1}}{1-c}|x_2-x_1| \quad \text{మరియు} \quad \text{(ii)}\quad \left|x^* - x_n\right| \le \frac{c}{1-c}|x_n - x_{n-1}|$$

ఉపపత్తి: (i) 12.6.8 నుంచి $m > n$ అయితే $|x_m - x_n| \le \dfrac{c^{n-1}}{1-c}|x_2-x_1| \cdot \cdot \cdot (A)$

$\ell im_m\, x_m = x^*$ కాబట్టి స్థిర సంఖ్య $n \in \mathbb{N}$ కి $\ell im_m (x_m - x_n) = x^* - x_n$

కాబట్టి $\ell im |x_m - x_n| = \left|x^* - x_n\right|$ $m > n$ అయినప్పుడు (A) జరుగును కాబట్టి

$$\left|x^* - x_n\right| = \ell im_m |x_m - x_n| \le \frac{c^n}{1-c}\cdot|x_2-x_1|$$

(ii) $m > n$ అయినప్పుడు $|x_m - x_n| \le |x_m - x_{m-1}| + \cdots\cdots\cdots\cdots + |x_{n+1} - x_n|$

కావున $\mathbb{N}$ లోని ప్రతి k కి $|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \le c^k |x_n - x_{n-1}|$

$$\Rightarrow |x_m - x_n| \le \left(c^{m-n} + c^{m-n-1} + \cdots\cdots + c^2 + c\right)|x_n - x_{n-1}|$$

$$= c\left(1 + c + \cdots\cdots\cdots + c^{m-n-1}\right)|x_n - x_{n-1}|$$

$$= c\frac{\left(1-c^{m-n}\right)}{1-c}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

$$< \frac{c}{1-c}\left|x_n - x_{n-1}\right|$$

$m > n$ అయినప్పుడు ఇది జరుగును. కావున $m \to \propto$ అగునట్లు అవధి పరిగణించిన

$\left|x^* - x_n\right| = \lim\limits_{m}\left|x_m - x_n\right| \le \frac{c}{1-c}\left|x_n - x_{n-1}\right|$ అని వచ్చును.

12.6.10 ఉదాహరణ: (x_n) అనుక్రమాన్ని కింది విధంగా నిర్వచింపుము.

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + x_{n-1}\right) \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (1)$$

(i) nకి $1 \le x_n \le 2$ అని చూపుము. ఈ అసమత గణితాను గమనం వుపయోగించి నిరూపిద్దాము. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ కాబట్టి $1 = x_1 \le x_3 \le x_2 = 2$ $x_1, \ \cdots \ , x_n$ ఈ అసమత పాటిస్తాయని అనుకుందాము. $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + x_{n-1}\right)$ మరియు $1 \le x_{n-1} \le 2, 1 \le x_n \le 2$ కావున $1 \le x_{n+1} \le 2$. గణితానుగమనం నుండి ప్రతి nకి $1 \le x_n \le 2$.

(ii) $1 \le x_{2n-1} < x_{2n+1} < x_{2n+2} < x_{2n} \le 2 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (2)$

ఈ అసమత గణితానుగమనం వుపయోగించి నిరూపిద్దాము.

$n = 1$ అయినప్పుడు $x_{2n-1} = x_1 = 1,\ x_{2n+1} = x_3 = \frac{3}{2}$ మరియు $x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2\right) = \frac{7}{4}$.

$1 = x_1 < x_5 < x_4 < 2$ కాబట్టి (2) $n = 1$కి జరుగుతుంది.

$k \in \mathbb{N}$ పై అసమత kకి వర్తించుననుకొనుము, అనగా $1 \le x_{2k-1} < x_{2k+1} < x_{2k+2} < x_{2k} \le 2$ అనుకొనుము.

$x_{2k+3} = \dfrac{x_{2k+1} + x_{2k}}{2}$ కాబట్టి $x_{2k+1} < x_{2k+3} < x_{2k+2}$

$x_{2k+4} = \dfrac{x_{2k+3} + x_{2k+2}}{2}$ కాబట్టి $x_{2k+3} < x_{2k+4} < x_{2k+2}$

$\Rightarrow x_{2k+1} < x_{2k+3} < x_{2k+4} < x_{2k+2}$ గణితానుగమనం నుంచి ప్రతి k కి ఇది వర్తిస్తుంది.

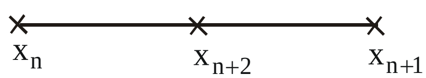
(iii) (x_{2n-1}) ఆరోహణ అనుక్రమం (x_{2n}) అవరోహణ అనుక్రమం అంతేకాక

$[x_{2n-1}\ \ x_{2n}] \supseteq [x_{2n+1},\ x_{2n+2}]$ అందుచేత ప్రతి n, m లకి $x_{2n+1} < x_{2m}$

ఈ అంశాలు (2) నుండి స్పష్టం.

(iv) ప్రతి n కి $|x_{n+1} - x_n| = \dfrac{1}{2^{n-1}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$

$n = 1$ అయినప్పుడు $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ కాబట్టి $|x_2 - x_1| = |2 - 1| = 1 = \dfrac{1}{2^0}$



$|x_{n+1} - x_n| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ అనుకొనుము. x_{n+2} నిర్వచనం నుండి $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}$ కాబట్టి

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|\frac{x_{n+1} + x_n}{2} - x_{n+1}\right| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

గణితానుగమనం నుండి (3) ప్రతి n కి వర్తిస్తుంది.

(v) $x_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{1}{2^{2n-1}}\ (n \in \mathbb{N}) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (4)$

$x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1+2}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}$ కాబట్టి $n = 1$ కి (4) నిజం.

k కి (4) జరిగిందనుకోండి.

(iv) నుండి $|x_{2k+2} - x_{2k+1}| = \dfrac{1}{2^{2k}},\ |x_{2k+3} - x_{2k+2}| = \dfrac{1}{2^{2k+1}}$

మరియు (ii) నుండి $x_{2k+1} < x_{2k+3} < x_{2k+2} < x_{2k}$ కనుక

$$0 < x_{2k+2} - x_{2k+1} = \left| x_{2k+2} - x_{2k+1} \right| = \frac{1}{2^{2k}}$$

ఇదే విధంగా $0 < x_{2k+2} - x_{2k+3} = \left| x_{2k+3} - x_{2k+2} \right| = \frac{1}{2^{2k+1}}$

అందుచేత $x_{2k+3} = x_{2k+2} - \frac{1}{2^{2k+1}} = x_{2k+1} + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{2k+1}}$

$$= x_{2k+1} + \frac{1}{2^{2k}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = x_{2k+1} + \frac{1}{2^{2k+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2k+1}}$$

గణితానుగమనం నుండి ప్రతి n కి **(4)** వర్తిస్తుంది.

(vi) (x_n) కోషీ అనుక్రమం అందుచేత అభిసరిస్తుంది.

$m > n$ అయితే $\left| x_m - x_n \right| = \left| x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - \cdots\cdots\cdots + x_{n+1} - x_n \right|$

$$\leq \left| x_m - x_{m-1} \right| + \left| x_{m-1} - x_{m-2} \right| + \cdots\cdots\cdots + \left| x_{n+1} - x_n \right|$$

$$= \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-2}}\left(1 - \frac{1}{2} m - n\right) < \frac{1}{2^{n-2}}$$

$\ell im \dfrac{1}{2^{n-2}} = 0$ కాబట్టి $\in > 0$ అయితే $n > \mathbb{N}$ అయినప్పుడు $\dfrac{1}{2^{n-2}} < \in$ అగునట్లు $\mathbb{N}$లో $k_\in$ దొరుకును అందుచేత $m > n \geq N$ అయితే $\left| x_m - x_n \right| < \in$. కనుక (x_n) కోషీ అనుక్రమం, అభిసరణ చెందును.

(vii) $\ell im\ x_n = \dfrac{5}{3}$

(v) నుండి $x_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{1}{2^{2n-1}}$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{2n}}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{4^n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$\ell im \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ కావున $\ell im\ x_{2n+1} = \dfrac{5}{3}$

(x_n) కోషీ అనుక్రమం, $\ell im\ x_{2n+1} = \dfrac{5}{3}$ కావున $\ell im\ x_n = \ell im\ x_{2n+1} = 5/3$

12.6.11 ఉదాహరణ: $x^3 - 7x + 2 = 0$ సమీకరణానికి $0,\ 1$ల మధ్య ఒక మూలం $(root)$ వున్నదని తెలియును. సంకోచిత అనుక్రమాల ద్వారా ఈ మూలాన్ని కనుగొందాం.

$x^3 - 7x + 2 = 0$ నుండి $x = \dfrac{x^3 + 2}{7}$ అని వ్రాద్దాము.

$0 < x_1 < 1$ అగునట్లు x_1 ఎంచుకుని $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 2}{7}$ అని వ్రాద్దాము.

$0 < x_n < 1$ అనుకుంటే $0 < x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 2}{7} < \dfrac{1+2}{7} < 1$ కాబట్టి గణితానుగమనం నుండి ప్రతి n కి $0 < x_n < 1$.

$\mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|\frac{1}{7}\left\{\left(x_{n+1}^3 + 2\right) - \left(x_n^3 + 2\right)\right\}\right|$

$$= \frac{1}{7}\left|\left(x_{n+1}^3 - x_n^3\right)\right| = \frac{1}{7}|x_{n+1} - x_n|\,\left|x_{n+1}^2 + x_{n+1}\, x_n + x_n^2\right|$$

$$\leq \frac{1}{7}\ |x_{n+1} - x_n| \cdot \left(|x_{n+1}|^2 + |x_{n+1}|\,|x_n| + |x_n|^2\right)$$

$$< \frac{3}{7} \cdot |x_{n+1} - x_n| \qquad (|x_n| < 1 \text{ కాబట్టి})$$

కాబట్టి (x_n) సంకోచిత అనుక్రమం, అందుచేత **12.6.8** నుండి $\ell im\ x_n = r \in \mathbb{R}$

$$x_{n+1} = \frac{1}{7}\left(x_n^3 + 2\right) \text{ కాబట్టి}$$

$$r = \ell im\ x_{n+1} = \frac{1}{7}\ \ell im\left(x_n^3 + 2\right) = \frac{1}{7}\left(r^3 + 2\right)$$

అందుచేత $r^3 - 7r + 2 = 0, \quad 0 \leq r \leq 1$ అని స్పష్టం.

$0 \neq r \neq 1$ కావున $0 < r < 1$ కావున $(0, 1)$లో $x^3 - 7x + 2 = 0$ సమీకరణపు సాధన $r,\ 0 < r < 1.$

12.7 శుద్ధ అపసరణ:

అభిసరణ చెందని అనుక్రమం అపసరణ చెందుతుందని గతంలో నిర్వచనం చెప్పుకొన్నాము. అపసరణ చెందే అనుక్రమం పరిబద్ధం కావచ్చు. ఎగువ అపరిబద్ధం లేదా దిగువ అపరిబద్ధం లేదా రెండు వైపులా అపరిబద్ధం కావచ్చును. ఈ విభాగంలో అపరిబద్ధ అనుక్రమాల పై దృష్టి కేంద్రీకరిద్దాము.

12.7.1 నిర్వచనం: (x_n) వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమం.

(i) $\mathbb{R}$ లోని ప్రతి α కి అనురూపంగా ఒక సహజ సంఖ్య $k(\alpha)$, $n \geq k(\alpha)$ అయినప్పుడు $x_n > \alpha$ అగునట్లు లభ్యమైతే (x_n), $+\infty$ కి అపసరణ చెందుతుందంటాము. ఈ సందర్భంలో $\ell im\,(x_n) = +\infty$ అని వ్రాస్తాము.

(ii) $\mathbb{R}$ లోని ప్రతి α కి అనురూపంగా ఒక సహజ సంఖ్య $k(\alpha)$, $n \geq k(\alpha)$ అయినప్పుడు $x_n < \alpha$ అగునట్లు లభిస్తే (x_n), $-\infty$ కి అపసరణ చెందుతుందంటాము. ఈ సందర్భములో $\ell im\,(x_n) = -\infty$ అని వ్రాస్తాము.

(iii) $\ell im\left(x_n\right) = \pm\infty$ అయితే $\left(x_n\right)$ శుద్ధ అపసరణ చెందుతుందంటాము.

ప్రతి β కి $E_\beta = \{(x, y)/y \le \beta\}$ సమితిలో లేని (n, x_n)ల సంఖ్య పరిమితం కావడం $\ell im\, x_n = +\infty$ కి తుల్యమనీ, ప్రతి α కి $F_\alpha = \{(x, y)/y \ge \alpha\}$ లో లేని (n, x_n)ల సంఖ్య పరిమితం కావడం $\underset{n\to\alpha}{\ell im}\, x_n = -\infty$ కావడాన్ని తుల్యమనీ స్పష్టము.

12.7.2 సిద్ధాంతం: (x_n), (y_n) అనుక్రమాలు, ప్రతి n కి $x_n \le y_n$ అనుకొనుము.

(a) $\ell im\, x_n = +\infty$ అయితే $\ell im\, y_n = +\infty$ (b) $\ell im\, y_n = -\infty$ అయితే $\ell im\, x_n = -\infty$

ఉపపత్తి: (a) $\ell im\, x_n = +\infty$ అయి $\in > 0$ అయితే $\mathbb{N}$లో $N_\in$, $n \ge N_\in$ అయినపుడు $x_n > \in$ అగునట్లు లభిస్తుంది. $y_n \ge x_n$ కాబట్టి $n \ge N_\in$ అయినప్పుడు $y_n \ge x_n > \in$. ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి వర్తిస్తుంది. కాబట్టి (y_n) $+\infty$ కి అపసరణ చెందును.

(b) $\ell im\, y_n = -\infty$ మరియు $\beta \in \mathbb{R}$ అనుకొనుము. $\mathbb{N}$లో ఒక N_β, $n \ge N_\beta$ అయినప్పుడు $y_n < \beta$ అగునట్లు లభిస్తుంది. $x_n \le y_n$ కావున $n \ge N_\beta$ అయితే $x_n \le y_n < \beta$ అందుచేత $\ell im\, x_n = -\infty$.

12.7.3 S.A.Q.: $x_n > 0\, \forall n$ అయితే $\ell im\, x_n = 0 \Leftrightarrow \ell im \dfrac{1}{x_n} = \infty$ అని చూపుము.

12.7.4 S.A.Q.: $(x_n), (y_n)$ శుద్ధ అపసరణ చెందే అనుక్రమాలై $\ell im(x_n) = \ell im(y_n)$ అయితే $(x_n + y_n)$ శుద్ధ అపసరణమనీ $\ell im\, x_n + \ell im\, y_n = \ell im\,(x_n + y_n)$ అని చూపుము.

12.7.5 సిద్ధాంతం: వాస్తవ సంఖ్యల ఏకదిష్ఠ అనుక్రమం (x_n) శుద్ధ అపసరణం కావడానికి అపరిబద్ధం కావడం తుల్యము.

(a) (x_n) ఆరోహణమైతే $\ell im\,(x_n) = +\infty$ (b) (x_n) అవరోహణమైతే $\ell im\,(x_n) = -\infty$

ఉపపత్తి: (x_n) ఏకదిష్ఠ అనుక్రమమనుకోండి. (x_n) అభిసరణ చెందడాన్కి తుల్యం (x_n) పరిబద్ధత. అందుచేత అపసరణకి తుల్యం అపరిబద్ధత.

(a) (x_n) అపరిబద్ధమై ఆరోహణ అనుక్రమమైతే ప్రతి n కి $x_1 \le x_n$ కనుక (x_n) ఎగువ అపరిబద్ధము. $\mathbb{R}$ లోని ప్రతి α కి అనురూపంగా సహజ సంఖ్య $k(\alpha)$, $x_{k(\alpha)} > \alpha$ అగునట్లుగా లభిస్తుంది. (x_n) ఆరోహణత నుండి $n \ge k(\alpha)$ అయితే $x_n \ge x_{k(\alpha)} > \alpha$. అందుచేత $\ell im\,(x_n) = +\infty$.

(b) (x_n) అపరిబద్ధమై, అవరోహణ అనుక్రమమైతే ప్రతి n కి $x_1 \geq x_n$ కనుక (x_n) దిగువ అపరిబద్ధము. $\mathbb{R}$ లోని ప్రతి β కి అనురూపంగా సహజ సంఖ్య $k(\beta)$, $x_{k(\beta)} < \beta$ అగునట్లు లభిస్తుంది. అవరోహణ నుండి $n \geq k(\beta)$ అయితే $x_n \leq x_{k(\beta)} < \beta$ అందుచేత $\ell im\,(x_n) = -\infty$.

12.7.6 సిద్ధాంతం: (x_n), (y_n) ధన సంఖ్యల అనుక్రమాలు, $\ell im\left(\frac{x_n}{y_n}\right) > 0$ అయినప్పుడు $\ell im\,(x_n) = +\infty$ కి తుల్యము $\ell im\,(y_n) = +\infty$.

ఉపపత్తి: $\ell im\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L$ అనుకొనుము. $L > 0$ కనుక $n \geq k$ అయినప్పుడు $\left|\frac{x_n}{y_n} - L\right| < \frac{L}{2}$ అగునట్లు సహజ సంఖ్య k లభిస్తుంది. $n \geq k$ అయితే $\frac{L}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L$, అనగా $\frac{L}{2}\,y_n < x_n < \frac{3L}{2}\,y_n$.

(a) $\ell im\ y_n = +\infty$ అనుకొనుము. α వాస్తవ సంఖ్య అయితే N సహజ సంఖ్య k_1, $n \geq k_1$ అయినప్పుడు $y_n > \frac{2\alpha}{3L}$ అగునట్లు k_1 లభిస్తుంది. $k(\alpha) =$ గరిష్ఠ $\{k_1, k\}$ అని వ్రాయండి. $n \geq k(\alpha)$ అయితే $n \geq k_1$ మరియు $n \geq k_2$ అందుచేత $\alpha < y_n < \frac{2}{3L}x_n$. కాబట్టి

$$x_n > \frac{3L}{2}y_n > \frac{3L}{2}\,\frac{2}{3L}\,\alpha = \alpha \quad \Rightarrow \ell im\,(x_n) = +\infty.$$

(b) $\ell im\ x_n = +\infty$ అనుకొనుము. $\alpha \in \mathbb{R}$ అయితే సహజ సంఖ్య k_2 $n \geq k_2$ అయినప్పుడు $x_n > \frac{3L}{2}\,\alpha$. $k(\alpha) =$ గరిష్ఠ $\{k,\ k_2\}$ మరియు $n \geq k_2$ అయితే

$n \geq k \Rightarrow \frac{3L}{2}\,y_n > x_n > \frac{3L}{2}\,\alpha \Rightarrow y_n > \alpha$ ఇది $\mathbb{R}$ లోని ప్రతి α కి వర్తించును కావున $\ell im\ y_n = +\infty$.

12.8 S.A.Q. లకు జవాబులు:

12.4.5 S.A.Q.: $x_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$

$\Rightarrow 0 < x_{n+1} < x_n$ అంతేకాక $x_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots\cdots \frac{n}{n} \le \frac{1}{n}$.

$\Rightarrow 0 < x_n \le \frac{1}{n}$ $\ell im \frac{1}{n} = 0$ కాబట్టి స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం నుంచి $\ell im\, x_n = 0$.

గమనిక: అభిసరణ రాబట్టుటకు ఏకదిష్టత గాని స్క్వీజ్ సిద్ధాంతంగాని చాలును.

12.4.8 S.A.Q.: $n > 2$ అయితే $2^{n-1} < n!$ అనేది $n = 3$ అయినప్పుడు $2^2 < 3!$ కావున $n = 3$ కి వర్తిస్తుంది. $n > 2$ కి $2^{n-1} < n!$ అనుకుంటే $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} < (n+1)(n!) = (n+1)!$ కాబట్టి గణితానుగమనం నుండి $n > 2$ అయితే $2^{n-1} < n!$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots\cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots + \frac{1}{n^n}$$

$\frac{1}{n^n} = \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ కాబట్టి కుడివైపు $1 \le r \le n$ అయినప్పుడు

$r-$వ పదం $\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) < \frac{1}{r!} < \frac{1}{2^{r-1}}$

అందుచేత $e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 3$

$e_n > 2$ అనేది స్పష్టం కాబట్టి ప్రతి n కి $2 < e_n < 3$.

12.4.9 **మొదటి మెట్టు:** ప్రతి n కి $s_n > 0$:

దత్తాంశం నుండి $s_1 > 0$. $s_n > 0$ అయితే $s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{2}{s_n}\right) > 0$ అందుచేత గణితానుగమనం నుంచి ప్రతి n కి $s_n > 0$.

రెండవ మెట్టు: $\mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $s_n > 0$ దత్తాంశం నుండి $s_1 > 0$, $s_n > 0$ అయితే

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(s_n^2 + a\right)}{s_n}$$ కాబట్టి $s_n^2 - 2s_n\ s_{n+1} + a = 0$

$x^2 - 2s_{n+1}x + a = 0$ సమీకరణానికి s_n వాస్తవ మూలం కావున ఈ సమీకరణపు విచక్షిణి అన్రుణం. అనగా $s_{n+1}^2 - a \geq 0;\ s_{n+1}^2 \geq a$.

మూడవ మెట్టు: $n \geq 2$ అయితే $s_{n+1}^2 \geq a$ కాబట్టి $s_{n+1} > \frac{a}{s_{n+1}}$

$\Rightarrow s_{n+1} > 0, s_{n+1} > \frac{a}{s_{n+1}}$ అందుచేత $\frac{1}{2}\ s_{n+1} > \frac{1}{2}\ \frac{a}{s_{n+1}} \Rightarrow s_{n+1} - \frac{1}{2}\ s_{n+1} > \frac{1}{2}\ \frac{a}{s_{n+1}}$

$$\Rightarrow s_{n+1} > \frac{1}{2}\left(s_{n+1} + \frac{a}{s_{n+1}}\right) = s_{n+2} \quad \Rightarrow s_{n+1} > s_{n+2}$$

$\Rightarrow$ ప్రతి n కి $s_{n+1} > s_{n+2}$ అనగా ప్రతి n కి $s_{n+1} \leq s_n$

నాల్గవ మెట్టు: ఏక దిష్ఠ అభిసరణ సిద్ధాంతం నుంచి (s_n) అభిసరణ చెందును.

$\ell im\ s_n = s$ అనుకుంటే $\ell im\ s_{n+1} = s$ మరియు $s > 0$ అందుచేత

$$s = \ell im\left(s_n\right) = \ell im\left(s_{n+1}\right) = \ell im\ \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right)$$ కాబట్టి $s = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right)$.

$\Rightarrow s - \frac{s}{2} = \frac{1}{2}\left(s + \frac{a}{s}\right) - \frac{s}{2} = \frac{a}{2s}$, కావున $s = \frac{a}{s}$ అనగా $s^2 = a$.

12.7.3 S.A.Q.: ప్రతి $x_n > 0$ మరియు $\ell im\ x_n = 0$ అనుకోండి. $\in > 0$ అయినప్పుడు $\mathbb{N}$లో $N(\in)$, $n \geq N(\in) \Rightarrow |x_n| = x_n < \frac{1}{\in}$ అగునట్లు లభిస్తుంది. $n \geq N(\in)$ అయితే $\frac{1}{x_n} > \in$ ఇది ప్రతీ $\in$కి వర్తిస్తుంది. కావున $\ell im\ \frac{1}{x_n} = +\infty$ విపర్యయంగా $\ell im\ \frac{1}{x_n} = +\infty$ అనుకోండి. $\in > 0$కి అనురూపంగా $\mathbb{N}$లో $N(\in)$, $n \geq N(\in)$ అయినప్పుడు $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\in}$ అగునట్లు లభిస్తుంది. కాబట్టి $n \geq N(\in)$ అయినప్పుడు $x_n = |x_n| < \in$ కాబట్టి $\ell im\ x_n = 0$.

12.7.4 S.A.Q.: (a) $\ell im\ (x_n) = \ell im\ (y_n) = +\infty$ అనుకొనుము. ($-\infty$ సందర్భంలో ఉపపత్తి ఇదే రీతిగా వుండును). $\in > 0$ అయితే సహజ సంఖ్యలు N_1, N_2 $n \geq N_1$ అయినప్పుడు $x_n > \frac{\in}{2}$, $n \geq N_2$ అయినప్పుడు $y_n > \frac{\in}{2}$ అగునట్లు వ్యవస్థితాలు. $N_\in =$ గరిష్ఠం $\{N_1, N_2\}$, $n \geq N_\in$ అయితే $n \geq N_1$ కావున $x_n > \frac{\in}{2}$, $n \geq N_2$ కావున $y_n > \frac{\in}{2}$ అందుచేత $x_n + y_n > \in$.

$\in > 0$ ఎంపిక యాదృచ్ఛికం కావున $\ell im\ (x_n + y_n) = +\infty$.

(b) $\ell im\ x_n = \ell im\ y_n = +\infty$ అనుకొనుము. ($-\infty$ సందర్భంలో ఉపపత్తి ఇదే రీతిగా వుండును). $\in > 0$ అయితే సహజ సంఖ్యలు N_1, N_2 ; $n \geq N_1$ అయినప్పుడు $x_n > \sqrt{\in}$, $n \geq N_2$ అయినప్పుడు $y_n > \sqrt{\in}$ అగునట్లు వ్యవస్థితాలు. $N(\in) =$ గరిష్ఠం $\{N_1, N_2\}$, $n \geq N$ అయితే $x_n > \sqrt{\in} > 0$ మరియు $y_n > \sqrt{\in} > 0$ కావున $x_n\ y_n > \sqrt{\in}\ \sqrt{\in} = \in$. $\in > 0$ ఎంపిక యాదృచ్ఛికం కావున $\ell im\ (x_n\ y_n) = +\infty$.

12.9 సారాంశం:

ఏకదిష్ఠ అనుక్రమాల ప్రాముఖ్యత, అనువర్తనాలు, హద్దులు గుర్తింపు, అనుక్రమాల ప్రవర్తనలో ఉప అనుక్రమాల పాత్ర, బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం ప్రాధాన్యత, కోషీ అభిసరణ సూత్రం ఇత్యాది విషయాలను వివరంగా తెలిసికొనడాన్కి తగు సామర్థ్యం ఈ పాఠాన్ని పరిశీలనాత్మకంగా చదివిన విద్యార్థికి లభిస్తుంది. అంతేకాక వాస్తవ గుణకాలతో బహుపది సమీకరణం మూలాలు నిర్ణయం, వాటి ఉజ్జాయింపులకు సంకోచిత అనుక్రమాల ఉపయోగం తెలిపే స్థాయికి ఈ పాఠం విద్యార్థిని పెంచుతుంది.

12.10 సాంకేతిక పదాలు:

ఏకదిష్ఠ అనుక్రమాలు

శిఖరాలు

ఉప అనుక్రమం

పరిబద్ధ అనుక్రమం

సంకోచిత అనుక్రమం

12.11 అభ్యాసం:

12.11.A.: 1. (a_n) ఆరోహణ అనుక్రమమైతే $\left(\frac{a_1+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)$ ఆరోహణమని చూపుము.

2. (a_n) అవరోహణ అనుక్రమమైతే $\left(\frac{a_1+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)$ అవరోహణమని చూపుము.

3. (a_n) ఆరోహణ అనుక్రమం $a_n > 0$ అయితే $(\log a_n)$ ఆరోహణమని చూపుము.

4. ప్రతి n కి $a_n > 0$, (a_n) ఆరోహణ అనుక్రమమైతే $\left\{(a_1 a_2 \cdots\cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\right\}$ ఆరోహణ అనుక్రమమని చూపుము.

5. 4వ లెక్కని అవరోహణ అనుక్రమమని చూపుము.

6. $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{2}{1+x_n}$ అనుకొనుము. (x_{2n-1}) (x_{2n}) అనుక్రమాలలో ఒకటి ఆరోహణం రెండోది అవరోహణము, రెండు ఉప అనుక్రమాలు అభిసరిస్తాయని, ఒకే అవధి కలిగి వుంటాయని చూపి తద్వారా (x_n) అభిసరిస్తుందని చూపుము.

7. $k > 0$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \sqrt{k + x_n}$ అని నిర్వచించి, (x_n) ఏకదిష్ఠం, పరిబద్ధ అనుక్రమమని చూపుము. $\ell im\ x_n = \alpha$ అయితే $\alpha^2 = \alpha + k$ అని చూపుము.

8. $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{2}{x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ అయితే కిందివి నిరూపించుము.

   (a) ప్రతి n కి $x_n > 0$

   (b) $(x_{n+1} - x_n)$ మరియు $(x_n - x_{n-1})$ రెండూ ధనాత్మకం లేదా రెండూ ఋణాత్మకము

(c) (x_{2n-1}) ఆరోహణం (x_{2n}) అవరోహణం రెండు ఉపక్రమాలు పరిబద్ధము.

(d) $\ell im\,(x_n)$ వ్యవస్థితమా?

9. $c>1,\quad x_n = c^{\frac{1}{n}}$ అనుకొనుము.

(a) $\mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $1< x_{n+1} < x_n \le c$ అని

(b) $\ell im\; x_n = 1$ అని చూపుము.

10. $x_1 > 1,\quad x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$ అయితే $1 < x_n < 2$ అనీ, (x_n) అవరోహణమనీ చూపి, $\ell im\; x_n$ కనుగొనుము.

11. $x_1 \ge 2,\ x_{n+1} = 1+\sqrt{x_n - 1}\ (n \in \mathbb{N})$ అయితే (x_n) అవరోహణ పరిబద్ధ అనుక్రమమనీ చూపి $\ell im\; x_n$ కనుగొనుము.

12. $x_1 \ge 2,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\ (n \in \mathbb{N})$ అయితే (x_n) అభిసరణ చెందునని చూపి $\ell im\,(x_n)$ కనుగొనుము.

13. $P > 0,\ y_1 = \sqrt{P},\quad y_{n+1} = \sqrt{P + y_n}\quad (n \in \mathbb{N}).\quad (y_n)$ అభిసరిస్తుందని చూపి $\ell im\,(y_n)$ కనుగొనుము. (అభ్యాసము 7 చూడుము)

14. (a_n) ఆరోహణ అనుక్రమం (b_n) అవరోహణ అనుక్రమం, ప్రతి n కి $a_n \le b_n$ అనుకొనుము.

(a) $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n\ (n \in \mathbb{N})$ అని చూపుము.

(**సూచన:** $b_n < a_n$ అను కొనడం ఖండనాంశాన్కి (contradiction) దారితీస్తుందని చూపుము)

(b) దీన్నించి $\ell im\,(a_n) \le \ell im\,(b_n)$ రాబట్టుము.

(c) $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ ప్రతి n కి జరిగితే, $\ell im\; a_n = \ell im\; b_n$ అని చూపుము.

15. $I_n = [a_n, b_n],\ I_n$ ప్రతి n కి $I_n \supseteq I_{n+1}$. అయితే ప్రతి I_n లోను ఒక α వుంటుందని 14 నుండి రాబట్టుము.

$b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}\ (n \in \mathbb{N})$ అయితే ఇట్టి α ఏకైకమని చూపుము.

12.11.B.:

1. ప్రతి n కి $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ అయితే $I_n \supseteq I_{n+1}$ అని చూపి $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ కనుగొనుము.

2. $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ అయితే $I_n \supseteq I_{n+1}$ అని చూపి $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$ అని చూపుము.

3. ప్రతి n కి $K_n = [n, \infty) = \{x / x \in \mathbb{R},\ x \geq n\}$ అయితే $K_n \supseteq K_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ అని $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \phi$ అని చూపుము.

4. అభిసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం కలిగివున్న అపరిబద్ధ అనుక్రమాన్కి ఒక ఉదాహరణనిమ్ము $(1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \cdots\cdots\cdots)$.

5. (x_n) అపరిబద్ధ అనుక్రమమైతే $\ell im \left(\frac{1}{x_{n_k}}\right) = 0$ అగునట్లు ఒక ఉప అనుక్రమం (x_n)లో వుంటుందని చూపుము.

   (సూచన - $\mathbb{N}$లోని ప్రతి k కి $x_{n_k} > k, n_k > k$ అగునట్లు $\mathbb{N}$లో n_k ఎంపిక చేయుము.)

6. అనుక్రమం (x_n)లో ప్రతి పదము శిఖరమైతే (x_n) అవరోహణ చెందునని చూపుము.

7. $\left\{(-1)^n\right\}$ అనుక్రమానికి అన్ని శిఖరాలను కనుగొనుము.

8. $k \geq n_0$ అయితే $x_{n_0} \leq x_k$ అయినప్పుడు (x_n) అనుక్రమాన్కి x_{n_0} పాదమని అనుకొనుము.

   (a) x_m (x_n)కి పాదము కావడానికి $-x_m$ $(-x_n)$కి శిఖరం కావడం తుల్యమని చూపుము.

   (b) ఒక అనుక్రమంలో ఏకదిష్ఠ అనిక్రమం ఎంచుకొనడాన్కి ఏకదిష్ఠ ఉప అనుక్రమ సిద్ధాంతంలో శిఖరాల బదులు పాదాలనుపయోగించి నిరూపించవచ్చునని చూపుము.

9. బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతంలోని పద్ధతి యొక్క తతంగాన్ని $\left(\frac{1}{n}\right)$ మరియు $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ అనుక్రమాలకి అనువర్తింపచేయుము.

12.11.C.:

1. కోషీ అభిసరణ నియమం పాటించని పరిబద్ధ అనుక్రమాన్కి ఉదాహరణనిమ్ము.

2. నిర్వచనం నుండి నేరుగా కింది అనుక్రమాలు కోషీ అనుక్రమాలు అని చూపండి.

   (a) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (b) $\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

3. నిర్వచనం నుండి నేరుగా కింది అనుక్రమాలు కోషీ అనుక్రమాలు కాదని చూపండి.

   (a) $\left((-1)^n\right)$ (b) $\left(n+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ (c) $(\ell n \;\; n)$

4. నిర్వచనం నుండి నేరుగా (x_n), (y_n) కోషీ అనుక్రమాలైతే $(x_n + y_n)$, $(x_n \; y_n)$ కోషీ అనుక్రమాలని చూపండి.

5. (x_n) పూర్ణాంకాల అనుక్రమమైతే $|x_n - x_m| = 0$ లేదా సహజ సంఖ్య అని చూపండి. (x_n) పూర్ణాంకాల కోషీ అనుక్రమమైతే ఒక దశ తర్వాత అన్ని n లకు $x_n = k$ అగునట్లు పూర్ణాంకం k వుంటుందని రాబట్టండి.

6. P సహజ సంఖ్య, $x_n = \sqrt{n}$ అయితే $|x_{n+p} - x_n| < \frac{P}{2\sqrt{n}}$ అని చూపుము. దీన్నించి

   $\ell im\, |x_{n+p} - x_n| = 0$ అని రాబట్టుము.

7. క్రింది అనుక్రమాల అభిసరణీయత నిర్ధారించుము.

   (a) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ (b) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$ (c) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2}$ (d) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}$

   సూచన: $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ అనుకుని పై ప్రతి పదాన్ని (e_n)లోని పదాల ద్వారా వ్యక్తపరచండి. ఉదాహరణకి (a)లోని పదం e_{n^2} మరియు (b)లోని పదం $\sqrt{e_{2n}}$.

8. (a) $\ell im \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, (b) $\ell im\, (3n)^{\frac{1}{2n}}$ కనుగొనుము.

9. (x_n) పరిబద్ధ సమితి, $s =$ క.ఎ.హ. $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ అనుకొనుము. ప్రతి nకి $s \neq x_n$ అయితే $\mathbb{N}$లోని ప్రతి kకి ఒక సహజ సంఖ్య n_k, $n_k < n_{k+1}$, $s - \frac{1}{k} < x_{n_k}$ అగునట్లు వుంటుందని చూపి $\ell im\, x_{n_k} = s$ అని రాబట్టండి.

10. x_1, x_2 వాస్తవ సంఖ్యలు $x_1 < x_2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$గా నిర్వచిస్తే (x_n) అనుక్రమం అభిసరణ చెందుతుందని చూపుము. $\ell im\,(x_n)$ కనుగొనుము. **(సూచన:** 12.6.10 ఉపయోగకరం కావచ్చు)

11. x_1, x_2 వాస్తవ సంఖ్యలు $x_1 < x_2$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}x_{n-1}$ అయితే (x_n) సంకోచించే అనుక్రమమని అందుచేత అభిసరణ చెందునని చూపి $\ell im\,(x_n)$ కనుగొనుము.

12. $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ అయితే $0 < x_n < \frac{1}{2}$, $|x_{n+2} - x_n| < \frac{1}{4}|x_{n+1} - x_n|$ అని చూపి తద్వారా (x_n) సంకోచిత అనుక్రమమని రాబట్టండి. $\ell im\,(x_n)$ కనుగొనండి.

13. $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ అయితే ప్రతి nకి $x_{n+1} > 2$, $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{1}{4}|x_{n+1} - x_n|$ అని చూపి (x_n) సంకోచిత అనుక్రమమి రాబట్టి $\ell im\,(x_n)$ కనుగొనుము.

14. $0 < x_1 < 1$, ప్రతి nకి $x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^3 + 1\right)$ అయితే $|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{3}{5}|x_{n+1} - x_m|$ అని చూపి దాన్నించి (x_n) అనుక్రమం $x^3 - 5x + 1 = 0$ సమీకరణపు మూలాన్కి అభిసరిస్తుందని చూపుము. $x_1 = \frac{1}{2}$ అయితే x_2, x_3, x_4, x_5 కనుగొనుము.

12.11.D.:

1. (x_n) అపరిబద్ధ అనుక్రమమైతే అపసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం (x_n)లో వుండునని చూపుము.

(సూచన: (x_n) ఎగువ నుండి అపరిబద్ధమైతే ప్రతి సహజ సంఖ్యకి అనురూపంగా $\mathbb{N}$లో $n_k, n_{k+1} > n_k > k$ మరియు $x_{n_k} > k$ అగునట్లు లభించును.)

2. $(x_n)=n$ అయితే (a) (x_n), $\left(x_n^2\right)$ శుద్ధ అపసరణ చెందుతాయని చూపుము.

(b) $\left(\dfrac{x_n}{x_n^2}\right)=\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ అభిసరిస్తుందనీ $\left(\dfrac{x_n^2}{x_n}\right)$ శుద్ధ అపసరణ చెందునని చూపుము.

3. (x_n) శుద్ధ అపసరణ చెందిన $\left(x_n^2\right)$ శుద్ధ అపసరణ చెందునని చూపుము.

4. (x_n), $(x_n\ y_n)$ శుద్ధ అపసరణ చెందిన

(a) (y_n) శుద్ధ అపసరణ చెందునా? (సూచన : $y_n=n$)

(b) (y_n) అభిసరణ చెందునా? (సూచన: $y_n=1$)

5. శుద్ధ అపసరణ నిర్ధారింపుము.

(a) $\sqrt{n}$ (b) $\sqrt{n+1}$ (c) $\sqrt{n-1}$ (d) $\dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$

6. (x_n) శుద్ధ అపసరణ చెంది $\ell im\,(x_n\ y_n)$, $\mathbb{R}$ లో వ్యవస్థితమైతే $\ell im\,(y_n)=0$ అని చూపుము.

7. ప్రతి సహజ సంఖ్య n కి $x_n>0$, $y_n>0$ అయి $\ell im\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=0$ అయినప్పుడు

(a) $\ell im\,(x_n)=+\infty \Rightarrow \ell im\,(y_n)=+\infty$

(b) (x_n) పరిబద్ధమైనప్పుడు $\ell im\,(x_n)=0$ అని చూపుము.

8. (x_n), (y_n) ధన సంఖ్యల అనుక్రమాలు $\ell im\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=+\infty$

(a) $\ell im\ y_n=+\infty$ అయితే $\ell im\ x_n=+\infty$

(b) (x_n) పరిబద్ధమైతే $\ell im\ y_n=0$ అని చూపుము.

9. $a_n>0$, $\ell im\left(\dfrac{a_n}{n}\right)=L>0$ $\ell im\ a_n=+\infty$ అని చూపుము.

10. అభిసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం కలిగివున్న అపరిబద్ధ అనుక్రమానికి ఉదాహరణనీయండి.

11. $0 < c < 1$ అయితే $\ell im\ c^{\frac{1}{n}} = 1$ అని చూపుము.

12. $x_n = 1 - (-1)^n + \frac{1}{n}\ (n \in \mathbb{N})$ అయితే $\ell im\,(x_{2n}), \ell im\,(x_{2n-1})$ వ్యవస్థితమని చూపుము. $\ell im\,(x_n)$ వ్యవస్థితమా? ఎందుచేత?

13. $x_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ అయిన $\ell im\,(x_{4n}), \ell im\,(x_{8n+2})$ కనుగొనుము. $\ell im\,(x_n)$ వ్యవస్థితమా? ఎందుచేత?

14. (a) $(n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}}$ అని చూపుము.

(b) $n \geq 3$ అయితే $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \leq n$ అని చూపుము. దీన్నించి

(c) $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$ అనుక్రమం $m > n \geq 3$ అయినప్పుడు $1 < m^{\frac{1}{m}} < n^{\frac{1}{n}}$ తృప్తిపరచునని చూపుము. అందుచేత $\ell im\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$ వ్యవస్థితమని చూపుము.

(d) $\ell im\left(n^{\frac{1}{n}}\right) = \ell$ అయితే సంప్రదాల ఉప అనుక్రమం పరిగణించి $\ell = \sqrt{L}$ అని, దాన్నించి $\ell = 1$ అని చూపుము.

15. $\ell im\,(x_n) = \ell = \ell im(y_n)$, n బేసి సంఖ్య అయినప్పుడు $Z_n = \frac{x_{n+1}}{2}$. n సరి సంఖ్య అయినప్పుడు $Z_n = \frac{x_n}{2}$ అయితే $\ell im\ Z_n = \ell$ అని చూపుము.

12.12 జవాబులు:

12.11.A. (10) 1 (11) 1 (12) 2

12.11.B. (1) {0} (7) $\{a_2, a_4, a_6, a_8, \cdots\cdots\}$

12.11.C. (6) 0 (9) $\sqrt{2} - 1$ (10) $\sqrt{2} + 1$

12.11.D. (4) (a) కాదు (b) కాదు.

(11) $x_{2n} = \frac{1}{n}, \quad x_{2n-1} = n$

(12) $\ell im\ x_{2n} = 1,\ \ell im\ x_{2n-1} = 0$ అందుచేత $\ell im\ x_n$ వ్యవస్థితం కాదు.

(13) $\ell im\ x_{4n} = 0 \quad \ell im\ x_{8n+2} = 1$ అందుచేత $\ell im\ x_n$ వ్యవస్థితం కాదు.

(16) $(e) \quad e^2 \quad (f) \quad 1$

12.13 మాదిరి పరీక్షా ప్రశ్నలు:

1. వాస్తవ సంఖ్యలు ఏకదిష్ట అనుక్రమం అభిసరణకితుల్యం అది పరిబద్ధం కావడమని చూపండి. అంతేకాక

   (a) $X = (x_n)$ పరిబద్ధము అవరోహణ అనుక్రమమైతే $\ell im\ (x_n) =$ క.ఎ.హ. $\{x_n / n \geq 1\}$ అనీ

   (b) $Y = (y_n)$ పరిబద్ధము అవరోహణ అనుక్రమమైతే $\ell im\ (x_n) =$ గ.ది.హ. $\{x_n / n \geq 1\}$ అని చూపుము.

2. $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ అనుకొనుము. (e_n) అనుక్రమం ఆరోహణం మరియు పరిబద్ధం అందుచేత అభిసరణ చెందునని చూపుము.

3. అనుక్రమాలకి స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించుము.

4. $x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}\ (n \in N)$ అనుకొనుము. (x_n) అభిసరణ చెందునో, అపసరణ చెందునో నిర్ధారించుము.

5. $y_n = \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n+n} \quad (n \in \mathbb{N})$ అయితే (y_n) అభిసరణ చెందునో అపసరణ చెందునో నిర్ణయింపుము.

6. $X = (x_n)$ వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమమైతే X లో ఏకదిష్ట ఉప అనుక్రమం వుంటుందని నిరూపించుము.

7. అనుక్రమాలకు బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించుము.

8. $X = (x_n)$ పరిబద్ధ వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమం, $x \in \mathbb{R}$, X లో అభిసరించే ప్రతి ఉప అనుక్రమం x కి అభిసరిస్తే X, x కి అభిసరిస్తుందని చూపుము.

9. $x_1 = 1, x_2 = 2 \quad x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ $(n > 2)$ అయితే

(a) గణితాను గమనం నుండి, $n \in \mathbb{N}$ అయితే $1 \le x_n \le 2$

(b) $X = (x_n)$ ఏకదిష్టం కాదు

(c) $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N})$ అని చూపుము.

10. ప్రతి సంకోచిత అనుక్రమం కోషీ అనుక్రమమనీ, అందుచేత అభిసరణ చెందుననీ నిరూపించుము.

12.14 మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య- సాధన:

సమస్య: $0 < x_1 < 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ అయితే (x_n) అనుక్రమం $x^2 - x - 1 = 0$ సమీకరణ ధన మూలానికి అభిసరణ చెందునని చూపుము.

నిర్వచనం: (x_n) అనుక్రమం $x \in \mathbb{R}$. ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\mathbb{N}$లో $N(\in)$, $n \ge N(\in)$ అయితే $|x_n - x| < \in$ అగునట్లుగా వ్యవస్థితమైతే (x_n), x కి అభిసరణ చెందుతుంది అంటాము.

ఉపయోగించే సిద్ధాంతాలు:

1. (x_n) పరిబద్ధ ఆరోహణ అనుక్రమమైతే (x_n) అభిసరణ చెందును.

2. (x_n), x కి అభిసరిస్తే (x_n)లోని ప్రతి ఉప అనుక్రమం x కి అభిసరిస్తుంది.

3. గణితానుగమన సూత్రం - సహజ సంఖ్యల లక్షణం $P(n)\cdot$ $n = 1$ అయినప్పుడు నిజమై $P(n)$ నిజమైనప్పుడు $P(n+1)$ నిజమైతే $P(n)$ ప్రతి సహజ సంఖ్యకి నిజము.

4. ప్రతి nకి $x_n > 0$, $\ell im\,(x_n) = x$ అయితే $\ell im\,(\sqrt{x_n}) = \sqrt{x}$

5. $\ell im\,(x_n) = \ell$, $\ell im\,(x_n) = \ell'$ అయితే $\ell = \ell'$.

సాధనకి దశల వారీ విభజన:

(a) $0 < x_n < 2 \quad (n \in \mathbb{N})$

(b) (x_n) ఆరోహణ అనుక్రమం

(c) $x = \ell im\; x_n$ అయితే $x^2 = x + 1$.

దశల వారీ సాధన:

గణితాను గమనం ద్వారా (a) నిరూపణ:

$0 < x_1 < 2$ అని స్పష్టం.

ప్రతి n కి $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} > 0$. $0 < x_n < 2$ అయితే $0 < 1+x_n < 1+2 \le 3 < 4$

కాబట్టి $0 < \sqrt{1+x_n} < 2$ అనగా $0 < x_{n+1} < 2$

గణితానుగమనం నుండి ప్రతి n కి $0 < x_n < 2$.

(b) $x_{n+1}^2 = 1+x_n \Rightarrow x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n - x_{n-1} \Rightarrow (x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n) = x_n - x_{n-1}$

$x_{n+1}+x_n > 0$ కావున $x_{n+1}-x_n > 0$ లేదా $<0 \Leftrightarrow x_n - x_{n-1} > 0$ లేదా <0

$x_2 - x_1 = \sqrt{1+x_1} - x_1 = \sqrt{1+1} - x_1 > 1 - x_1 > 0$ కావున

ప్రతి n కి $x_{n+1} - x_n > 0$ అందుచేత (x_n) ఆరోహణ అనుక్రమం

(c) (x_n) ఆరోహణ పరిబద్ధ అనుక్రమం కావున అభిసరణ చెందును. కాబట్టి $\ell im\,(x_n) = x$ అయితే $\ell im\; x_{n+1} = x$ (2 బట్టి)

$\ell im\; 1+x_n = 1+x$ అందుచేత $\ell im\sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+x}$ (3 బట్టి)

అనగా $\ell im\; x_{n+1} = \sqrt{1+x}$

(5) నుండి $x = \sqrt{1+x}$. కాబట్టి $x^2 = 1+x$ అనగా $x^2 - x - 1 = 0$

$x = \sqrt{1+x}$ కాబట్టి $x \ne 0$. $0 \le x_n \le 2$ కాబట్టి $0 < x \le 2$.

పాఠ్యభాగ రచయిత

I. రామభద్ర శర్మ

బ్రూక్ టేలర్ (1685-1731)

బ్రూక్ టేలర్ బ్రిటీష్ గణితశాస్త్రవేత్త. ''పరిమిత భేదాల కలన గణితవ ు''గా ప్రస్తుతం పిలువబడే క్రొత్త అంశాన్ని ఆయన గణిత శాస్త్రముల ో చేర్చారు. ఆయన విభాగ సమాకలనం కనుగొని, ప్రసిద్ధిగాంచిన టే లర్ విస్తరణ ప్రకటించాడు.

13. అనంత శ్రేణులు

13.1 లక్ష్యం: విద్యార్థికి అనంతశ్రేణులు, శ్రేణుల అభిసరణ, కోషి సార్వత్రిక స్థాపత, తులనాత్మక పరీక్షలు, లైబ్నిజ్ పరీక్ష మొదలైన వాటి గురించి పరిచయం చేయడం ఈ పాఠం లక్ష్యం.

13.2 రూపము: ఈ పాఠాన్ని క్రింది విధంగా విభజించాము.

13.3. ఉపోద్ఘాతం
13.4 నిర్వచనములు, కొన్ని ప్రాథమిక ఫలితాలు
13.5 తులనాత్మక పరీక్షలు
13.6 అనువర్తనాలు
13.7 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నల సాధనలు
13.8 సారాంశము
13.9 సాంకేతిక పదాలు
13.10 అభ్యాసములు
13.11 మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య - సాధన
13.12 నమూన పరీక్ష ప్రశ్నలు

13.3 ఉపోద్ఘాతం: గణిత విశ్లేషణలోని పలు అంశాలకు వుపకరించే అనంతశ్రేణిలను ఈ పాఠంలో పరిచ యం చేయడం జరుగుతుంది. అనంతశ్రేణిల గురించి వివరాలెన్నో వున్నప్పటికి ప్రస్తుత పాఠ్య ప్రణాళికలో గల హద్దుల రీత్యా తగినంతగా మాత్రమే ఇక్కడ చర్చించడం జరుగుతుంది. ముఖ్యంగా శ్రేణిల అభిసర ణ, కోషీ సార్వత్రిక సూత్రం, శ్రేణిల అపసరణ వంటి ముఖ్యాంశాలు, తులనాత్మక పరీక్షలు, కోషీ సాంద్రీక రణ పరీక్ష యిత్యాది విషయాలను ప్రస్తావించడం జరుగుతుంది.

13.4. నిర్వచనములు, కొన్ని ప్రాథమిక ఫలితాలు

13.4.1 నిర్వచనాలు: $X = (x_n)$ వాస్తవ అనుక్రమం అయితే

$s_1 = x_1$, $s_n = s_{n+1} + x_n$ ల ద్వారా అనుగమనాత్మకంగా నిర్వచితమయ్యే అనుక్రమం (s_n) అనంతశ్రేణి అంటాము. $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$ సార్వత్రికంగా $n \geq 1$ అయితే $s_n = x_1 + \ldots\ldots + x_n$ అని స్పష్టము. (s_n) అనంతశ్రేణిని $\sum x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_1 + x_2 + \ldots.. + x_n + \ldots.$ ల ద్వారా సూచిస్తాము. కొన్ని సందర్భాలలో $\sum x_n$ అని కూడా వ్రాస్తాము. అనంతశ్రేణికి x_n n–వ పదమనీ, s_n, n –వ పాక్షిక మొత్తమనీ అంటాము. $\sum x_n$ అనంతశ్రేణి పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమం (s_n) అని కూడా వ్యవహరించడం కలదు. అనుక్రమం (s_n) అభిసరిస్తే అనంతశ్రేణి $\sum x_n$ అభిసరిస్తుందని, ఈ సందర్భములో $\lim s_n$ అనంతశ్రేణి $\sum x_n$ మొత్తం అనీ అంటాము, $\sum x_n = \lim s_n$ అని వ్రాస్తాము. $\lim\limits_{n} s_n$ వ్యవస్థితం కాకపోతే, అనంతశ్రేణి అపసరిస్తుందని అంటాము.

13.4.2 ఉదాహణలు:

$r \in 3$ అయితే అనంతశ్రేణి $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ని గుణశ్రేఢి అంటాము. దీనిలో n - వ పదము $x_n = r^{n-1}$

ఈ శ్రేణి n వ పాక్షిక మొత్తము $s_n = 1 + r + r^2 + \ldots r^{n-1}$. $r\,s_n = r + r^2 + \ldots + r^n$

$\Rightarrow (1 - r)\, s_n = 1 - r^n$ $\quad r \neq 1$ అయితే $s_n = \dfrac{1-r^n}{1-r}$

సందర్భము - 1: $|r| < 1$ అయితే $\lim (r^n) = 0$ కాబట్టి $\lim (s_n) = \lim\limits_{n} \left(\dfrac{1-r^n}{1-r}\right) = \dfrac{1-\lim r^n}{1-r} = \dfrac{1}{1-r}$ కాబట్టి $|r| < 1$ అయితే అనంతశ్రేణి $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, అభిసరిస్తుంది. దీని మొత్తము $\dfrac{1}{1-r}$. అనగా $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \dfrac{1}{1-r}$

సందర్భము - 2: $r = 1$ అయితే $s_n = n$, $\lim s_n = +\infty$ ఈ సందర్భంలో అనంతశ్రేణి $+\infty$ కి అపసరిస్తుంది.

సందర్భము - 3: $r = -1$ అయితే $s_{2n} = 0$, $s_{2n+1} = 1$ కనుక (s_n) అనుక్రమము అభిసరించదు.

$\therefore$ $r = -1$ కు అనంతశ్రేణి అపసరిస్తుంది. $|r| > 1$ సందర్భాన్ని తరువాత చర్చించడం జరుగుతుంది.

13.4.3 ఉదాహరణ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

ఈ అనంతశ్రేణిలో n - వ పదం = $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots. + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_n (s_n) = \lim_n (1- \frac{1}{n+1}) = 1 - \lim (\frac{1}{n+1}) = 1 - 0 = 1.$$

కాబట్టి $\lim_n s_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

13.4.4 (n - వ పదం పరీక్ష)

సిద్ధాంతం: అనంతశ్రేణి $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అభిసరిస్తే $\lim x_n = 0$

ఉపపత్తి: $\sum x_n$ అనంతశ్రేణి n -వ పాక్షిక మొత్తముల అనుక్రమము (s_n) అనుకుంటే

$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $s_{n+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}$ కనుక $s_{n+1} - s_n = x_{n+1}$

అనంతశ్రేణి $\sum x_n$ అభిసరిస్తే, $\lim (s_n)$ వ్యవస్థితం అవుతుంది. (s_{n+1}) అనేది (s_n) యొక్క ఉపానుక్రమము కనుక $\lim s_{n+1} = \lim s_n$ కనుక $\lim x_{n+1} = \lim (s_{n+1} - s_n) = \lim x_n = 0$

గమనిక: అనంతశ్రేణుల అపసరణ నిర్ధారణకి ఈ పరీక్ష చాలా ఉపయోగపడ్తుంది. ఈ పరీక్ష విపర్యయవము నిజము కాదు. "$\lim x_n = 0$" అయినప్పటికీ అనంతశ్రేణి అపసరించవచ్చునని కింది ఉదాహరణ ద్వారా తెలుస్తుంది.

13.4.5 ఉదాహరణ:

i) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$

$\lim x_n = \lim\limits_{n}(1- \dfrac{1}{n+1}) = 1 - \lim \dfrac{1}{n+1} = 1 \neq 0$

$\sum x_n$ అభిసరిస్తే $\lim x_n = 0$ కావలె. అందుచేత $\sum x_n$ అపసరిస్తుంది.

ii) $r \in 3$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ గుణశ్రేఢిలో, $|r| < 1$ అయితే అనంతశ్రేణి అభిసరిస్తుందనీ, $r = -1$ అయితే అపసరిస్తుందనీ ఇంతకు ముందు చర్చించాము. కానీ $|r| > 1$ అయితే $\lim\limits_{n} |r^n| = \lim\limits_{n} (|r^n|) = +\infty$ కనుక $\sum r^n$ అభిసరించదు.

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ హరాత్మక శ్రేణి (telescoping) శ్రేణి అంటాము.

n - వ పదం, $x_n = \dfrac{1}{n}$ మరియు $\lim x_n = 0$ కాని, పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమము (s_n) అపసరిస్తుందని 11వ పాఠంలో నిరూపించాము. ఈ వుదాహరణ ద్వారా పై సిద్ధాంతానికి విపర్యయము నిజము కాదని నిరూపించడమైనది.

ఉదాహరణ (iv) మరో ఆసక్తికరమైన వుదాహరణ (11.4.9 చూడుము) ఏకాంతర హారాత్మక శ్రేణి

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ...$

ఈ శ్రేణిలో n - వ పదం $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ హరాత్మకశ్రేణి లోవలెనే ఈ శ్రేణిలో $\lim x_n = \lim \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$

s_n , n – వ పాక్షిక మొత్తమైతే

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$s_{2n+1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \;..... \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1} = s_n + \frac{1}{2n+1}$$

$$0 < s_{2n} + \frac{1}{2n+1} = s_{2n+1} \leq 1 \text{ మరియు } s_{2n+2} = s_{2n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) > s_{2n}$$

$s_{2n+3} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$ ………. - $\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$ - $\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3}\right) < s_{2n+1}$

కాబట్టి $0 < s_{2n} < s_{2n+2} + 1$ మరియు $0 < s_{2n+3} < s_{2n+1} < 1$

$\therefore$ (s_{2n}) పరిబద్ధ ఆరోహణ అనుక్రమము మరియు (s_{2n+1}) పరిబద్ధ అవరోహణ అనుక్రమము.

$\Rightarrow$ (s_{2n}) మరియు (s_{2n+1}) అభిసరిస్తాయి.

$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ కనుక $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} + \lim \frac{1}{2n+1} = \lim s_{2n}$ (s_n) కు (s_{2n}) మరియు (s_{2n+1}) లు ఉపానుక్రమాలు. $\therefore$ (s_n) అభిసరిస్తుంది మరియు $0 \le \lim s_n \le 1$

$\therefore$ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ………..$- \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ + …….. అనంతశ్రేణి అభిసరిస్తుంది.

13.4.6 **p – శ్రేణులు:** p వాస్తవ సంఖ్య అయితే అనంతశ్రేణి $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, P– శ్రేణి అంటాము. దీని n–వ పదం = $x_n = \frac{1}{n^p}$ పాక్షిక మొత్తం = $s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots.. + \frac{1}{n^p}$. $p \le 1$ అయితే p – శ్రేణి అపసరిస్తుందనీ మరియు $p > 1$ అయితే p – శ్రేణి అభిసరిస్తుందనీ నిరూపిద్దాము.

సందర్భము 1. $p = 0$ అయితే ప్రతి n కి $x_n=1$, $s_n = n \Rightarrow \lim_n s_n = +\infty \Rightarrow \sum x_n$ శ్రేణి అపసరిస్తుంది.

సందర్భము 2. $p < 0$ ప్రతి n కి, $x_n = \frac{1}{n^p} \ge 1$ p -శ్రేణి $\sum x_n$ అపసరిస్తుంది.

సందర్భము 3: $p = 1$ p - శ్రేణిలో n -వ పదం = $\frac{1}{n}$. అనగా p శ్రేణి, హరాత్మక $\sum \frac{1}{n}$ అవుతుంది.

13.4.5 (iii) లో ఇది అపసరిస్తుందని చూశాము.

సందర్భము 4: $p = 2$; 2 – శ్రేణి అయితే, $x_n = \frac{1}{n^2} > 0$

కాబట్టి $s_{n+1} = s_n + x_n > s_n$ 2-శ్రేణి పాక్షిక మొత్తముల అనుక్రమము (s_n) ఆరోహణ అనుక్రమము. దీని ద్వారా $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

అభిసరణను నిరూపించడానికి, పాక్షిక మొత్తం అనుక్రమము (s_n) పరిబద్ధమని చూపుతాము.

ప్రతి j కి , $k_j = 2^j - 1$ అయితే, $k_1 = 2^1 - 1 = 1$, $s_{k_1} = x_1 = 1$

$k_2 = 2^2 - 1 = 3;$ $\quad s_{k_2} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2}$

$k_3 = 2^3 - 1 = 7;$ $\quad s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$

$k_{j-1} = 2^{j-1} - 1,\ s_{k_{j-1}} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{j-2}}$ అనుకుంటే

$k_j = 2^j - 1,\ s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots.. + \frac{1}{2^{j-1}}$ అని చూపుదాము.

$$s_{k_j} = s_{2^j - 1} = s_{k_{j-1}} + \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{k^2}$$

అనుగమన సిద్ధాంతాన్ని బట్టి $s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{2^{j-2}}$ $(2^{j-1})^2$, $(2^{j-1} + 1)^2$, …. $(2^j)^2$ లలో ప్రతిపదము $(2^{j-1})^2$ కంటే పెద్దది.

$\frac{1}{(2^{j-1}+k)^2} < \frac{1}{(2^{j-1})^2}$ (ప్రతి $0 \le k \le 2^{j-1} - 1$)

$$\Rightarrow \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{k^2} < \frac{2^{j-1}}{(2^{j-1})^2} = \frac{1}{2^{j-1}}$$

$$\therefore\ s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots.. + \ldots.. + \frac{1}{2^{j-2}} + \frac{1}{2^{j-1}}$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots$ అనే గుణశ్రేఢి అభిసరిస్తుంది మరియు శ్రేణి మొత్తము '2' అంతేకాక ఈ మొత్తము, ఈ గుణశ్రేఢి పాక్షిక వెయత్తముల అనుక్రమము (t_j) యొక్క కనిష్ఠ ఎగువ హద్దు.

ప్రతి j విలువకు $t_j = 1 + \frac{1}{2} + \ldots. + \frac{1}{2^{j-1}} < 2$ కనుక $s_{k_j} < 2$

$\therefore$ (s_n) అనుక్రమము పరిబద్ధ ఆరోహణ అనుక్రమము ప్రతి n కి $n \le 2^j-1 = k_j$ అగునట్లు j లభ్యమౌతుంది కనక $s_n \le s_{k_j} < 2$

$\therefore$ (s_n), పరిబద్ధము, అందుచేత అభిసరిస్తుంది.

అనగా $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ అభిసరిస్తుంది.

(v) $p > 1$ అయితే, p -శ్రేణి $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ అభిసరిస్తుంది.

p=2 అయినపుడు p-శ్రేణి నిరూపణనే ఇక్కడ అన్వయం చేయవచ్చు. అనగా పాక్షిక మొత్తముల అనుక్రమం (s_n) ఆరోహణ అనుక్రమము మరియు పరిబద్ధము కనుక అభిసరిస్తుంది. అనగా p–శ్రేణి అభిసరిస్తుందని నిరూపించవచ్చును.

$k_j = 2^j - 1$ $r = \frac{1}{2^{p-1}}$ అనుకుంటే, అనుగమన సిద్ధాంతం ప్రకారం

$s_{k_j} < 1 + r + r^2 + \ldots + r^{j-1} < \frac{1}{1-r}$ అని నిరూపిద్దాం. j=1 అయితే, $k_1 = 1 \Rightarrow s_1 = 1 < \frac{1}{1-r}$

$s_{k_{j-1}} < 1 + r + r^2 + \ldots + r^{j-2}$ నిజము అనుకుంటే $p = 2$ సందర్భంలోవలే $s_{k_j} = s_{k_{j-1}} + \sum_{k=0}^{2^j-1} x_{2^{j-1}+k}$

$< 1 + r + r^2 + \ldots + r^{j-1}$

$0 < r < 1$ కనుక, గుణశ్రేఢి $\sum_{j=0}^{\infty} r^j$ అభిసరిస్తుంది, ఈ గుణశ్రేఢి మొత్తము $\frac{1}{1-r}$

$\therefore$ $s_{k_j} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{r^j} = \frac{1}{1-r}$ (s_n) పరిబద్ధం మరియు ఆరోహణం కనక p-శ్రేణి అభిసరిస్తుంది.

(vi) $0 < p < 1$ అయితే p – శ్రేణి అపసరిస్తుంది: $p = 1$ సందర్భము నిరూపించడమైనది.

$0 < p < 1$ సందర్భంలో $1 - p > 0 \Rightarrow n^{1-P} > 1 \Rightarrow n > n^p$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$$

$\therefore$ $t_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \Rightarrow s_n > t_n$ మరియు హరాత్మకశ్రేణి అపసరిస్తుంది. (t_n) అపరిబద్ధము.

$\therefore$ పాక్షిక మొత్తముల అనుక్రమము (s_n) అపరిబద్ధము.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$ అపసరిస్తుంది.

13.4.7 **స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ వాస్తవ సంఖ్యల అనంతశ్రేణి అభిసరిస్తే, $\in>0$

అయినప్పుడు ప్రతి $k \geq N_{\in}$ కి $\left|\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n\right| < \in$ అయ్యేటట్లు $N_{\in}$ వ్యవస్థితం అవుతుందని చూపండి.

13.4.8 బీజీయ ధర్మములు: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ అభిసరించే శ్రేణులు అయితే

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ అభిసరిస్తుంది మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

ii) ప్రతీ $\sum_{n=1}^{\infty} c\, x_n$ అభిసరిస్తుంది మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} c\, x_n = c \sum_{n=1}^{\infty} c\, x_n$

ఉపపత్తి:

i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, మరియు ఈ అనంత శ్రేణుల n – పాక్షిక మొత్తాలు వరుసగా

$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$; $t_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ అనుకుంటే

$\lim (s_n + t_n) = \lim s_n + \lim t_n = x + y$

$\sum (x_n + y_n)$ అనంతశ్రేణి యొక్క n- వ పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమం u_n అనుకుంటే,

$u_n = (x_1+ y_1)+ (x_2 + y_2)+\ldots+ (x_n + y_n) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + y_1 + (y_2 + \ldots + y_n)$

$= s_n + t_n$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ అనంతశ్రేణి n – పాక్షికమొత్తం (u_n) అనుక్రమం అభిసరిస్తుంది. మరియు $\lim u_n = \lim x_n + \lim y_n = x + y$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} c\, x_n$ అనంతశ్రేణి n –పాక్షిక మొత్తం అనుక్రమం (υ_n) అనుకుంటే,

$\upsilon_n = c\, x_1 + c\, x_2 + \ldots C\, x_n = c\, (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = c\, s_n$

కాని $\lim s_n = x$ కాబట్టి $\lim \upsilon_n = \lim (c\, s_n) = c \lim s_n = c\, x$

$\Rightarrow (\upsilon_n)$ అనుక్రమం అభిసరిస్తుంది. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c\, x_n$ అభిసరిస్తుంది మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} c\, x_n = c\, x$

13.4.9 అనంతశ్రేణుల కోషి సార్వత్రిక సిద్ధాంతము.

సిద్ధాంతము: అనంతశ్రేణి $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అభిసరించడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం: ఇచ్చిన $\in>0$ కి అనుగుణంగా, $m > n \geq M(\in)$ అయినప్పుడు $|s_m - s_n) = |x_{n+1} + \ldots. + x_m| < \in$ అయ్యేటట్లు $M(\in)$ వుంటుంది.

ఉపపత్తి: అనంతశ్రేణి $\sum x_n$ పాక్షిక మొత్తముల అనుక్రమము (s_n) అనుకుందాము. ప్రతి m, n లకి $s_n = x_1 + x_2 + \ldots.. + x_n$, $s_m = x_1 + x_2 + \ldots\ldots.. + x_m$ $m > n$ అయినపుడు

$s_m - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots. + x_n$

$\sum x_n$ శ్రేణి అభిసరించడాన్కి పాక్షికమొత్తాల అనుక్రమము (s_n) (అనుక్రమాల) కోషి సార్వత్రిక సిద్ధాంతాన్ని పాటించడం ఆవశ్యకం పర్యాప్తం కాబట్టి $\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది. దీనికి ముఖ్యంగా ఇచ్చిన ప్రతి $\in> 0$ కి అనుగుణంగా, $m \geq M(\in)$, $n \geq M(\in)$ అయినప్పుడు $|s_m - s_n| < \in$ అయ్యేటట్లు $M(\in)$ వ్యవస్థితం. అనగా $m > n > M(\in)$ అయినపుడు $|x_m - s_n| = |x_{n+1} + \ldots + x_m| < \in$ అయ్యేటట్లు $M(\in)$ వ్యవస్థితం.

గమనిక: అనంతశ్రేణులలో అభిసరణలో ఉపయోగపడే అతిముఖ్యమైన తులనాత్మక పరీక్ష ఈ కోషి సార్వత్రిక సూత్రము. ప్రతి n కి $x_n > 0$ అయితే, అనంతశ్రేణి $\sum x_n$ ధనాత్మక పదశ్రేణి అనీ, $x_n \geq 0$ అయితే ఋణేతర పదశ్రేణి అని అంటాము. ముందుగా వొక తేలికపాటి లెమ్మా నిరూపిద్దాము.

13.4.10 లెమ్మా: అనంతశ్రేణి $\sum x_n$ ఋణేతర పదశ్రేణి అయితే అభిసరిస్తుంది లేదా $+\infty$ కి అపసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: $s_n = x_1 + x_2 + \ldots. + x_n$ $\sum x_n$ అనంతశ్రేణి యొక్క n – పాక్షిక మొత్తం. $s_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n \geq 0$ కాబట్టి (s_n) ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అభిసరణ మరియు (s_n) అనుక్రమము అభిసరణ తుల్యములు. (s_n) అభిసరించే ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము కావాలంటే (s_n) పరిబద్ధము కావాలి. (s_n) అపరిబద్ధ అనుక్రమం అయితే $\lim_n s_n = +\infty$ కాబట్టి $\sum x_n$ శ్రేణి $+\infty$ కి అపసరిస్తుంది.

13.4.11 సంపూర్ణాభిసరణం: అనంతశ్రేణి $\sum | a_n |$ అభిసరిస్తే, అనంతశ్రేణి $\sum a_n$ సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుంది అని నిర్వచిస్తాము.

సిద్ధాంతము: అనంతశ్రేణి $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ సంపూర్ణాభిసరణం చెందితే $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ అభిసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ మరియు $t_n = |a_1| + |a_2| + \ldots\ldots + |a_n|$ అనుకుందాము.

దత్తాంశము ప్రకారం $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n|$ అభిసరిస్తుంది. కాబట్టి ప్రతీ $\in > 0$ కి అనుగుణంగా ఒక N, $m>n \geq N_{\in}$

అయితే $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \in$ అయ్యేట్లు వ్యవస్థితం.

$\Rightarrow$ ప్రతి $m > n \geq N(\in)$ కి $|t_m - t_n| = [t_m - t_n] < \in$

$\Rightarrow |s_m - s_n| \quad = |a_{n+1} + \ldots\ldots + |a_m| \leq |a_{n+1}| + \ldots.. + |a_m| = t_m - t_n < \in$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ అభిసరిస్తుంది.

గమనిక: 13.4.10. విపర్యయము నిజము కాదు.

ఏకాంతర హరాత్మక శ్రేణి (13.4.5 (v) ఉదాహరణ) అభిసరిస్తుంది కానీ 13.4.5 (iv) ప్రకారం

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$$

అపసరిస్తుంది. కనుక అభిసరణం చెందిన ప్రతి శ్రేణి సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుందని చెప్పలేము.

13.4.12 ఏకాంతర శ్రేణులు - లైబ్నిజ్ సిద్ధాంతము:

అనంతశ్రేణి $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n$ (ఏకాంతరం శ్రేణి) లో i) (x_n) ధనాత్మక పదాల అవరోహణ అనుక్రమము ii) $\lim x_n = 0$ అయితే ఈ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: $s_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i = x_1 - x_2 + x_3 - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} x_n$ అయితే $0 \leq s_n \leq x_1$ మరియు

$s_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n+1} \qquad \rightarrow$ (i)

(s_{2n}) ఆరోహణ అనుక్రమము, (s_{2n+1}) అవరోహణ అనుక్రమము. $0 < s_{2n-2} < s_{2n} < s_{2n-1} \leq x_1$ అవుతుంది. (s_{2n}) , (s_{2n+1}) అనుక్రమములు పరిబద్ధం కనుక $\lim (s_{2n})$ మరియు $\lim (s_{2n+1})$ వ్యవస్థితాలు.

$\lim x_n = 0, \lim x_{n+1} = 0$ కనుక (i) నుండి $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1}$ కాబట్టి (s_n) అభిసరిస్తుంది,

$\therefore \lim s_n = \lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$ అందుచేత $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది.

గమనిక: 13.4.5 (iii) మరియు (iv) తో ఈ సిద్ధాంతాన్ని సరిపోల్చండి.

13.5 తులనాత్మక పరీక్షలు:

13.5.1. $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ అనేవి రెండు వాస్తవ సంఖ్య అనుక్రమాలు. $m \in \angle$ ప్రతి $n \geq m$ కి $0 \leq x_n \leq y_n$ అయినపుడు a) $\sum y_n$ అభిసరిస్తే, $\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది. b) $\sum x_n$ అపసరిస్తే, $\sum y_n$ అపసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: $s_n = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$, $t_n = y_1 + y_2 + \ldots. + y_n$ అనుకోండి.

$n>m$ అయితే $s_n - s_m = x_{m+1} + \ldots. + x_n \quad \leq y_{m+1} + \ldots.. + y_n = t_n - t_m \quad \to (1)$

a) $\sum y_n$ అభిసరిస్తే, కోషి సిద్ధాంతం ప్రకారం, $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $M(\in)$, $m > n \geq M(\in)$ అయినప్పుడు $|t_m - t_n| = t_m - t_n < \in$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది. $m > n \geq M(\in)$ అయితే (1) అసమీకరణం నుండి $|s_n - s_m| = s_n - s_m \leq t_n - t_m < \in$ అందుచేత కోషి సిద్ధాంతాన్ని అనుసరించి, $\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది.

b) వీలైతే $\sum x_n$ అపసరిస్తుందని అనుకుందాము. దత్తాంశము ప్రకారం, $\sum y_n$ ధనాత్మక పదశ్రేణి కనుక ఈ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది లేదా $+\infty$ కి అపసరిస్తుంది (లెమ్మా 13.4.10) $\sum y_n$ అపసరించదు అనుకుంటే, $\sum y_n$ అభిసరిస్తుంది. (a) బట్టి $\sum x_n$ అభిసరించాలి. కాని మనం అనుకున్న $\sum x_n$ అపసరణకు ఇది విరుద్ధము. కనుక ఆవశ్యకంగా $\sum y_n$ అపసరించుతుంది.

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు :

13.5.2 $\sum a_n$ ధనాత్మక పదశ్రేణి అభిసరిస్తే, Σa_n^2 కూడా అభిసరిస్తుంది అని చూపండి.

13.5.3 ప్రతి n కి $a_n > 0$, $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots. + a_n}{n}$ అయితే $\sum b_n$ అపసరిస్తుందని చూపండి.

13.5.4 (నిష్పత్తి పరీక్ష) (x_n) ఏదైనా వాస్తవ అనుక్రమము

(i) $k \in \angle$ ప్రతి $n \geq k$ కి, $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r$ అయ్యేటట్లు $0 < r < 1$ వ్యవస్థితము అయినపుడు, అనంతశ్రేణి $\sum x_n$ సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుంది.

(ii) అనంతమైన n విలువలకు $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ అయితే, $\sum x_n$ అపసరిస్తుంది.

13.5.5. (మూల పరీక్ష) (x_n) ఏదైనా వాస్తవ అనుక్రమము. $r > 0$ మరియు $k \in \angle$

i) $r < 1$ మరియు ప్రతి $n \geq k$ కి $|x_n|^{1/n} \leq r$ అయితే $\sum x_n$ శ్రేణి సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుంది.

ii) n అనంతమైన విలువలకు, $|x_n|^{1/n} \geq 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అపసరిస్తుంది.

13.5.6. అవధి తులనాత్మక పరీక్ష: (x_n) మరియు (y_n) అనేవి ధనాత్మక పద అనుక్రమాలు. అనగా ప్రతి $x_n > 0$, $y_n > 0$, $\lim \frac{x_n}{y_n} = r$ అవధి వ్యవస్థితం అయినప్పుడు

a) $r \neq 0$ అయితే, $\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది. $\Leftrightarrow \sum y_n$ అభిసరిస్తుంది.

(b) $r = 0$ అయితే, $\sum y_n$ అభిసరించినప్పుడు $\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: (a) $r \neq 0$ అనుకుందాము. ప్రతి n కి $x_n > 0$, $y_n > 0$, కనుక $\frac{x_n}{y_n} > 0$ $r \neq 0$ కనుక

$r = \lim_n \frac{x_n}{y_n} > 0$. $\in = \frac{r}{2}$ అనుకుంటే, $n \geq k$ అయినప్పుడు $\left|\frac{x_n}{y_n} - r\right| < \frac{r}{2}$ అయ్యేటట్లు k, వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$n \geq k$ అయితే $\frac{r}{2} = r - \frac{r}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3r}{2}$ అవుతుంది కనుక $\frac{r}{2} y_n < x_n < \frac{3r}{2} y_n$

$\sum y_n$ అభిసరిస్తే 13.4.1 ద్వారా $\frac{2}{3r}\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది. కాబట్టి $\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది. అదేవిధంగా $\sum x_n$ అభిసరిస్తే, $\sum$ y_n అభిసరిస్తుందని చూపవచ్చు. (b) $r = 0$ అనుకుందాము. $\lim\limits_{n} \frac{x_n}{y_n} = 0$ అయినప్పుడు $\in = 1$ అనుగుణంగా వొక k, ప్రతి $n \geq k$ కి $\left|\frac{x_n}{y_n} - 0\right| < 1$ అయ్యేటట్లుగా వుంటుంది.

$\Rightarrow$ ప్రతి $n \geq k$ కి $x_n < y_n$ కాబట్టి $\sum y_n$ అభిసరిస్తే $\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది.

13.5.7 కోషీ సాంద్రీకరణ సిద్ధాంతము (పరీక్ష)

$\{a(n)\}$ ధనాత్మక పదాల శుద్ధ అవరోహణానుక్రమము. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a(n)$ అనంతశ్రేణికి పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమం (s_n) అయితే ప్రతి n కి

(i) $\frac{1}{2}$ $(a(1) + 2\,a(2) + \ldots\ldots + 2^n\,a(2^n)\,) < s\,(2^n) < a(1) + 2\,a\,(2) + \text{----} + 2^{n-1}\,a\,(2^{n-1}) + a\,(2^n)$

(ii) అనంతశ్రేణి $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a(n)$ అభిసరణకి $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\,a(2^n)$ అభిసరణ తుల్యము.

ఉపపత్తి: $t_n = a(1) + 2\,a\,(2) + 2^2\,a\,(2^3) + \ldots + 2^{n-1}\,a\,(2^{n-1})$ అనుకుందాము. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\,a\,(2^n)$ అనంతశ్రేణి పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమము (t_n) అవుతుంది.

$\therefore$ (i) ని $\frac{1}{2}t_{n+1} < s\,(2^n) < t_n + a\,(2^n)$ గా వ్రాయగలము.

a (n) అవరోహణ అనుక్రమము కనుక ప్రతి n కి $a\,(n) > a\,(n+1)$

$2^2\,a\,(2^2) = 2\,a\,(4) = a\,(4) + a\,(4) < a\,(3) + a(4)$

$2\,a\,(2^3) = 4\,a\,(8) = a\,(8) + a\,(8) + a\,(8) + a(8) < a(5) + a(6) + a(7) + a(8)$

$1 \leq k \leq 2^{n-1}$ అయితే $a\,(2^n) < a\,(2^{n-1} + k)$ కనుక

$2^{n-1}\,a\,(2^n) < a\,(2^{n-1} + 1) + \ldots. + a\,(2^{n-1} + 2) + \ldots\ldots. + a(2^n)$. ఈ అసమీకరణాలను కలిపితే

$2\,a\,(2^2) + 2^2\,a(2^3) + \ldots. + 2^{n-1}\,a\,(2^n) < a\,(3) + a(4) + \ldots.. + a(2^n)$

$$\Rightarrow \frac{a(1)}{2} + a(2) + 2\,a(2^2) + \ldots. + 2^{n-1}\,a(2^n) < a(1) + a(2) + a(3) + \ldots.. + a(2^n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ \{\,a(1) + 2\,a(2) + 2^2\,a\,(2^2) + \ldots. + 2^n\,a\,(2^n)\,\} < a(1) + a(2) + \ldots\ldots + a(2^n)$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\, t_{n+1} < s\,(2^n)$

a (3) < a(2) కనుక a (2) + a(3) < 2 a (2)

a (5), a (6), a(7) లలో ప్రతి పదము a(4) కంటే చిన్నది కనుక a (4) + a(5) + a(6) + a(7) < 4 a(4)

అదేవిధంగా n కి, $0 < k < 2^{n-1}$ అయినప్పుడు $a\,(2^{n-1} + k) < a\,(2^{n-1})$ కనక

$a\,(2^{n-1}) + a\,(2^{n-1} + 1) + \ldots + a\,(2^n - 1) < 2^{n-1}\, a\,(2^{n-1})$

$\therefore\ a(2^2) + a\,(3) + \ldots\ldots + a\,(2^n - 1) < 2\,a(2) + 4\,a(4) + \ldots.. + 2^{n-1}\, a\,(2^{n-1})$

$$\begin{aligned}\Rightarrow s\,(2^n) &= a\,(1) + a(2) + a(3) + \ldots. + a\,(2^n - 1) + a\,(2^n)\\ &< a(1) + 2\,a(2) + \ldots. + 2^{n-1}\, a\,(2^{n-1}) + a\,(2^n)\\ &= t_n + a\,(2^n)\end{aligned}$$

$\therefore\ \frac{1}{2}\, t_{n+1} < s\,(2^n) < t_n + a\,(2^n)$

దీనితో (i) నిరూపించడం పూర్తి అయినది.

(ii) నిరూపణకు (s_n) , (t_n) రెండూ అభిసరిస్తాయి లేదా రెండూ అపసరిస్తాయి అని నిరూపించితే చాలు.

(s_n) , (t_n) రెండూ ధనాత్మక పదాల పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమాలు కనుక ఆరోహణ అనుక్రమాలు. కనుక

"(s_n) , (t_n) అనుక్రమాలు అభిసరిస్తాయి $\Leftrightarrow$ (s_n) , (t_n) అనుక్రమాలు పరిబద్ధం, అనగా ఎగువ పరిబద్ధము. అని నిరూపించితే (ii) నిరూపణ అవుతుంది.

(s(n)) ఆరోహణ అనుక్రమము కనుక, $(s(2^n))$ అనుక్రమము పరిబద్ధత (s(n)) పరిబద్ధతకి తుల్యం.

(s (m)) పరిబద్ధము అనుకుందాము అప్పుడు $(s(2^n)$ పరిబద్ధము.

$\Rightarrow$ ప్రతి n కి $s(2^n) < M$ అయ్యేట్లు $M > 0$ వ్యవస్థితం.

ప్రతి n కి $\frac{1}{2}\, t_{n+1} < s\,(2^n) < M$ కనుక (t_{n+1}) అనుక్రమము పరిబద్ధము. అనగా (t_n) పరిబద్ధము. విపర్యయముగా, (t_n) పరిబద్ధము అనుకుందాము. $\Rightarrow$ ప్రతి n కి $t_n < M^1$ అయ్యేట్లు $M^1 > 0$ వ్యవస్థితతం. ప్రతి n కి $S(2^n) < t_n + a(2^n) < t_n + a(1)$కనుక $S(2^n)$ పరిబద్ధము. అనగా (s(n)) పరిబద్ధము. (ii) నిరూపింపబడినది.

విద్యార్థుల లబ్ధికి ఈ పరీక్ష ఇచ్చుట పొందుపరచడమైనది.

13.5.8

కౌషీ సమాకలన పరీక్ష: అనంతశ్రేణి యొక్క అభిసరణీయతకు చెందిన ఈ పరీక్ష అనంత (అపక్రమ) సవ ాకలనుల అభిసరణీయత భావనతో ముడిపడి ఉన్నది. సంవృత మరియు పరిబద్ధ అంతరముపై నిర్వచి ంపబడిన పరిబద్ధ ప్రమేయము యొక్క రీమాన్ సమాకలని యొక్క భావన విద్యార్థికి పరిచయము ఉన్న ది మరియు ఈ అంశము గురించి సమగ్రముగా 18, 19 మరియు 20వ పాఠములలో చెప్పబడి ఉన్నది.

$f: [a,\infty) \to 3$ ప్రమేయము.

(i) ప్రతి $b \in 3, b > a$ కి $[a, b]$ లో f రీమాన్ సమాకలని మరియు

(ii) $A \in 3$, $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f\ dx = A$ అయితే అనంతసమాకలని $\int_a^\infty f\ dx$ అభిసరణము చెందునని అంటాము మరియు $A = \int_a^\infty f\ dx$ అని వ్రాస్తాము.

సిద్ధాంతము: $\lim\limits_{b\to\infty} f(x) = 0$ అయ్యేటట్లుగా $f: [1, \infty) \to 3$ ఒక ధనాత్మక అవరోహణ ప్రమేయము అనుకానుము. అనంతశ్రేణి $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ అభిసరణ చెందడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము అనంత సమాకలని $\int_1^\infty f(x)\, dx$ అభిసరణ చెందును.

($\lim\limits_{b\to\infty} f(x)$ నిర్వచనం 14వ పాఠంలో గలదు).

ఉపపత్తి: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ మరియు $t_n = \int_1^{n+1} f(t)\, dt$ అని వ్రాయుము. ప్రతీ x కి $f(x) > 0$ కావున $\{s_n\}$ ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము మరియు ప్రతి n కి $s_n \geq 0$

$\{t_n\}$ కూడా ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము మరియు ప్రతి $t_n \geq 0$

అయినప్పుడు $n \in \angle$ మరియు $\forall\ x \in 3$ కు $f(x) > 0$ $n \leq b \leq n + 1$ అయితే

$$0 \leq \int_1^n f(t)\, dt \leq \int_1^b f(t)\, dt \leq \int_1^{n+1} f(t)\, dt$$

3 లో $\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(t)\,dt$ వ్యవస్థితము $\Leftrightarrow$ 3 లో $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(t)\,dt$ అభిసరణము చెందును.

$k \in N$ మరియు $k \le x \le k+1$ కు $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \int_k^{k+1} f(k)\,dt$$

$$\Rightarrow f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le f(k)$$

$k = 1$ నుండి n వరకు మొత్తము తీసుకొనగా

$$f(2) + \ldots + f(n+1) \le \int_1^{n+1} f(x)\,dt \le f(1) + \ldots + f(n) \Rightarrow 0 \le s_{n+1} - s_1 \le t_n \le s_n$$

$\{s_n\}$ అభిసరణము చెందితే $\{s_n\}$పరిబద్ధము, కాబట్టి $\{t_n\}$ పరిబద్ధము, కాబట్టి $\{t_n\}$ అభిసరణము చెందును. విపర్యముగా $\{t_n\}$ అభిసరణము చెందితే $\{t_n\}$ పరిబద్ధము. కాబట్టి $\{s_n\}$ పరిబద్ధము, కాబట్టి $\{s_n\}$ అభిసరణము చెందును.

13.6 అనువర్తనాలు:

13.6.1 కోషీ సాంద్రీకరణ పరీక్షను వుపయోగించి $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ అనంతశ్రేణి అభిసరణ గురించి చర్చించుము:

సాధన: $a(n) = \frac{1}{n^p}$ అనుకోండి. $p \ge 1$ అయితే $a(n) \ge a(n+1)$

కోషీ సాంద్రీకరణ పరీక్ష అనువర్తిస్తే $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ అభిసరణకి $\Sigma b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a(2^n)$ అభిసరణ తుల్యం. $a(2^n) = \frac{1}{(2^n)^p} \Rightarrow b_n = 2^n a(2^n) = \frac{1}{(2^{p-1})^n}$

$p = 1$ అయితే $2^n a(2^n) = 1$ మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ అపసరిస్తుంది.

$p > 1$, $r = \frac{1}{2^{p-1}}$ అయితే, $0 < r < 1$ కాబట్టి $\sum b_n = \sum r^n$ అనేది గుణశ్రేఢి కనుక $\sum b_n$ అభిసరిస్తుంది. $\therefore$ $p > 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ అభిసరిస్తుంది మరియు $p = 1$ అయితే అపసరిస్తుంది.

$0 < p < 1$ అయితే $r = \frac{1}{2^{p-1}} > 1$ కనుక $\sum r^n$ అనే గుణశ్రేణి అపసరిస్తుంది. $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a(a^n)$ అపసరిస్తుంది.

13.6.2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ అభిసరణని చర్చించండి.

సాధన: ఈ అనంతశ్రేణిలో n వ పదము $x_n = \frac{1}{n \log n}$

$\log n < \log (n+1)$ కనుక (x_n) అవరోహణ అనుక్రమం. $n \log n < n \log (n+1) < (n+1) \log (n+1)$

కనుక $2^n x(2^n) = \frac{2^n}{2^n \log 2^n} = \frac{1}{\log 2^n} = \frac{1}{n \log 2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ శ్రేణి అపసరిస్తుంది. కాబట్టి $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x(2^n)$ అపసరిస్తుంది.

$\therefore$ కోషీ సాంద్రీకరణ పరీక్ష ద్వారా, $\sum_{n=2}^{\infty} x(n)$ అపసరిస్తుంది.

13.6.3 $x_n = \frac{1}{n \log n \log \log n}$ అయితే $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$ అభిసరణని చర్చించండి.

సాధన: N లోని ప్రతి n కి $\log (n+1) > \log n \Rightarrow \log \log (n+1) > \log \log n$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log \log(n+1)} < \frac{1}{\log \log n} \Rightarrow \frac{1}{(n+1) \log (n+1) \log (n+1)} < \frac{1}{n \log n \log \log n}$$

$\Rightarrow x_{n+1} < x_n$ (x_n) ధనపదాల శుద్ధ అవరోహణ అనుక్రమం.

$$2^n x_{2^n} = \frac{1}{n \log 2 . \log (n \log 2)}$$

$n \geq 2$ అయితే $\log n \geq \log 2 \Rightarrow \log (n \log 2) = \log n + \log 2 \leq 2 \log n$

$\Rightarrow 2^n x_{2^n} \geq \frac{1}{(n \log 2)\, 2 \log n)} = \frac{1}{2 \log 2 . n \log n}$ 13.6.2 నుండి $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ అపసరిస్తుంది.

$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x(2^n)$ అనసరిస్తుంది. $\therefore$ కోషీ సాంద్రీకరణ పరీక్ష ద్వారా $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$ అపసరిస్తుంది.

13.7 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నల సాధనలు:

13.4.7 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ వాస్తవ పదాల అనంతశ్రేణి మొత్తం s అనుకుందాము.

$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ అనుకుంటే అనంతశ్రేణి $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ అభిసరిస్తుంది, ఈ శ్రేణి మొత్తము $s_k = s - s_k$.

$t_n = a_{k+1} + \ldots a_{k+n}$ అయితే (t_n) అనుక్రమం, $\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j$. అనంతశ్రేణి పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమం అవుతుంది. మరియు $t_n = s_{k+n} - s_k$ $\lim_n (s_n) = s$ మరియు (s_{k+n}) అనేది (s_n) యొక్క ఉపానుక్రమము కనుక $\lim_n (s_{k+n}) = \lim (s_n) = s$. $\lim (t_n) =$ $\lim_n (s_{k+n} - s_k) = \lim_n s_{k+n} - s_k = s - s_k$

$\lim_k s_k = s$ కనుక $\lim_k (s - s_{k)} = 0$ అనగా $\lim_k \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = 0$

అందుచేత $\in > 0$ అయితే $\angle$ లో ఒక $N(\in)$ $k \geq N(\in)$ అయినపుడు $|\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n| < \in$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితము.

13.5.2 ప్రతి $n \in \angle$ కు $a_n > 0$ మరియు $\sum a_n$ అభిసరిస్తే, $\sum a_n^2$ కూడా అభిసరిస్తుంది. విపర్యయము నిజమా కాదా? సోదాహరణగా వివరించుము.

సాధన: $\sum a_n$ అభిసరిస్తుంది కనుక $\lim_n a_n = 0$

$\Rightarrow$ 1 కి అనురూపంగా ప్రతి $n \geq N$ కి $|a_n| = a_n < 1$ అయ్యేట్లు N వ్యవస్థితం.

$a_n > 0$ కనుక $0 < a_n^2 < a_n$ అందుచేత తులనాత్మక పరీక్ష ద్వారా, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2$ కాబట్టి $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ అభిరిస్తాయి. కనుక $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ అభిసరిస్తుంది. విపర్యయము నిజము కాదు. ఉదాహరణకు 2-శ్రేణులు $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ అభిసరిస్తుంది కానీ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ అపసరిస్తుంది.

13.5.3 ప్రతి n కి $a_n > 0$ అయి $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$ అయితే Σb_n అపసరిస్తుందని చూపండి.

సాధన: ప్రతి n కి $a_k > 0$, $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$ కనుక $b_n > \frac{a_1}{n}$,

$\sum \frac{1}{n}$ శ్రేణి అపసరిస్తుంది కనుక తులనాత్మక పరీక్ష ద్వారా $\sum b_n$ అపసరిస్తుంది.

13.5.4 (నిష్పత్తి పరీక్ష)

(x_n) అనేది వాస్తవ మూల్య అనుక్రమము. $0 < r < 1$ $n \geq N$ అయినప్పుడు $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq r$ అయ్యేట్లు N వ్యవస్థితం అయితే, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ అభిసరించే అనంతశ్రేణి, అనంతమైన n విలువలకు $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ అయితే, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అనంతశ్రేణి అపసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: ప్రతి $n \geq k$ కి $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq r$ అయితే, ప్రతి $n > k$ కి $x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} . \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} .... \frac{x_{k+1}}{x_k} . x_k$

$\Rightarrow |x_n| \leq r^{n-k} . |x_k| = \left|\frac{x_k}{r^k}\right| r^n$

$0 < r < 1$ కనుక $1 + r + r^2 + ...$ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది.

$\therefore r^k + r^{k+1} + ...$ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది. $\Rightarrow \left|\frac{x_k}{r^k}\right| r^k + \left|\frac{x_k}{r^k}\right| r^{k+1} + ...$ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది.

$\therefore$ తులనాత్మక పరీక్ష ద్వారా $|x_k| + |x_{k+1}| + ...$ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది.

కనుక $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ శ్రేణి సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుంది.

(ii) ప్రతి n_k కి $\left|\frac{x_{n_{k+1}}}{x_{n_k}}\right| \geq 1$ అయ్యేట్లు $n_1 < n_2 < ..... < n_k < ....$ అనే సహజ సంఖ్యా అనుక్రమం వుంటే, ప్రతి n_k కి $\left|x_{n_k}\right| \geq \left|x_{n_1}\right| > 0$ అవుతుంది. కాబట్టి $\lim x_{n_k} \neq 0$ లేదా $\lim x_{n_k}$ వ్యవస్థితం కాకపోవడం అనేది జరుగుతుంది. కనుక $\lim x_n$ వ్యవస్థితం మరియు $\lim x_n \neq 0$. కనుక 13.4.4 ప్రకారం $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ శ్రేణి అపసరిస్తుంది.

13.5.5 మూల పరీక్ష (root test): (x_n) అనేది వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమము.

(i) $n \geq N$ అయినప్పుడు $|x_n|^{1/n} \leq r$ అయ్యేట్లు r, (0,1) లోను N, $\angle$ లోనూ వ్యవస్థితం అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ శ్రేణి సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుంది.

(ii) అనంతమైన nలకి $|x_n|^{1/n} \geq 1$ అయితే శ్రేణి $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అపసరిస్తుంది.

ఉపపత్తి: (i) జరిగినపుడు ప్రతి n కి $|x_n| \leq r^n$ అవుతుంది. మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ గుణశ్రేఢి అభిసరిస్తుంది కనుక $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ అభిసరిస్తుంది. అనగా $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుంది.

(ii) వ సందర్భంలో అనంతమైన n లకి $|x_n| \geq 1$ కనుక (x_n) అనుక్రమం అభిసరించకపోవచ్చును, అభిసరించి $\lim x_n \neq 0$ కావచ్చును. కాబట్టి $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అపసరిస్తుంది.

13.8 సారాంశము:

కొంత క్లుప్తమైన పరిచయం తర్వాత అనంతశ్రేణుల అభిసరణకి కోషి సార్వత్రికత స్థాపన చేయగలిగాము. తులనాత్మక పరీక్షలు, అవధి తులనాత్మక పరీక్ష, కోషీ సాంద్రీకరణ పరీక్ష మరియు ఏకాంతర శ్రేణికి లైబ్నిజ్ పరీక్ష చర్చించాము. ఈ పరీక్షల అనువర్తనాలు అనేక ఉదాహరణలతో విద్యార్థికి ఉపయుక్తమైన విధంగా అందించడం జరిగింది.

13.9 సాంకేతిక పదాలు:

అనంతశ్రేణులు - పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమము - అనంతశ్రేణుల అభిసరణ మరియు అపసరణ - తులనాత్మక పరీక్ష - సాంద్రీకరణ పరీక్ష - ఏకాంతర శ్రేణులు - శ్రేణుల సంపూర్ణాభిసరణం.

13.10 అభ్యాసములు:

1) (a_n) అనేది వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమము. $a_n = 0 \Leftrightarrow 1 \le n_1 < n_2 < \ldots\ldots < n_k < \ldots\ldots..$ అనుక్రమం (a_n) నుండి $\left(a_{n_k}\right)$ ఉపానుక్రమం తొలగిస్తే మిగిలే అనుక్రమం (b_n) అయితే $\sum a_n$, $\sum b_n$ అనంతశ్రేణులలోని పాక్షిక మొత్తాలని పోల్చి, $\sum a_n$ అభిసరణకి తుల్యం. $\Leftrightarrow \sum b_n$ అభిసరణ అని చూపండి.

2) (a_n) వాస్తవ సంఖ్యల అనుక్రమం. ప్రతి $n \ge N$ కి $a_n = b_n$ అయ్యేటట్లు N వ్యవస్థితమయితే $\sum a_n$ శ్రేణి అభిసరణకి $\sum b_n$ శ్రేణి అభిసరణ తులనమని చూపండి.

3) పాక్షిక భిన్నముల పద్ధతి వాడి $\alpha > 0$ అయితే

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)\,(n+\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{4}$ అని చూపండి.

4) $\sum x_n$, $\sum y_n$ అనంతశ్రేణులు అపసరిస్తే, $\sum (x_n + y_n)$ అపసరించవలసిన అవసరం లేదని సోదాహరణంగా చూపండి.

(ఉదా: ($x_n = - y_n = \frac{1}{n}$))

5) $\sum \cos n$ అపసరిస్తుందని చూపండి. ($\lim \cos n$ వ్యవస్థితం కాదు.)

6) $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ అభిసరిస్తుందని చూపండి. ($\sum \frac{1}{n^2}$ శ్రేణితో తులనాత్మకత)

7) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ అభిసరిస్తుందని చూపండి (ఏకాంతర శ్రేణి)

8) ప్రతి n కి $a_n > 0$ అయి $\sum a_n$ అభిసరిస్తే , $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ కూడా అభిసరిస్తుందని చూపండి.

(సూచన: $\left(\sqrt{a_n} - \frac{1}{n}\right)^2 \ge 0$)

9) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots..+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\ldots\ldots..$ శ్రేణి అభిసరిస్తుందేమోనని నిర్ధారించండి. (సూచన: (s_{3n}) అనుక్రమము అపరిబద్ధము.)

10) $1 - \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots.$ శ్రేణి అభిసరిస్తుందని చూపండి.

11) (a_n) మరియు (b_n) అనేవి ధనాత్మక అవరోహణ అనుక్రమాలు. $\lim a_n = \lim b_n = 0$ అయితే $a_1 - a_2 - b_1 + a_3 - a_4 + b_2 + \ldots.. + a_{2n-1} - a_{2n} + (-1)^n b_n + \ldots..$
(సూచన:$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots\ldots$ మరియు $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \ldots\ldots$ అభిసరిస్తుంది).
ప్రతి n కి $a_n > 0$ అయి $\sum a_n$ అభిసరిస్తే $\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$ కూడా అభిసరిస్తుందని చూపండి.
(సూచన : $\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right)^2 \geq 0.$)

12) $\sum a_n^2$ శ్రేణి అభిసరించినా, $\sum a_n$ శ్రేణి అభిసరించవచ్చు కానీ ఆవశ్యకంగా సంపూర్ణాభిసరణం చెందదని ఒక ఉదాహరణ నీయండి . $(a_n = (-1)n/n)$

13) ప్రతి $a_n > 0$ అయితే $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$ అయితే $\sum b_n$ అపసరిస్తుందని చూపండి. (సూచన: $b_n > \dfrac{a_1}{n}$)

14) కోషీ సాంద్రీకరణ పరీక్ష ఉపయోగించి $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$ అభిసరణని చర్చించండి.

(i) $x_n = \dfrac{1}{n(\log n)^c}$ ($n > 1$) మరియు $c > 1$ (అభిసరిస్తుంది.)

(ii) $x_n = \dfrac{1}{n \log n \ (\log\log n) \ (\log\log\log n)}$ (అపసరిస్తుంది.)

15) ఈ క్రింది అనంతశ్రేణుల అభిసరణని పరిశీలించండి.

a) $(-1)^n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ (అభిసరిస్తుంది.) b) $\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ (అపసరిస్తుంది.)

c) $(-1)^n \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ (అపసరిస్తుంది.) d) $\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$(అభిసరిస్తుంది.)

16) అవధి తులనాత్మక పరీక్ష ఉపయోగించి ఈ క్రింది శ్రేణుల అభిసరణని పరిశీలించండి.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$ (అపసరిస్తుంది. $\dfrac{1}{n}$ ఉపయోగించాలి)
b) $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ (అభిసరిస్తుంది. $\dfrac{1}{n^2}$ ని ఉపయోగించాలి.

17) లైబ్నిజ్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి అభిసరణ పరిశీలించండి.

a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$ (అభిసరిస్తుంది)

b) $1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + ...$ (అభిసరిస్తుంది)

c) $1 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + ...$(అభిసరించదు)

d) $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + ,.......$ (అభిసరించదు)

18) a) $\sum a_n$ శ్రేణి సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతూ, (b_n) పరిబద్ధ అనుక్రమం అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ b_n$ శ్రేణి సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుందని చూపండి.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ శ్రేణులు సంపూర్ణాభిసరణం చెందితే $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad b_n$ కూడా సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుందని చూపండి.

c) 18(a)

లెక్కలో 'సంపూర్ణాభిసరణం' అనే పదాన్ని 'అభిసరణం' అని మార్చితే ఆ ప్రవచనము నిజము కాదని సోదాహరణంగా నిరూపించండి.

19) బెల్ లెమ్మా: (x_n) మరియు (y_n) అనేవి వాస్తవ సంఖ్య అనుక్రమాలు. $s_0 = 0$ మరియు $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ అయితే $m > n$ అయినప్పుడు $\sum_{k=n+1}^{m} x_k \, y_k =$

$(x_m \, s_m - x_{n+1} \, s_n) + \sum_{k=n+1}^{m} (x_k - x_{k+1}) \, s_k$ అని నిరూపించండి.

20) డిరిక్‌లె పరీక్ష: (x_n) అనేది ధనపదాల అవరోహణ అనుక్రమము $\lim x_n = 0$ మరియు $\sum y_n$ శ్రేణి పాక్షిక మొత్తాల అనుక్రమము పరిబద్ధం అయితే $\sum x_n \, y_n$ శ్రేణి అభిసరిస్తుందని చూపండి.

(సూచన: ఏబెల్ లెమ్మాని వాడి ప్రతి n కి $|s_n| \leq B$ అనుకుంటే, $\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k \; y_k\right| \leq 2 \; x_{n+1} \; B$ అని రాబట్టండి.)

21) (x_n) అనేది వాస్తవానుక్రమము మరియు $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = r$ అనుకోండి.

a) $r < 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ శ్రేణి అభిసరిస్తుంది అనీ

b) $r > 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ శ్రేణి అపసరిస్తుంది అనీ చూపండి.

22) $r = 1$ అయితే నిష్పత్తి పరీక్ష మరియు మూల పరీక్ష రెండూ విఫలం అవుతాయని సోదాహరణ గా నిరూపించండి.

23) (x_n) వాస్తవ ధన పదాల అనుక్రమము మరియు $\lim\ x_n^{y_n} = r$ అయినప్పుడు a) $r < 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అభిసరిస్తుందని, (b) $r > 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అపసరిస్తుందనీ చూపండి.

24) p - శ్రేణి $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p > 0)$ శ్రేణి అభిసరణ పరీక్షలో నిష్పత్తి పరీక్ష మూల పరీక్షలు విఫలం అవుతాయని నిరూపించండి.

25) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^5} + ...$
శ్రేణి అభిసంరించినప్పటికీ, అభిసరణ పరీక్షలో మూల పరీక్ష మరియు నిష్పత్తి పరీక్షలు విఫలం అవుతాయని నిరూపించండి.

26) $a > 0,\ b > 0$ అయి $p > 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an+b)^p}$ శ్రేణి అభిసరిస్తుందనీ, $0 < p \leq 1$ అయితే ఈ శ్రేణి అపసరిస్తుందనీ చూపండి.

27) $0 < a < 1$ అయినప్పుడు $a^2 + a + a^4 + a^3 + \ldots + a^{2n} + a^{2n-1} + \ldots$ శ్రేణిలో

a) బేసి పదాలు మరియు సరి సంఖ్య పదాల శ్రేణిలను విడివిడిగా పరిశీలించి తద్వారా పై శ్రేణి అభిసరిస్తుందని నిరూపించండి.

b) మూల పరీక్షను ఈ శ్రేణి అభిసరిస్తుందని చూపుటకు వాడవచ్చని నిరూపించండి.

c) నిష్పత్తి పరీక్ష ఈ శ్రేణి అభిసరణని నిరూపించడానికి విఫలం అవుతుందని చూపండి.

28) $\sum x_n$ శ్రేణి అభిసరణని పరిశీలించండి. $x_n =$

a) $\frac{1}{2^n}$ (గుణశ్రేఢి, అభిసరిస్తుంది.)

b) $\frac{n+1}{n-1}$ (n > 1) ($\lim x_n \neq 0$, అపసరిస్తుంది.)

c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ($\lim x_n \neq 0$, అపసరిస్తుంది.)

d) $\frac{1}{2n^2+1}$ ($1/n^2$ శ్రేణితో పోల్చండి. అభిసరిస్తుంది.)

e) $\frac{1}{\log n}$ ($\log n < n$, అపసరిస్తుంది.)

f) $\frac{1}{n^n}$ ($n^n \geq 2^n$ ($n \geq 2$ అయితే); అభిసరిస్తుంది.)

g) $\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ ($x_n < \frac{1}{n^{3/2}}$; అభిసరిస్తుంది.

h) sin n ($\lim \sin n \neq 0$; అపసరిస్తుంది.)

k) sin 1/n ($\lim n \sin 1/n = 1$) అపసరిస్తుంది.)

l) $\frac{1}{2^n+3^n}$ ($x_n < \frac{1}{2^{n+1}}$; అభిసరిస్తుంది)

m) log (1 + 1/n) ($x_n = a_{n+1} - a_n$; $a_n = \log n$) అభిసరిస్తుంది.

n) $\frac{1}{n!}$ (అభిసరిస్తుంది.)

o) $\frac{3^n\, n!}{n^n}$ (అభిసరిస్తుంది.)

p) $\sqrt{n^4+1}$ - $\sqrt{n^4-1}$ (n > 1; అభిసరిస్తుంది అకరణీయం చేయుము $\sqrt{n^4 \pm 1} > n^2$)

29) $\sum_{n=1}^{\infty}$ a_n శ్రేణి అభిసరణని, సంపూర్ణాభిసరణం పరిశీలించండి. $a_n =$

a) $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ (సంపూర్ణాభిసరణం)

b) $\dfrac{(-1)^n \, n}{n+2}$ (అపసరిస్తుంది.)

c) $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ (అభిసరిస్తుంది కాని సంపూర్ణాభిసరణం చెందదు)

d) $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \log n$ (అభిసరిస్తుంది కాని సంపూర్ణాభిసరణం చెందదు)

13.11 మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య -సాధన:

సమస్య: అనంతశ్రేణి $\dfrac{2}{1^p} + \dfrac{3}{2^p} + \dfrac{4}{3^p} + \ldots\ldots$ అభిసరణ గురించి చర్చింపుము.

లక్ష్యం: 3 లో వివిధ p లకి పై అనంతశ్రేణి అభిసరణ లేదా అపసరణ నిర్ణయించుట.

నిర్వచనం: $X = (x_n)$ వాస్తవసంఖ్యల అనుక్రమం, $s_1 = x_1$, $s_k = s_{k-1} + x_k$ $(k > 1)$ గా నిర్వచిస్తే ఏర్పడే అనుక్రమం (s_k) ని, (x_k) వుత్పన్నం చేసే అనంతశ్రేణి అంటాము. దీనిని $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ లేదా $\sum x_n$ లేదా $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots$ లచే సూచిస్తాము. అనంతశ్రేణి $\sum x_n$ కి s_n, n – వ పాక్షిక మొత్తం అనీ x_n ని n–వ పదమనీ అంటాము. $\lim (s_n)$ వ్యవస్థితమైతే అనంతశ్రేణి అభిసరిస్తుందని $\lim(s_n)$ అనంతశ్రేణి మొత్తం అనీ అంటాము. (s_n) అభిసరించకపోతే అనంతశ్రేని అపసరిస్తుందంటాము.

ఉపయోగించే ఫలితాలు:

(i) **అవధి తులనాత్మక పరీక్ష:** $\sum x_n$, $\sum y_n$ ధన పదాల అనంతశ్రేణిలు, $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = r$ అనుకోండి.

(a) $r \neq 0$ అయితే $\sum x_n$ అభిసరణ $\sum y_n$ అభిసరణకి తుల్యము.

b) $r = 0$ అయినప్పుడు $\sum y_n$ అభిసరిస్తే $\sum x_n$ అభిసరిస్తుంది.

(ii) p – శ్రేణి, $\sum \dfrac{1}{n^p}$ i) $p > 1$ అయితే శ్రేణి అభిసరిస్తుంది. ii) $p \leq 1$ అయితే శ్రేణి అపసరిస్తుంది.

సాధన: ఇచ్చిన శ్రేణిలో n – పదము $x_n = \frac{n+1}{n^p}$

$x_n = \frac{n+1}{n^p} = \frac{n(1+1/n)}{n^p} = \frac{1+1/n}{n^{p-1}}$, $y_n = \frac{1}{n^{p-1}}$ అనుకుంటే

$\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

కావున $\lim_n \frac{x_n}{y_n} \neq 0 \Rightarrow \sum x_n , \sum y_n$ ఒకేవిధంగా ప్రవర్తిస్తాయి.

p – పరీక్ష ద్వారా, $\sum y_n = \sum \frac{1}{n^{p-1}}$ శ్రేణి

$p - 1 \leq 1$ అయితే అపసరిస్తుందని, $p - 1 > 1$ అయితే అభిసరిస్తుందనీ చెప్పగలము.

అనగా $p > 2$ అయితే అభిసరిస్తుందనీ, $p \leq 2$ అయితే అపసరిస్తుందని అంటాము.

$\therefore \sum x_n$ శ్రేణి $p \leq 2$ అయితే అపసరిస్తుంది. మరియు $p > 2$ అయితే అభిసరిస్తుంది.

13.12 నమూనా పరీక్ష ప్రశ్నలు:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)$ అభిసరిస్తే $\lim_n (a_n) = 0$ అని చూపుము. విపర్యము సత్యము అవునా కాదో సోదాహరణముగా తెలుపుము.

2) $p > 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ అభిసరిస్తుందని చూపుము.

3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణీయతను చర్చించండి.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ అభిసరిస్తే $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ లు అభిసరిస్తాయని చూపుము.

5) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ అభిసరిస్తుందని చూపుము.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ యొక్క అభిసరణీయతను చర్చించండి.

6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ అపసరిస్తుందని చూపుము.

7) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....$ శ్రేణి యొక్క మొత్తాన్ని కనుగొనుము.

8) అవధి తులనాత్మక పరీక్షను ప్రవచించి నిరూపించుము.

రచయిత్రి సి.సంధ్య

గాట్‌ఫ్రీడ్ వాన్ లెబ్నైజ్ (1646 - 1716):

లెబ్నైజ్ జర్మనీకి చెందిన గణిత శాస్త్రవేత్త. ఆయనకి అవకలనాన్ని అవధిగా అనే భావన లేనప్పటికి ప్రస్తుతము వాడుకలో ఉన్న అవకలన మరియు సమాకలన కలన గణితములకు చెందిన సంకేతాలను అభివృద్ధి చేసారు.

పాఠము - 14

ప్రమేయాల అవధులు

14.1 లక్ష్యము:

ఈ పాఠంలో ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశంలోని అవధి బిందువు వద్ద ప్రమేయపుటవధి భావాన్ని ప్రవేశపెట్టి అవధుల వివిధ ధర్మాలను చర్చించడం జరిగినది. ఏకపక్ష అవధులను, అనంత అవధులను మరియు అనంతము వద్ద అవధులను ప్రవేశ పెట్టడం జరిగినది.

14.2 అంశాలక్రమము:

14.3 ఉపోద్ఘాతము:

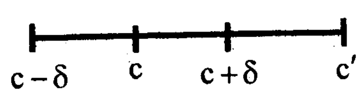
గతంలో నేర్చుకున్న అనుక్రమాల అవధి భావాన్ని ఈ పాఠములో ప్రమేయాలకు విస్తరింపజేస్తాము. $f : A \to \mathbb{R}$ కి, A "అవధి బిందువు" c వద్ద "అవధి" నిర్వచిస్తాము. c, A లోని బిందువు కాకపోయినప్పటికీ అవధి బిందువు కావలె, అనగా c ప్రతీ సామీప్యము A లోను, A లోని బిందువులు అనంతంగా వుండవలె. ఈ భావాన్ని నాల్గవ భాగంలో వివరిస్తాము. 5వ భాగంలో అవధికి $\in$, δ నిర్వచనానికి తుల్యమైన అనుక్రమాల ఉపగమనం చర్చిస్తాము. 14.6.5 అవధులను కనుగొనడానికి వుపయోగించే కొన్ని ఫలితాలను అనుక్రమాల ఉపగమనం ద్వారా నిరూపిస్తాము. చివరగా ఏడవ విభాగంలో ఏకపక్ష అవధులు, అనంత అవధులు, అనంత బిందువుల వద్ద అవధుల గురించి వివరించడం జరిగింది.

14.4 అవధులు:

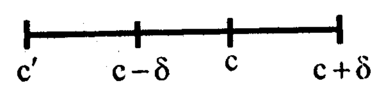
14.4.1 $\delta-$ సామీప్యం నిర్వచనాన్ని ఒకసారి గుర్తు చేసుకుందాం. c ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య $\delta > 0$ అయిన $V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta) = \{x/x \in \mathbb{R},\ |x-c| < \delta\}$ సమితిని c యొక్క $\delta-$ సామీప్యము అంటాము.

14.4.2 గమనిక:

1. $c \neq c', 0 < \delta < |c-c'|$ అయితే $V_\delta(c) \cap \{c'\} = \phi$ కాబట్టి c' లేకుండా ఉండే δ సామీప్యం c చుట్టూ ఉంటుంది.

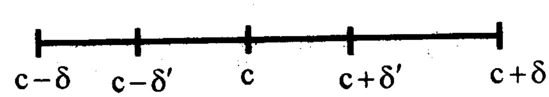


$V_\delta(c) \cap \{c'\}, (c<c')$



$V_\delta(c) \cap \{c'\}, (c'<c)$

$0 < \delta' < \delta$ అయిన $V_{\delta'}(c) \subseteq v_\delta(c)$

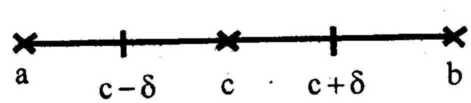


$V_{\delta'}(c) \subseteq V_\delta(c)$

2. ఇదే రీతిగా $F = \{d_1, d_2, \cdots\cdots, d_n\}$ ఒక పరిమితి సమితి, $c \in \mathbb{R}$ అయిన c తప్ప F లోని ఏ బిందువు లేకుండా c కి ఒక $\delta-$ సామీప్యంను తీసుకొనవచ్చును.

$c \in (a, b)$ అయిన $V_\delta(c) \subset (a, b)$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

ఇది $0 < \delta <$ కనిష్ఠం $\left\{\frac{b-c}{2}, \frac{c-a}{2}\right\}$ అయ్యే అన్ని δ లకి జరుగుతుంది.



14.4.3 నిర్వచనం: A అనేది $\mathbb{R}$ లో ఉప సమితి $c \in \mathbb{R}$, $0 < |x-c| < \delta$, అయ్యేటట్లుగా ప్రతి $\delta > 0$ కి అనురూపంగా కనీసం ఒక x, A లో ఉంటే 'c', A కి అవధి బిందువు అంటాం. తత్తుల్యంగా c యొక్క ప్రతి $\delta-$ సామీప్యంలో c కాని బిందువు కనీసం ఒక్కటైనా అయినా A లో ఉండడం, అనగా ప్రతి $\delta > 0$ కి $V_\delta(c) \cap (A - \{c\}) \neq \phi$. అయితే A కి c అవధి బిందువు అంటాము.

14.4.4 గమనిక:

1. 'c' బిందువు A లో ఉండవచ్చు లేదా ఉండకపోవచ్చును.

   $V_\delta(c) \cap A - \{c\} \neq \phi$ అనే నియమం $c \in A$ లేదా $c \notin A$ మీద ఆధారపడదు.

   $\therefore$ A యొక్క అవధి బిందువు 'c' అయిన $A - \{c\}$ కి కూడా c అవధి బిందువు అవుతుంది.

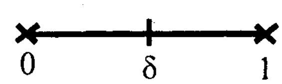
2. 'c' అనేది A కి ఒక అవధి బిందువు కాదని చూపటానికి $V_{\delta_0}(c) \cap (A - \{c\}) = \phi$ అయ్యేటట్లు ఒక $\delta_0 > 0$ ఉంటుందని చూపితే సరిపోతుంది.

14.4.5 ఉదాహరణలు:

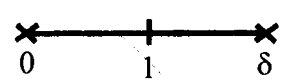
(a) $[0, 1]$ లో ఉండే ప్రతి బిందువు $(0, 1)$ కు అవధి బిందువు $0 < c < 1$ అయిన $0 < c - \delta_0 < c < c + \delta_0 < 1$ అనగా $V_{\delta_0}(c) \subseteq (0, 1)$ అయ్యేటట్లు $\delta_0 > 0$ ఎన్నుకొనవచ్చును. గమనిక (1) ప్రకారం, c బిందువు $(0, 1)$ కు అవధి బిందువు.

$c = 0, \delta > 0$ అయిన $V_\delta(c) \cap (0, 1) = (0, \delta) \cap (0, 1)$

$= (0, \delta)$ ($\delta < 1$ అయిన)

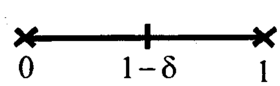


$= (0, 1)$ ($\delta \geq 1$ అయిన)

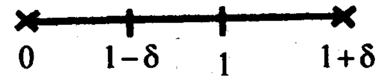


$\therefore$ '0', $(0,1)$ కి అవధి బిందువు.

$c = 1, \delta > 0$ అయిన $V_\delta(1) \cap (0, 1) = (1 - \delta, 1)$ ($0 < \delta < 1$ అయిన)



$= (0, 1)$, ($\delta \geq 1$ అయిన)



$\therefore$ $(0, 1)$కు 1 ఒక అవధి బిందువు.

(b) $A = \left\{ \frac{1}{n} \middle/ n \geq 1 \right\}$ సమితికి '0' ఒక అవధి బిందువు. $c \neq 0$ అయిన 'c', A కి అవధి బిందువు కాదు (14.4.6 చూడుము).

సాధన: '0', A కి అవధి బిందువు ఆర్కిమెడిస్ సూత్రం నుండి $\delta > 0$ అయినపుడు $k > \frac{1}{\delta}$ అయ్యేటట్లు ఒక సహజ సంఖ్య k ఉంటుంది.

$0 < \frac{1}{k} < \delta$ అయిన $\frac{1}{k} \in A \cap (0, \delta) \subseteq A \cap (-\delta, \delta)$. 0 యొక్క ప్రతి సామీప్యం $(-\delta, \delta)$లోను ఒక $\frac{1}{k}$ ఉంటుంది. కాబట్టి 0, A కి అవధి బిందువు

'0', A కి అవధి బిందువు.

(c) సహజ సంఖ్యా సమితికి అవధి బిందువులు లేవు.

సాధన: గమనిక (2) నుండి $c \in \mathbb{R}$ అయిన $(c-\delta_0, c+\delta_0) \cap \mathbb{N} = \phi$ లేక $\{c\}$ అని నిరూపిస్తే సరిపోతుంది.

$c < 0$ అయిన $\delta_0 = -\frac{c}{2}$ అనుకుందాం.

$$(c_0 - \delta_0, c + \delta_0) = \left(\frac{3c}{2}, \frac{c}{2}\right). \quad \frac{c}{2} < 0 \text{ కావున } \left(\frac{3c}{2}, \frac{c}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \phi$$

$c > 0$ అయిన $c \notin \mathbb{N}$ కావున $k-1 < c < k$ అయ్యేటట్లు k అనే సహజ సంఖ్య ఉంటుంది.

$0 < \delta_0 <$ కనిష్ఠం $(c-k+1, k-c)$ అయిన $k-1 < c - \delta_0 < c < c+\delta_0 < k$ కావున $(c-\delta_0, c+\delta_0)$లో $\mathbb{N}$ లోని మూలకాలు ఉండవు $\Rightarrow (c-\delta_0, c+\delta_0) \cap \mathbb{N} = \phi$

$c \in \mathbb{N}, \delta_0 = \frac{1}{2}$ అయిన $(c-\delta_0,\ c+\delta_0)$లో ఒకే ఒక సహజ సంఖ్య c ఉంటుంది. కావున $(c-\delta_0,\ c+\delta_0) \cap \mathbb{N} = \{c\} \cdot (c-\delta_0,\ c+\delta_0)$ అంతరంలో c తప్ప ఏ బిందువు $\mathbb{N}$ లో ఉండదు, కావున 'c', $\mathbb{N}$ కి అవధి బిందువు కాదు. కావున $\mathbb{N}$కి అవధి బిందువులు ఉండవు.

14.4.6 S.A.Q.: ఏ శూన్యేతర సంఖ్య, $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots\ldots\right\}$ సమితికి అవధి బిందువు కాదు అని చూపండి.

14.4.7 సిద్ధాంతం: A అనేది $\mathbb{R}$కి ఉపసమితి, $\mathbb{R}$లోని c, Aకి అవధి బిందువు కావటానికి నియమం $\ell im\,(a_n) = c$ అయ్యేటట్లు $A - \{c\}$లో ఒక అనుక్రమం (a_n) వుండడం ఆవశ్యకం పర్యాప్తం.

ఉపపత్తి: Aకి c అవధి బిందువు అయిన, ప్రతి సహజ సంఖ్య nకి $V_{1/n}(c) \cap A - \{c\} \neq \phi$ కాబట్టి $V_{1/n}(c) \cap A - \{c\}$ నుండి ఒక a_n తీసికోవచ్చును. $0 < |a_n - c| < \frac{1}{n}, \ell im\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ కావున స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\ell im\,(a_n - c) = 0, \ell im\,(a_n) = c$.

విపర్యయంగా $\ell im\,(a_n) = c,\ a_n \neq c$ అయ్యేటట్లు Aలో (a_n) అనుక్రమం ఉంది అనుకుందాం. అప్పుడు $\delta > 0$ అయిన ప్రతి $n \geq k$కి, $0 < |a_n - c| < \delta$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{N}$లో k ఉంటుంది. కాబట్టి ప్రతి $n \geq k$కి $a_n \in V_\delta(c) \cap A - \{c\}$, ప్రతి యాదృచ్ఛిక సంఖ్య $\delta > 0$కి, $V_\delta(c) \cap (A - \{c\}) \neq \phi$ కావున Aకి c అవధి బిందువు.

14.4.8 S.A.Q.:

(a) 'c' బిందువు $A \cup B$కి అవధి బిందువు అయిన 'c' బిందువు A లేక Bకి అవధి బిందువు అని చూపండి.

(b) c బిందువు Aకి అవధి బిందువు కావటానికి నియమం c ని కలిగి వుండే ప్రతి (a, b)కి $(a,\ b) \cap A - \{c\} \neq \phi$ తుల్యం.

(c) పరిమిత సమితికి అవధి బిందువు ఉండదు.

14.4.9 సిద్ధాంతం: c బిందువు Aకి అవధి బిందువు కావటానికి ఆవశ్య పర్యాప్త నియమం ప్రతి c యొక్క సామీప్యంలో అనంతమైన బిందువులు Aలో ఉండుట.

ఉపపత్తి: c బిందువు A కు అవధి బిందువు. $\delta > 0$ అనుకొందాం. $V_\delta(c) \cap A$ ఒక పరిమిత సమితి, $F = \{a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_n\}$ అనుకొనిన $V_{\delta_1}(c) \cap F = \phi$ అయ్యేటట్లు $\delta_1 > 0$ ఉంటుంది (14.4.2).

$$\delta_2 = \text{కనిష్ఠం} \{\delta_1, \delta\} \text{ అయిన } V_{\delta_2}(c) \subseteq V_{\delta_1}(c), V_{\delta_2}(c) \subseteq V_\delta(c)$$

కావున $V_{\delta_2}(c) \cap F \subseteq V_{\delta_1}(c) \cap F = \phi$ మరియు $V_{\delta_2}(c) \subseteq V_\delta(c)$

$$\Rightarrow V_{\delta_2}(c) \cap A \subseteq V_\delta(c) \cap A = F$$

$$\Rightarrow V_{\delta_2}(c) \cap A \subseteq V_\delta(c) \cap A = \phi$$

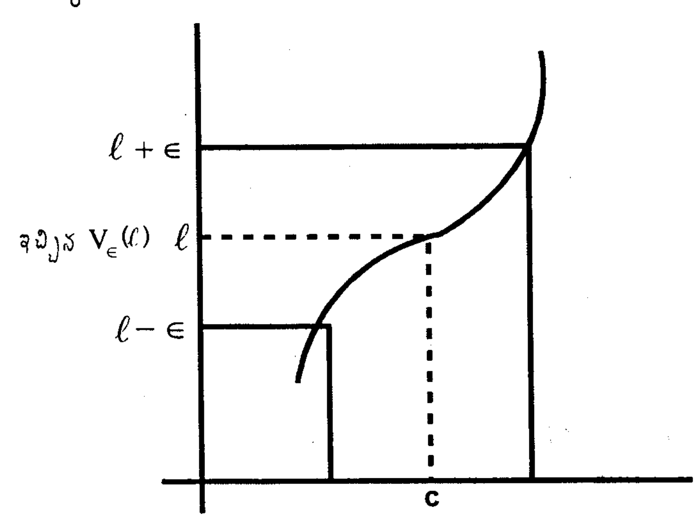
c యొక్క δ_2 – సామీప్యంలోని ఏ బిందువులు A లో ఉండవు కావున A కి c అవధి బిందువు కాదు, కాని ఇది మన భావనకి విరుద్ధం. అందుచేత c ప్రతి సామీప్యంలో అనంత సంఖ్యలో బిందువులు A లో ఉంటాయి.

విపర్యయంగా, c యొక్క ప్రతి సామీప్యంలోని అనంత సంఖ్యలో A బిందువులు ఉంటాయి అనుకుందాం. అపరిమిత సమితిలో నుండి $c^1 \neq c$ అయ్యేటట్లు A లోని c^1 ఎన్నుకొనవచ్చును.

c యొక్క సామీప్యంలో c కాకుండా కనీసం ఒక బిందువు అయినా A లో ఉంటుంది కావున A కి c అవధి బిందువు.

ఉప సిద్ధాంతం: పరిమిత సమితికి అవధి బిందువులు లేవు.

14.4.10 అవధి నిర్వచనం: $A \subseteq \mathbb{R}$, c, A కి అవధి బిందువు అనుకుందాం. $f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం. $x \in A$, $0 < |x - c| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లుగా ప్రతి $\in > 0$ కి, అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటే f యొక్క అవధి ℓ అంటాము.



$V_\delta(c)$ వ్యవస్థితం

c వద్ద f యొక్క అవధి 'ℓ' అయిన (i) c వద్ద f, ℓకి అభిసరణ చెందుతుందని (ii) x, c లను సమీపిస్తున్నప్పుడు $f(x)$, ℓను సమీపిస్తుందని అంటాం.

వీటిని సంకేతపరంగా (i) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$

(ii) $x \to c$ అయినప్పుడు $f(x) = \ell$ అని వ్రాస్తాం.

c వద్ద f కి అవధి వ్యవస్థితం కాకపోతే c వద్ద f అపసరణ చెందుతుంది అంటాం.

14.4.11 అవధి బిందువులెందుకు?: ప్రతి బిందువుకీ వర్తింప చేయకుండా, అవధి నిర్వచనం అవధి బిందువుకి మాత్రమే ఎందుకు పరిమితం చేయాలి? అవధి నిర్వచనంలో అవధి బిందువు ఆవశ్యకత కింది దృష్టాంతంలో స్పష్టమౌతుంది.

$A = \{1, 2\}$ పరిమిత సమితి కాబట్టి అవధి బిందువులు లేవు, అందుచేత 1 అవధి బిందువు కాదు. $0 < \delta < 1$ అయితే $(1-\delta, 1+\delta) \cap A - \{1\} = \phi$ అనగా $V_\delta(1) \cap A - \{1\} = \phi$. $f : A \to \mathbb{R}$ ఏ ప్రమేయమైనప్పటికీ మరియు ℓ ఏ వాస్తవ సంఖ్య అయినా, $V_\delta(1) \cap A - \{1\} = \phi$. కావున ప్రతి $\in > 0$ కి "$0 < |x-1| < \delta, \ x \in A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \in$". ఏలననగా ఇది జరుగని యెడల $|f(x) - \ell| \geq \in$, $0 < |x-1| < \delta$ అగునట్లు A లో x, ఒక $\in > 0$ వుండవలె. ఇది $V_\delta(1) \cap A - (1) = \phi$కి విరుద్ధం. అందుచేత A మీద ప్రతి ప్రమేయానికి ప్రతీ వాస్తవ సంఖ్య, 1 వద్ద అవధి కాగల అవాంఛనీయ స్థితి ఏర్పడే ప్రమాదం వుంది. ఈ అనర్థాన్నించి తప్పించడానికే అవధి నిర్వచనాన్ని ప్రమేయపు క్షేత్రం యొక్క అవధి బిందువులకు పరిమితం చేయడం ఆవశ్యం.

14.4.12 సిద్ధాంతం: $f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం A కి c అవధి బిందువు అయిన c వద్ద f కి ఒకటి కన్నా ఎక్కువ అవధులు ఉండవు.

ఉపపత్తి: c వద్ద f యొక్క అవధి $\ell, \ell^1, \in > 0$ అయితే $x \in A, \ 0 < |x-c| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \in/2$ అయ్యేటట్లు ఒక $\delta > 0$ ఉంటుంది. అదే విధంగా $0 < |x-c| < \delta^1$, $x \in A$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell^1| < \in/2$ అయ్యేటట్లు $\delta^1 > 0$ ఉంటుంది. $\delta =$ కనిష్ఠం $\{\delta, \delta^1\}$ అనుకోండి.

$x \in A, \ 0 < |x-c| < \delta$ అయిన x పై అసమతలని తృప్తిపరుస్తుంది.

కాబట్టి, $0 \leq |\ell - \ell^1| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell^1| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell^1| < \in/2 + \in/2 = \in$

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి వర్తిస్తుంది కనుక $\ell - \ell^1 = 0, \ell = \ell^1$

$\therefore$ c వద్ద f కి అవధి వుంటే అది ఏకైకం.

14.4.13 సిద్ధాంతం: $f : A \to \mathbb{R}$, A యొక్క అవధి బిందువు 'c' అయిన క్రింది ప్రతిపాదనలు తుల్యములు

(i) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$

(ii) ℓ యొక్క ప్రతి $\in$ సామీప్యం $V_\in(\ell)$కి అనురూపంగా c యొక్క δ సామీప్యం $V_\delta(c)$, $x \in V_\delta(c) \cap A$, $x \neq c$ అయినప్పుడు $f(x) \in V_\in(\ell)$ అగునట్లుగా వుంటుంది.

ఉపపత్తి: (i) జరిగితే $\in > 0$ అయినపుడు $x \in A, 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \in$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది. $(0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \in$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది)

$x \neq c$, $x \in V_\delta(c) \cap A$ అయిన $0 < |x-c| < \delta$, $x \in A$ కాబట్టి $|f(x)-\ell| < \in$ అనగా $f(x) \in V_\in(\ell)$.

(ii) అందుచేత (i) $\Rightarrow$ (ii) జరిగితే $\in > 0$ అయినప్పుడు ఒక ధన సంఖ్య δ, $x \neq c$

$x \in V_\delta(c) \cap A \Rightarrow f(x) \in V_\in(\ell)$ అయ్యేటట్లు ఉంటుంది.

$x \neq c$, $x \in V_\delta(c) \cap A \Rightarrow 0 < |x-c| < \delta$

$f(x) \in V_\in(\ell) \Rightarrow |f(x)-\ell| < \in$

$0 < |x-c| < \delta, x \in A$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell| < \in$

కాబట్టి $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$

14.4.14 ఉదాహరణలు:

(a) $\lim\limits_{x \to c} b = b$

సాధన: ప్రతి x కి $f(x) = b$ అనుకుందాం. $\in > 0$ అనుకోండి. $\delta = 1$గా తీసుకుందాం.

$0 < |x-c| < 1$ అయిన $|f(x) - b| = |b-b| = 0 < \epsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = b$

(b) $\lim_{x \to c} x = c$

ప్రతి xకి $g(x) = x$ అనుకుందాం.

$\epsilon > 0$ అయిన $\delta(\epsilon) = \epsilon$గా తీసుకుందాం.

$0 < |x-c| < \delta$ అయినప్పుడు $|g(x)-c| = |x-c| < \delta = \epsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = c$

(c) $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$

ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $h(x) = x^2$ అనుకుందాం. $0 < |x-c| < 1$ అయిన

$|x| = |x-c+c| \leq |x-c| + |c| < 1+|c|$

$\Rightarrow |x+c| \leq |x| + |c| < 1+2|c|$

$$\therefore |h(x) - c^2| = |x^2-c^2| = |x-c||x+c| \leq (2|c|+1)|x-c| \quad \cdots \quad (1)$$

$\epsilon > 0$ అయిన $\delta(c) =$ కనిష్ఠం $\left\{1, \frac{\epsilon}{2|c|+1}\right\}$గా తీసుకుందాం.

$0 < |x-c| < \delta(\epsilon)$ అయిన (1) నుండి

$|x^2-c^2| < (2|c|+1)\ |x-c| < \epsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to c} h(x) = c^2$

(d) $c \neq 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$

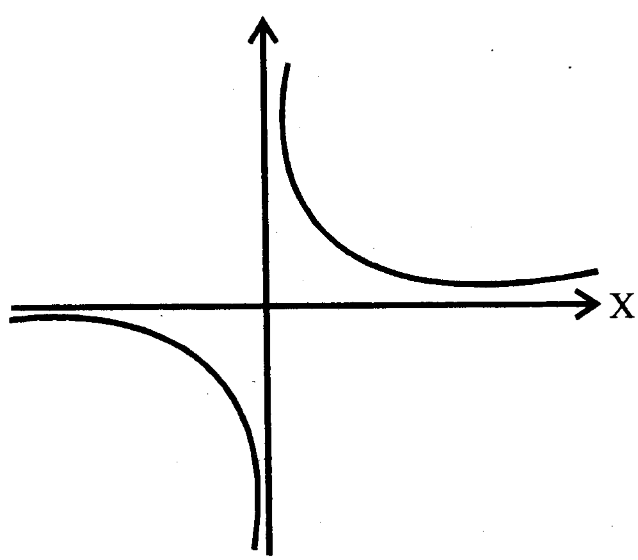
$\phi(x) = \frac{1}{x}$ యొక్క ప్రదేశం $\mathbb{R} - \{0\}$. $c > 0$ అనుకుందాం.

c యొక్క $\delta-$ సామీప్యం $V_{c/2}(c)$

$x \in V_{c/2}(c) \Leftrightarrow |x-c| < c/2 < x < \frac{3c}{2}$

$x \in V_{c/2}(c)$ అయిన $|\phi(x) - \phi(c)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right|$

$= \left|\frac{x-c}{cx}\right| < \frac{|x-c|}{c} \cdot \frac{2}{c}$ $\left(\because x > c/2\right)$



Graph of $g(x) = 1/x \ (x \neq 0)$

$\delta =$ కనిష్ఠం $\left\{\frac{c}{2}, \frac{\in c^2}{2}\right\}$గా తీసుకుంటే

$|x - c| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|\phi(x) - \phi(c)| < \in$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \phi(x) = \phi(c) \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

ఇదే విధంగా $c < 0$ అయినప్పుడు కూడా నిరూపించవచ్చును.

(e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \dfrac{4}{5}$

$\phi(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ యొక్క ప్రదేశం $\mathbb{R}$

2 యొక్క సామీప్యం $V_a(2)$ (a స్థిరం)గా తీసుకుందాం $\left|\phi(x) - \dfrac{4}{5}\right| = \dfrac{|5x^3 - 4x^2 - 24|}{5(x^2 + 1)}$

$$5x^3 - 4x^2 - 24 = (x - 2)(5x^2 + 6x + 12)$$

$0 < a < 2$ అయిన $|x - 2| < a \Rightarrow 0 < 2 - a < x < 2 + a$

$a = 1$ అనుకొనిన $1 < x < 3$ అప్పుడు

$$5x^2 + 6x + 12 < 5(3)^2 + 6(3) + 12 = 75$$

$0 < |x - 2| < 1$ అయిన $\left|\phi(x) - \dfrac{4}{5}\right| < \dfrac{|x - 2|(75)}{5(x^2 + 1)} < 15|x - 2| \quad \cdots \quad (1)$

$$(\because x^2 + 1 > 1)$$

$\delta(\epsilon) =$ కనిష్ఠం $\left\{1, \dfrac{\epsilon}{15}\right\}$గా తీసుకుంటే $0 < |x - 2| < \delta(\epsilon)$ అయినప్పుడు $\left|\phi(x) - \dfrac{4}{5}\right| < \epsilon$

కాబట్టి $\lim\limits_{x \to 2} \phi(x) = \dfrac{4}{5}$.

(f) **$\mathbb{R}$ లో I ఒక అంతరం. $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ అనుకుందాం. $x \in I$ అయితే $|f(x) - L| \leq k|x - c|$ అయ్యేటట్లు k, L అను స్థిర సంఖ్యలు ఉంటే $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ అని చూపండి.**

సాధన: $\in > 0$ అయిన $\delta(\in) = \frac{\in}{k}$ గా తీసుకుందాం. $0 < |x-c| < \delta(\in)$ అయిన $|f(x) - L| \le k|x-c| < \in$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

14.4.14A S.A.Q.:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ ప్రతి x కి $g(x) = f(x+c)$ అయిన

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ell$ అని చూపండి.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయానికి 0 వద్ద అవధి 'ℓ'. $a > 0$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = f(ax)$ గా నిర్వచిస్తే $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ell$ అని చూపండి.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $f(x) = \begin{cases} x & (X \text{ అకరణీయ సంఖ్య అయిన}) \\ 0 & (X \text{ కరణీయ సంఖ్య అయిన}) \end{cases}$ గా నిర్వచిస్తే

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (b) $c \ne 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం. I ఒక వివృతాంతరం. f_1, I మీద ప్రమేయం. $c \in I$ అయిన c వద్ద f_1 కి అవధి ఉండడాన్కి తుల్యం c వద్ద f కి అవధి వుండడం అని చూపండి. అవధి వ్యవస్థితమైతే $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} f_1(x)$ అని చూపండి.

14.4.15 సిద్ధాంతం (అనుక్రమాల నియమం): $f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం A కి అవధి బిందువు c అయిన కింది ప్రతిపాదనలు తుల్యం.

(i) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$

(ii) A లోని అనుక్రమం (x_n), c కి అభిసరణ చెందుతూ ప్రతి n కి $x_n \ne c$ అయిన $f(x_n)$, ℓ కి అభిసరణ చెందుతుంది.

ఉపపత్తి: $(i) \to (ii)$

$\ell im_{x \to c} f(x) = \ell$ మరియు A లో అనుక్రమం (x_n), c కి అభిసరణ చెందుతుందని మరియు ప్రతి n కి $x_n \neq c$ అని అనుకోండి. $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0$, $x \in A$, $0 < |x-c| < \delta$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటుంది.

(x_n) అభిసరణ అనుక్రమం కావున $\delta > 0$ కి అనురూపంగా $n \geq k(\delta)$ అయినప్పుడు $|x_n - c| < \delta$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{N}$ లో $k(\delta)$ వ్యవస్థితము.

$\therefore n \geq k(\delta)$ అయిన $|f(x_n) - \ell| < \in$

$\Rightarrow (f(x_n))$ అనుక్రమం 'ℓ'కి అభిసరణ చెందుతుంది.

$(ii) \to (i)$

(i) జరగదు అనుకుందాం. ప్రతి $\delta > 0$ కి అనురూపంగా $x_\delta \neq c$, $x_\delta \in A \cap V_\delta(c)$ మరియు $f(x_\delta) \notin V_{\in_0}(\ell)$ అయ్యేటట్లు ℓ చుట్టూ ఒక $\in_0$ సామీప్యం ఉంటుంది.

ప్రతి n కి, $\delta = \frac{1}{n}$ గా తీసుకొనిన

$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}$, $x_n \in A$, $|f(x_n) - \ell| \geq \in_0$ అయ్యేటట్లు కనీసం ఒక x_n అయినా వుంటుంది. c చుట్టూ ఈ అనుక్రమం (x_n) $A - \{c\}$ లోనిదే కాని $(f(x_n))$ అనుక్రమం అభిసరణ చెందదు.

ఇది (ii)కి విరుద్ధం.

(i) జరగనప్పుడు (ii) జరగదు. కావున $(ii) \to (i)$

14.4.16 ఉదాహరణలు: అనుక్రమాల సూత్రంని ఉపయోగించి కింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) $\ell im_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$ (ii) $\ell im_{x \to 2} \frac{1}{1-x} = -1$ (iii) $\ell im_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$

సాధన: $\ell im (x_n) = 2$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{R} - \{2\}$ లో (x_n) అనుక్రమమైతే $\ell im (x_n^2) = 4$, $\ell im(x_n^3) = 8$ కాబట్టి

$\ell im (x_n^2 + 1) = \ell im(x_n^2) + 1 = 4 + 1 = 5.$

ఇట్లే $\ell\text{im}\left(x_n^3 - 4\right) = \ell\text{im}\left(x_n^3\right) - 4 = 8 - 4 = 4$

కాబట్టి $\underset{n}{\ell\text{im}} \dfrac{x_n^3 - 4}{x_n^2 + 1} = \dfrac{4}{5}$ కావున $\underset{x \to 2}{\ell\text{im}} \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \dfrac{4}{5}$

(ii) $\underset{x \to 2}{\ell\text{im}} \dfrac{1}{1-x} = -1$

సాధన: $\dfrac{1}{1-x}$ యొక్క ప్రదేశం $\mathbb{R} - \{1\}$

$\ell\text{im}\, x_n = 2$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ లో ఏ అనుక్రమం (x_n)కైనా

$\ell\text{im}\left(1 - x_n\right) = 1 - \ell\text{im}\left(x_n\right) = 1 - 2 = -1$

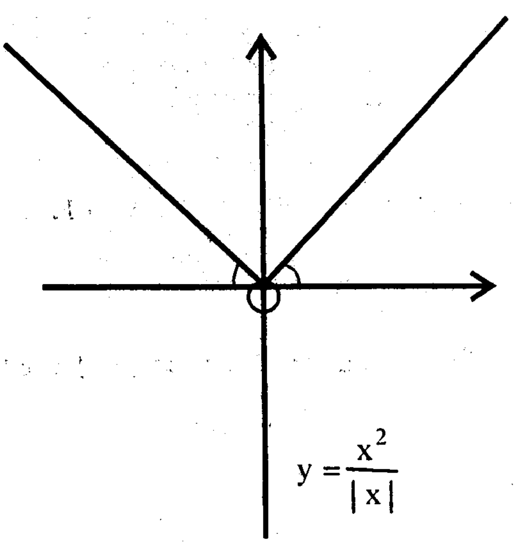
ప్రతి nకి $x_n \neq 1$ కావున $\ell\text{im}\left(\dfrac{1}{1-x_n}\right) = \dfrac{1}{-1} = -1$

అందుచేత $\underset{x \to 2}{\ell\text{im}} \dfrac{1}{1-x} = -1$

(iii) $\underset{x \to 0}{\ell\text{im}} \dfrac{x^2}{|x|} = 0$

సాధన: $\dfrac{x^2}{|x|}$ యొక్క ప్రదేశం $\mathbb{R} - \{0\}$; $\dfrac{x^2}{|x|} = \dfrac{|x|^2}{|x|} = |x|$

$\ell\text{im}\, x_n = 0$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{R} - \{0\}$ ఒక అనుక్రమం ఉంటుంది.



$\Rightarrow \ell im\,|x_n| = 0$

$\frac{x_n^2}{|x_n|} = \frac{|x_n|^2}{|x_n|} = |x_n|$ కావున $\ell im\,\frac{x_n^2}{|x_n|} = 0 \;\Rightarrow \ell im\,\frac{x^2}{|x|} = 0$

14.4.17 అపసరణ నియమం: $A \subseteq \mathbb{R}$, c, A కు అవధి బిందువు $f : A \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$

(i) $\ell im_{x \to c} f(x) \neq \ell$

(ii) $\ell im_{x \to c} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు. ఈ రెండింటికి నియమాలను రాబట్టుదాం.

సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, c, A కి అవధి బిందువు. $f : A \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ అయిన కింది ప్రతిపాదనలు తుల్యం.

A 1 : $\ell im_{x \to c} f(x) \neq \ell$ A 2 : $\ell im\,(x_n) = c$

$\ell im\,(f(x_n)) \neq \ell$ అయ్యేటట్లు $A - \{c\}$లో ఒక అనుక్రమం (x_n) వుంటుంది.

ఉపపత్తి: A 1 నిజం కాదు అనుకుందాం.

14.4.15 ప్రకారము $\ell im\,(x_n) = c$, అవుతూ $\ell im\,(f(x_n)) = \ell$ కానట్లుగా ఒక అనుక్రమం (x_n) $A - \{c\}$లో ఉంటుంది. అందుచేత A 2 నిజం కాదు. కాబట్టి $A\,2 \Rightarrow A\,1$.

విపర్యయంగా A 2 నిజం కాదు అనుకుందాం.

$\Rightarrow \ell im\,(x_n) = c$, $\ell im\,(f(x_n)) \neq \ell$ (x_n) అనుక్రమం $A - \{c\}$లో ఉంటుంది.

$\Rightarrow \ell im_{x \to c} f(x) \neq \ell \Rightarrow$ A 1 నిజం కాదు So $A\,1 \to A\,2$

14.4.18 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, c, A యొక్క అవధి బిందువు $f : A \to \mathbb{R}$ అయిన కింది ప్రతిపాదనలు తుల్యం.

A : 'c' వద్ద $f(x)$ అభిసరణ చెందదు.

B : $\ell im\,(x_n) = c$, $\{f(x_n)\}$ అభిసరణ చెందకుండా (x_n) అనుక్రమం $A - \{c\}$లో ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: A నిజం కాదు అనుకుందాం. అప్పుడు c వద్ద $f(x)$ అభిసరణ చెందుతుంది. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అనుకుందాం.

$A-\{c\}$లోని అనుక్రమం (x_n)కి $\ell im(x_n) = c$ అయితే $\ell im(f(x_n)) = \ell$ కాబట్టి B నిజం కాదు.

కాబట్టి $B \Rightarrow A$.

విపర్యయంగా B నిజం కాదు అనుకుందాం. $A - \{c\}$లోని అనుక్రమం (x_n)కి $\ell im(x_n) = c$ అయితే $(f(x_n))$ అనుక్రమం అభిసరణ చెందుతుంది.

ఇప్పుడు A నిజం కాదు అని నిరూపిద్దాం. అనగా $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అయ్యేటట్లు $\ell \in \mathbb{R}$ ఉంటుంది అని నిరూపిస్తే చాలు. దీనికి తుల్యంగా $A - \{c\}$లోని (x_n) అనుక్రమం 'c'కు అభిసరణ చెందితే $(f(x_n))$ అనుక్రమం 'ℓ'కు అభిసరణ చెందునట్లు ఒక ℓ వుంటుందని నిరూపిస్తే చాలు. అనగా అటువంటి అన్ని అనుక్రమాలు (x_n)లకి అనురూపంగా $\ell im\ f(x_n)$ ఒకే సంఖ్య అవుతుంది అని నిరూపిస్తే చాలు.

దానికి విపర్యయంగా, $\ell im(x_n) = \ell im(y_n) = c$ మరియు $\ell im(f(x_n)) \neq \ell im(f(y_n))$ అయ్యేటట్లు (x_n), (y_n)లు $A-\{c\}$లో ఉంటే $A - \{c\}$లో $Z = (z_n)$ అనుక్రమాన్ని ప్రతి n కి $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n$గా నిర్వచించుదాం.

$\ell im(x_n) = \ell im(y_n) = c$ కావున $\ell im\ z_{2n-1} = \ell im\ z_{2n} = c$.

$\Rightarrow \ell im\ (x_n) = c$ మరియు $\ell im\ f(z_{2n-1}) = \ell im\ f(x_n)$, $\ell im\ f(z_{2n}) = \ell im\ f(y_n)$

$\Rightarrow \ell im\ f(z_{2n-1}) \neq \ell im\ f(z_{2n})$

$\Rightarrow \ell im\ f(z_n)$ వ్యవస్థితం కాదు. ఇది B నిజం కాదు అను దానికి విరుద్ధం.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x)$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$\Rightarrow$ A నిజం కాదు. కాబట్టి $A \Rightarrow B$.

14.4.19 ఉదాహరణలు:

(a) $\mathbb{R}$లో $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ వ్యవస్థితం కాదు.

సాధన: $x > 0$ అయిన $f(x) = \frac{1}{x}$ అనుకుందాం.

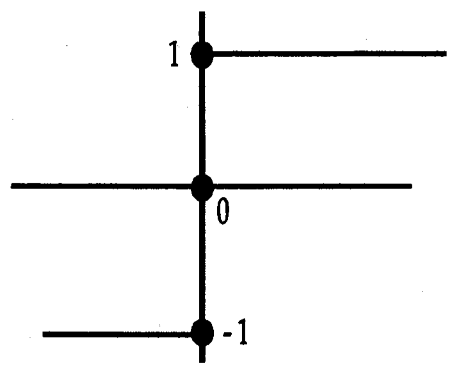
ప్రతి n కి $x_n = \frac{1}{n}$ గా (x_n) అనుక్రమాన్ని తీసుకుందాం $\ell im\,(x_n) = 0$ కాని $\ell im\, f(x_n) = \ell im\,(n)$

$\left(f(x_n)\right) = (n)$ అనుక్రమం $\mathbb{R}$ లో అభిసరణ చెందదు అని మనకు తెలియును.

కాబట్టి $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ వ్యవస్థితం కాదు.

(b) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ అయిన}) \\ 0 & (x = 0 \text{ అయిన}) \\ -1 & (x < 0 \text{ అయిన}) \end{cases}$ గా నిర్వచించబడిన "చిహ్న ప్రమేయం"ను తీసుకుంటే

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.



ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కు $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ గా తీసుకుంటే $\ell im\,(x_n) = 0$

కాని $\operatorname{sgn}(x_n) = (-1)^n\ (n \in \mathbb{N})$. $(\operatorname{sgn}(x_n)) = \left((-1)^n\right)$ అనుక్రమం అభిసరణ చెందదు.

కాబట్టి $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

(c) $\mathbb{R}$ లో $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ వ్యవస్థితం కాదు. **(14.4.14 (b) చూడండి)**

సాధన: $x \neq 0$ అయిన $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ అనుకుందాం.

$\ell im\left(x_n\right) = \ell im\left(y_n\right) = 0$ మరియు $\ell im\ g\left(x_n\right) \neq \ell im\ g\left(y_n\right)$ అయ్యేట్లు $\left(x_n\right), \left(y_n\right)$ అనుక్రమాలు $\mathbb{R} - \{0\}$ లో ఉంటాయని చూపుదాం.

$n \in \mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $x_n = \frac{1}{n\pi}$ అనుకుంటే $\ell im\left(x_n\right) = 0$ $g\left(x_n\right) = \sin(n\pi) = 0$ కావున

$\ell im\ g\left(x_n\right) = 0$

$y_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$ అనుకొనిన $\ell im\ \left(y_n\right) = 0$ మరియు

$$g\left(y_n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin \pi/2 = 1$$

$$\Rightarrow \ell im\left(g\left(y_n\right)\right) = 1 \ \Rightarrow \ell im\left(g\left(x_n\right)\right) \neq \ell im\left(g\left(y_n\right)\right)$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} g(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

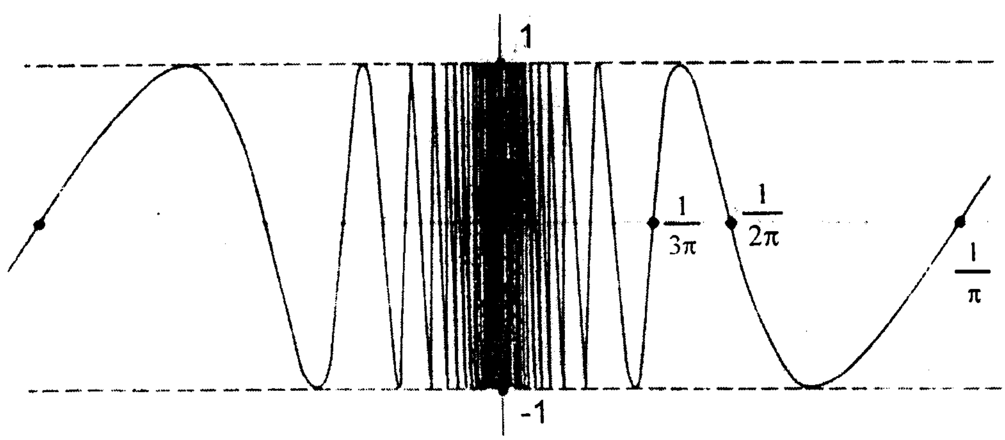


Figure 14.4.19(c) $g(x) = \sin(1/x)\ (x \neq 0)$ ప్రమేయం

14.5 అవధి సిద్ధాంతాలు:

14.5.1 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$, c, A కు అవధి బిందువు. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = m$ అయిన

(i) $\lim\limits_{x \to c} (f+g)(x) = \ell + m = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(ii) $\lim\limits_{x \to c} (f-g)(x) = \ell - m = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

ఉపపత్తి: $\lim(x_n) = c$, (x_n) అనుక్రమం $A - \{c\}$లో ఉంది అనుకుందాం.

$$\Rightarrow \lim(f(x_n)) = \ell, \ \lim(g(x_n)) = m$$

$$\Rightarrow \lim((f+g)(x_n)) = \lim(f(x_n) + g(x_n))$$

$$= \ell + m = \lim(f(x_n)) + \lim(g(x_n))$$

ఇది $A - \{c\}$లోని ప్రతి అనుక్రమం (x_n)కి వర్తిస్తుంది. కావున

$$\lim_{x \to c} (f+g)(x) = \ell + m = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} ((f-g)(x_n)) = \lim_{n \to \infty} (f(x_n) - g(x_n))$$

$= \ell - m$ కావున $\lim\limits_{x \to c} (f-g)(x) = \ell - m$

$$= \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = m$$

14.5.2 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, c, A కు ఒక అవధి బిందువు $f : A \to \mathbb{R}$, $f : g \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = m$ అయిన (i) $a \in \mathbb{R}$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} (af)(x) = a\ell$, (ii) $\lim\limits_{x \to c} (fg)(x) = \ell m$.

ఉపపత్తి: $\ell im\left(x_n\right)=c$ ప్రతి n కి x_n, $A-\{c\}$లో ఉంది అనుకుందాం.

$\Rightarrow \ell im\, f\left(x_n\right)=\ell,\ \ell im\, g\left(x_n\right)=m$

$\ell im\ (f g)\left(x_n\right)=\ell\, m$ మరియు $a \in \mathbb{R}$ అయిన $\ell im\ (a\, f)\left(x_n\right)=a\,\ell$

కావున $\ell im\,(f\ g)(x)=\ell\, m$ మరియు $\lim\limits_{x \to c}(a f)(x)=a\,\ell$

14.5.3 ఉప సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, c, A కి ఒక అవధి బిందువు $1 \le i \le n$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} f_i(x)=\ell_i$ అయ్యేటట్లు $f_i : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాలు మరియు $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

(i) $\lim\limits_{x \to c}\left(b_1 f_1+b_2 f_2+\cdots\cdots+b_n f_n\right)(x)=b_1\ell_1+b_2\ell_2+\cdots\cdots+b_n\ell_n$

(ii) $\lim\limits_{x \to c}\left(f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\right)(x)=\ell_1, \ell_2, \cdots\cdots, \ell_n$

ఉపపత్తి: గణితానుగమనాన్ని ఉపయోగిస్తాం.

14.5.4 S.A.Q.: $\lim\limits_{x \to c}(f+g)(x)=\lim\limits_{x \to c} f(x)+\lim\limits_{x \to c} g(x)$ అని $\in, \delta$ నిర్వచనంను ఉపయోగించి నిరూపించండి.

14.5.5 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, f, g లు A మీద ప్రమేయాలు. c, A కి ఒక అవధి బిందువు. A లోని ప్రతి x కి $g(x) \neq 0$. $\lim\limits_{x \to c} g(x)=m \neq 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell}{m}$.

ఉపపత్తి: $x_n \neq c$, $\ell im\left(x_n\right)=c$ అయ్యేటట్లు $\left(x_n\right)$ అనుక్రమం A లో ఉంటే

$\Rightarrow \ell im\, f\left(x_n\right)=\ell,\ \ell im\, g\left(x_n\right)=m$

$$\Rightarrow \ell im\left(\frac{f}{g}\right)\left(x_n\right)=\frac{\ell im\, f\left(x_n\right)}{\ell im\, g\left(x_n\right)}=\frac{\ell}{m}$$

$$\therefore \lim_{x \to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\ell}{m}$$

14.5.6 ఉదాహరణలు:

(a) $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to c} x^k = c^k$, $c \neq 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2+1)(x^3-4) = 20$

సాధన: $\lim\limits_{x \to 2} (x^2+1)(x^3-4) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2+1) \cdot \lim\limits_{x \to 2} (x^3-4)$

$$= (2^2+1)(2^3-4) = 5 \cdot 4 = 20$$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^3-4}{x^2+1}\right) = \frac{4}{5}$

14.5.5 సిద్ధాంతం ప్రకారం, $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^3-4}{x^2+1}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^3-4)}{\lim\limits_{x \to 2} (x^2+1)} = \frac{4}{5}$

(d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{4}{3}$

$f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 3x - 2$ ($x \in \mathbb{R} - \{2\}$) అనుకుందాం.

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0$ కావున 14.5.5 ఉపయోగించలేం.

$x \neq 2$ అయిన $\frac{x^2-4}{3x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)} = \frac{x+2}{3}$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{3x-6} = \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

14.5.7 ఉదాహరణ: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, Aకి c అవధి బిందువు. ప్రతి xకి $f(x) \geq 0$ అయినప్పుడు $\sqrt{f} : A \to \mathbb{R}$ ని $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$ గా నిర్వచిద్దాం. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అయితే $\lim\limits_{x \to c} (\sqrt{f})(x) = \sqrt{\ell}$ అని చూపండి.

సాధన: సందర్భం (i): $\ell = 0,\ 0 < |x - c| < \delta,\ x \in A$ అయినప్పుడు $f(x) = |f(x)| < \epsilon^2$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\epsilon > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$$\therefore 0 < |x - c| = \delta \text{ అయినప్పుడు } \sqrt{f(x)} = \left|\sqrt{f(x)}\right| < \epsilon \text{ కావున } \lim_{x \to c} \left(\sqrt{f}\,(x)\right) = \sqrt{\ell}$$

సందర్భం (ii): $\ell > 0,\ 0 < |x-c| < \delta_1,\ x \in A$ అయిన $|f(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$ అయ్యేటట్లు ఒక $\delta_1 > 0$ ఉంటుంది.

$$0 < |x - c| < \delta_1,\ x \in A \text{ అయిన } |\ell| - |f(x)| \le |\ell - f(x)| < \frac{\ell}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{2} < f(x) \Rightarrow \sqrt{f(x)} > \sqrt{\frac{\ell}{2}}$$

అంతేకాక $x \in A,\ 0 < |x-c| < \delta_2$ అయిన $|f(x) - \ell| < \left(\sqrt{\frac{\ell}{2}} + \sqrt{\ell}\right) \in \delta(\epsilon) =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అనుకుందాం.

$$0 < |x-c| < \delta(\epsilon),\ x \in A \text{ అయిన}$$

$$\left|\sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}\right| = \frac{|f(x) - \ell|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{\ell}} < \frac{|f(x) - \ell|}{\sqrt{\frac{\ell}{2}} + \sqrt{\ell}} < \frac{\sqrt{\ell} + \sqrt{\ell/2}}{\sqrt{\ell} + \sqrt{\ell/2}} \cdot \epsilon = \epsilon$$

అందుచేత $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$

14.5.8 S.A.Q.: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x + x^2}$ కనుక్కోండి.

14.5.9 S.A.Q.: (a) p ఒక బహుపది ప్రమేయం అయిన $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$ అని చూపుము.

(b) p, q లు రెండు $\mathbb{R}$ మీద బహుపది ప్రమేయాలు, $q(c) \neq 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(c)}{q(c)}$ అని చూపుము.

14.5.10 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ అనేది A కి ఒక అవధి బిందువు. ప్రతి $x \neq c$ కి $a \le f(x) \le b$, $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ వ్యవస్థితమయితే $a \le \lim\limits_{x \to c} f(x) \le b$.

ఉపపత్తి: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow A - \{c\}$లో (x_n) ఏదైన ఒక వాస్తవ అనుక్రమం 'c'కు అభిసరణ చెందితే $(f(x_n))$ అనుక్రమం 'ℓ'కు అభిసరణ చెందుతుంది.

ప్రతి n కి, $a \le f(x_n) \le b$ కావున $a \le \lim f(x_n) \le b \Rightarrow a \le \ell \le b$

14.5.11 స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}, f, g, h : A \to \mathbb{R}$, A కి c అవధి బిందువు $A - \{c\}$లోని ప్రతి x కి $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to c} h(x)$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \ell$.

మొదటి ఉపపత్తి: $A - \{c\}$లో (x_n) ఒక అనుక్రమం మరియు $\lim x_n = c$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to c} h(x)$ కావున $\lim\limits_{x \to c} f(x_n) = \ell = \lim\limits_{x \to c} h(x_n)$

ప్రతి n కి $f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$ కావున అనుక్రమాల స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, $\lim g(x_n) = \ell$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} g(x) = \ell$$

రెండవ ఉపపత్తి: $x \in A$, $0 < |x - c| < \delta_1$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell| < \epsilon$ మరియు $0 < |x - c| < \delta_2$ అయినప్పుడు $|h(x) - \ell| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\epsilon > 0$ కి అనురూపంగా $\delta_1, \delta_2 > 0$ ఉంటాయి.

$\Rightarrow 0 < |x - c| < \delta_1$ అయిన $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$ మరియు $0 < |x - c| < \delta_2$ అయిన $\ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon$.

$\delta =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అనుకుంటే $\Rightarrow 0 < |x - c| < \delta$ అయిన $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$ మరియు $\ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon$ కాబట్టి $\ell - \epsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < \ell + \epsilon$.

$0 < |x-c| < \delta$ అయిన $\ell - \in < g(x) < \ell + \in$ కాబట్టి $|g(x) - \ell| < \in$.

$$\therefore \lim_{x \to c} g(x) = \ell$$

14.5.12 ఉదాహరణలు:

(a) $\lim_{x \to 0} x^{3/2} = 0 \ (x > 0)$

$0 < x < 1$ అయిన $x < x^{1/2} < 1 \Rightarrow x^2 < x^{3/2} < x$

కాని $\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} x$

$\therefore$ స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\lim_{x \to 0} x^{3/2} = 0$

(b) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

ప్రతి $x > 0$ కి $-x \le \sin x \le x$ అని వుపయోగించుదాం.

$\lim_{x \to 0} x = 0 = \lim_{x \to 0} (-x)$ కావున $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

(c) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కి $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1$ వుపయోగించుదాం.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 1 = \lim_{x \to 0} x$$

స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

(d) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) = 0$

ప్రతి x కి $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq \frac{1}{x}\,(x > 0)$$ మరియు $x < 0$ అయిన $0 \leq \frac{\cos x - 1}{n} \leq -\frac{x}{2}$

$$f(x) = -\frac{x}{2}\,(x \geq 0)$$

$$= 0 \quad (x < 0)$$ మరియు

$$h(x) = \begin{cases} 0\,(x \geq 0) \\ -\frac{x}{2}\,(x < 0) \end{cases}$$ అనుకుందాం.

$x \neq 0$ అయిన $f(x) \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq h(x)$

కాని $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} h(x)$ కావున $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x \geq 0$ అయిన $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ మరియు $x < 0$ అయిన $x \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{6}x^2 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \;\forall\; x \neq 0$$

కాని $\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right) = 1 = \lim_{x \to 0} 1$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(f) $\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$x \neq 0$ అయిన $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ అనుకుందాం.

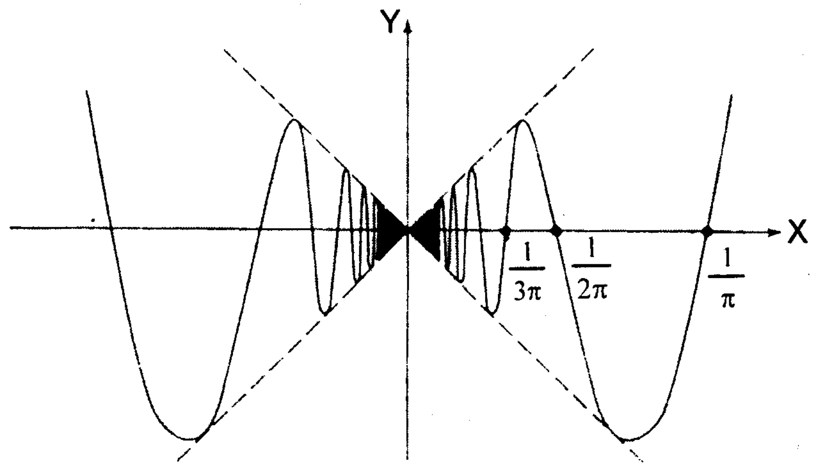


Figure 14.5.12 (f) Graph of $f(x) = x \sin(1/x) \quad (x \neq 0)$

ప్రతి $Z \in \mathbb{R}$కు $-1 \leq \sin Z \leq 1$ కావున $-|x| \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \; \forall \; x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ కావున $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

14.5.13 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, Aకు ఒక అవధి బిందువు. $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ $\left(\lim\limits_{x \to c} f(x) < 0\right)$ కావున ప్రతి $x \in V_\delta(c) \cap A - \{c\}$ అయితే $f(x) > 0 \; (f(x) < 0)$ అయ్యేటట్లు c చుట్టూ $V_\delta(c)$ సామీప్యం వ్యవస్థితం అవుతుంది.

ఉపపత్తి: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell, \; \ell > 0$ అనుకుందాం.

$0 < |x - c| < \delta, x \in A$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell| < \ell/2$ అయ్యేటట్లు $\ell/2 > 0$కు $\delta > 0$ ఉంటుంది

$$\therefore \; x \neq c, x \in V_\delta(c) \Rightarrow \frac{\ell}{2} = \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \ell/2$$

$\Rightarrow x \in V_\delta(c), \; x \neq c$ అయిన $f(x) > 0$

14.5.14 S.A.Q.: $\mathbb{R}$లో ప్రతి x, y లకు $f(x+y) = f(x) + f(y)$ అయ్యేటట్లు $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం అయిన ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య xకి $f(x) = x \cdot f(1)$ అని చూపండి.

14.5.15 S.A.Q.: ప్రతి $x, y \in \mathbb{R}$ కు $f(x+y) = f(x) + f(y)$ అయ్యేటట్లు $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం $\lim_{x \to 0} f(x) = L$ అయిన (i) $L = 0$, (ii) ప్రతి c కి $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, (iii) ప్రతి x కి $f(x) = x \cdot f(1)$.

14.6 అవధి భావ విస్తరణ:

ఒక ఉదాహరణతో మొదలు పెడతాం. R మీద ప్రమేయం $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$ తత్సమానంగా

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

$A_1 = \{x/x > 0\} = (0, \alpha)$, $A_2 = \{x/x < 0\} = (-\alpha, 0)$ అనుకుంటే, $A_1 \cup A_2 = R - \{0\}$ మరియు A_1, A_2 లు రెండింటికి c అవధి బిందువు.

A_1, A_2 మీదను g కుదింపు ప్రమేయాలు g_1, g_2. A_1లోని ప్రతి x కి $g_1(x) = -1$, A_2లోని ప్రతి x కి $g_2(x) = 1$గా నిర్వచిద్దాం.

$\delta > 0$ అయిన $A_1 \cap V_\delta(0) = (0, \delta)$, $A_2 \cap V_\delta(0) = (-\delta, 0)$

కాబట్టి $x \in A_1 \cap V_\delta(0)$ అయిన $g_1(x) = 1$ కాబట్టి $\in > 0$ అయితే $|g_1(x) - 1| = 0 < \in$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} g_1(x) = 1$ ఇదే విధంగా $\lim_{x \to 0} g_2(x) = -1$

కాని $\lim_{x \to 0} g(x)$ వ్యవస్థితం కాదు **(14.4.19 (b))** చూడుము.

ఈ ఉదాహరణ నుండి A మీద నిర్వచింపబడిన ప్రమేయాన్ని ఒక అవధి బిందువు 0 వద్ద అవధి లేనప్పుడికి ఈ ప్రమేయాన్ని $A \cap (0, \alpha)$ మరియు $A \cap (-\alpha, 0)$ ల మీద కుదింపు ప్రమేయానికి c వద్ద అవధులు ఉండవచ్చునని గమనించవచ్చును. ఈ విషయం అవధి బిందువుల వద్ద ఏకపక్ష అవధుల నిర్వచనాన్ని దారి చూపుతుంది.

14.6.1 ఏకపక్ష అవధులు - నిర్వచనాలు: $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం.

(i) $c \in \mathbb{R}$ అనేది $A \cap (c, \alpha) = \left\{x \in A /_{x > c}\right\}$ యొక్క ఒక అవధి బిందువు $\ell \in \mathbb{R}$ అనుకోండి.

$x \in A, 0 < x - c < \delta(\epsilon)$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\epsilon > 0$ కి $\delta(\epsilon) > 0$ ఉంటే c వద్ద f కుడి అవధి ℓ అంటాం. ఈ సందర్భంలో $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = \ell$ అని రాస్తాము.

(ii) $A \cap (-\alpha, c) = \{x \in A / x < c\}$ సమితికి $c \in \mathbb{R}$ ఒక అవధి బిందువు. $\ell \in \mathbb{R}$, $x \in A$ కి $0 < c - x < \delta(\epsilon)$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\epsilon > 0$ కి అనురూపంగా $\delta(\epsilon) > 0$ ఉంటుంది. c వద్ద f యొక్క ఎడమ అవధి ℓ అంటాం. దీనిని $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = \ell$ గా వ్రాస్తాం.

14.6.2 గమనిక:

(1) $\lim\limits_{x \to c+} f(x), \lim\limits_{x \to c-} f(x)$ల వద్ద f యొక్క ఏకపక్ష అవధులు అంటాం.

(2) ఏకపక్ష అవధులు రెండూ వ్యవస్థితం కాకపోవచ్చును. ఒకటి వ్యవస్థితమై రెండవది వ్యవస్థితం కాకపోవచ్చును. 0 వద్ద $g(x) = \sin x$ ప్రమేయంలో మాదిరిగా రెండూ వ్యవస్థితం అయినా అవిచ్ఛిన్నం కాకపోవచ్చును.

(3) ఎడమ చివరి బిందువు 'c'గా గల అంతరం A అయిన c వద్ద $f : A \to \mathbb{R}$ కు అవధి ఉండే c వద్ద దానికి కుడి అవధి ఉంటుంది. ఈ సందర్భంలో $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ మరియు $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$లు సమానం. (ఇదే విధంగా కుడి చివరి బిందువు 'c' గా గల అంతరం A అయిన c వద్ద f కి ఎడమ అవధి ఉంటుంది.)

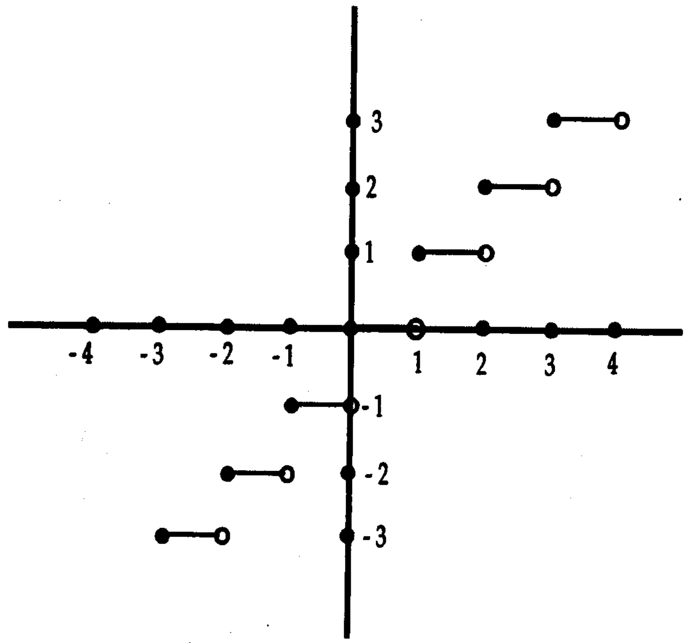
14.6.3 S.A.Q.: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ వ్యవస్థితం $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ వ్యవస్థితం. ఈ సందర్భంలో ఈ రెండు అవధులు సమానం.

14.6.4 ఉదాహరణ (a): సోపాన ప్రమేయం $[x]$, $x \in \mathbb{R}$, $n \le x < n+1$ అయ్యేటట్లుగా గల ఏకైక పూర్ణాంకం x అయితే $\phi(x) = [x] = x$ అని వ్రాస్తాము. $[x]$ని సోపాన ప్రమేయమంటాము.

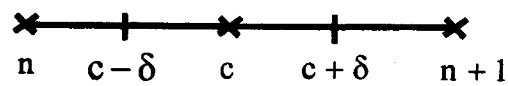
(i) c పూర్ణాంకము కాకపోతే $\lim\limits_{x \to c} \phi(x) = \phi(c)$

(ii) c పూర్ణాంకము అయితే $\lim\limits_{x \to c+} \phi(x) = c, \lim\limits_{x \to c-} \phi(x) = c - 1$

ϕ యొక్క రేఖా చిత్రంలో చూపబడినది.



సందర్భం (1): c పూర్ణాంకం కాకపోతే $n < c < n+1$ అయ్యేటట్లు 'n' అను పూర్ణాంకం ఉంటుంది.



$(n, n+1]$ అంతరంలో $\phi(x) = n$

$0 < \delta <$ కనిష్ఠం $\{c-n,\ n+1-c\}, 0 < |n-c| < \delta,\ n < c-\delta < x < c+\delta < n+1$ అయితే $|\phi(n) - n| = 0 < \in$. అందుచేత $\lim\limits_{x \to c} \phi(n) = n = \phi(c)$.

సందర్భం (2): c పూర్ణాంకం అయిన $\phi(x) = c-1, c-1 < x < c,\ \ 0 < \delta < 1$ అయిన $c-1 < c-\delta < c$, $c-\delta < n < c$ అయిన $\phi(x) = c-1, \in > 0$ అయితే $|\phi(x) - \phi(c)| = 0 < \in$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to c-} \phi(x) = c-1$.

సందర్భం (3): c పూర్ణాంకం, $c < x < c+1$ అయిన $\phi(x) = c, 0 < \delta < 1, c < n < c+\delta < c+1$ అయిన $\phi(x) = c$.

ప్రతి $\in > 0$ అయితే $|\phi(x) - c| = 0 < \in$ కావున $\lim\limits_{x \to c+} \phi(x) = c$

c పూర్ణాంకం, $n \in \mathbb{N}$ అయిన $\phi\left(c+\frac{1}{n}\right)=c$

$\phi\left(c-\frac{1}{n}\right)=c-1$ కాబట్టి $\ell im\left(\phi\left(c+\frac{1}{n}\right)\right) \neq \ell im\left(\phi\left(c-\frac{1}{n}\right)\right)$

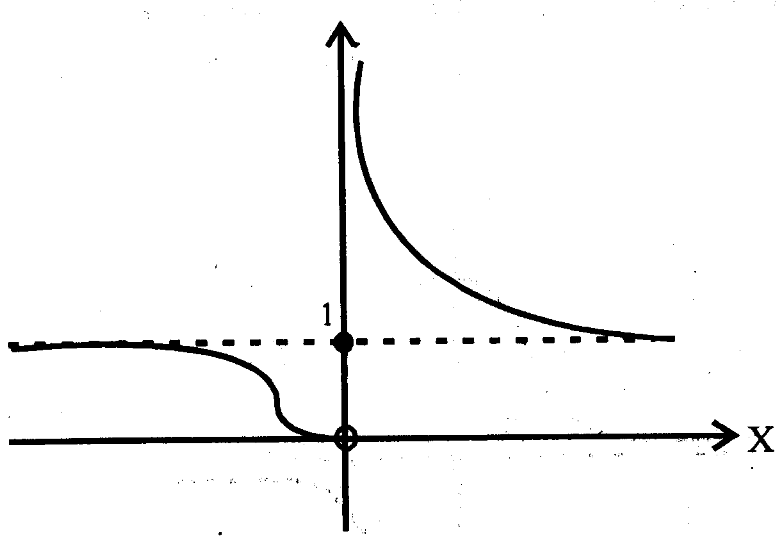
కావున $\lim\limits_{x \to c} \phi(n)$ వ్యవస్థితం కాదు.

(b) $f(x)=\sin(x)$ అనుకుందాం.

$\lim\limits_{x \to 0+} \sin(x)=1$, $\lim\limits_{x \to 0-} \sin(x)=-1$ ఈ ఒక వైపు అవధులు విచ్ఛిన్నాలు కావున '0' వద్ద f కు అవధి లేదు.

(c) $x \neq 0$ అయిన $g(x)=e^{1/x}$

$x>0$ అయిన $0<\frac{1}{x}<e^{1/x}$, $n \in \mathbb{N}$



$g(x)=e^{1/x}\ (x \neq 0)$

$x_n = \frac{1}{n}$ గా తీసుకుంటే $g(x_n) > n \; \forall \; n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0+} e^{1/x}$, $\mathbb{R}$ లో వ్యవస్థితం కాదు.

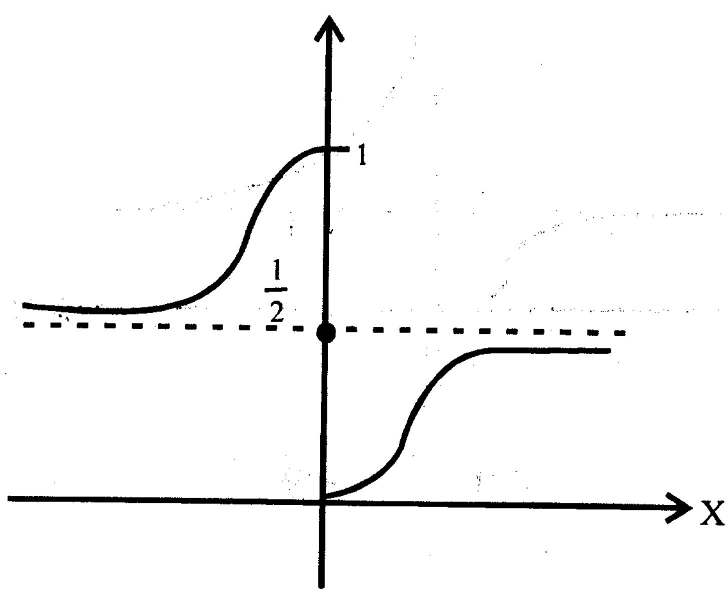
కాని $\lim\limits_{x \to 0-} e^{1/x} = 0$

$n < 0$ అయిన $0 < -\frac{1}{n} < e^{-1/x} \Rightarrow x < 0$ అయిన $0 < e^{1/x} < -x \Rightarrow \lim e^{1/x} = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} e^{1/x}$ వ్యవస్థితం కాదు.

(d) $x \neq 0$ అయిన $h(x) = \dfrac{1}{e^{1/x} + 1}$

$x > 0$ అయిన $0 < \frac{1}{x} < e^{1/x}$ కావున $0 < \dfrac{1}{e^{1/x} + 1} < \dfrac{1}{e^{1/x}} < x$



$$h(x) = 1/\left(e^{1/x} + 1\right) \; (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} h(x) = \lim_{x \to 0-} \left(\frac{1}{e^{1/x} + 1}\right) = \frac{1}{0+1} = 1$$

ఇక్కడ ఏకపక్ష అవధులు రెండూ వ్యవస్థితమమైనప్పటికి విభిన్నాలు. కావున $\lim_{x \to 0} h(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

14.6.5 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ మరియు $A \cap (c, \alpha)$ యొక్క అవధి బిందువు c అయిన కింది ప్రతిపాదితము తుల్యం.

(i) $\lim_{x \to c+} f(x) = \ell$

(ii) ప్రతి n కి, $x_n < c$ అవుతూ (x_n) అనుక్రమం c కి అభిసరణ చెందితే $(f(x_n))$ అనుక్రమం 'ℓ'కి అభిసరణ చెందుతుంది.

ఉపపత్తి: $\lim_{x \to c+} f(x) = \ell$ అనుకుందాం.

$x \in A, 0 < x - c < \delta(\in)$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta = \delta(\in) > 0$ ఉంటుంది. $x_n \in A, x_n < c, \lim(x_n) = c$ అనుకుందాం. δ కి అనురూపంగా సహజ సంఖ్య $k(\delta)$, $n \geq k(\delta)$ అయినప్పుడు $|x_n - c| = x_n - c < \delta$ అయ్యేటట్లు ఉంటుంది. $n \geq k(\delta)$ అయిన $|f(x_n) - \ell| < \in, x_n > c$ అయినప్పుడు $\lim f(x_n) = \ell$ కావున $x_n \in A, \lim x_n = c$ విపర్యయంగా $\lim_{x \to c+} f(x) \neq \ell$ అనుకుందాం.

$x \in A,\ 0 < x - c < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| > \in_0$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\delta > 0$ కు అనురూపంగా ఒక n మరియు $\in_0$ ఉంటుంది. $n \in \mathbb{N}, \delta = \frac{1}{n}$ అయిన $0 < x_n - c < \frac{1}{n}$ అయినప్పుడు $|f(x_n) - \ell| > \in_0$ అయ్యేటట్లు A లో x_n ఉంటుంది. కాబట్టి $\lim x_n = c$ కాని $\lim f(x_n) \neq \ell$.

14.6.6 S.A.Q.: c బిందువు A కు అవధి బిందువు కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్తత నియమం c బిందువు $A \cap (c, \infty)$ లేక $A \cap (-\infty, c)$ కు అవధి బిందువు అని చూపండి.

14.6.7 ఉదాహరణ: $\mathbb{R}$ మీద ϕ ప్రమేయాన్ని $\phi(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ 1 & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య}) \end{cases}$

గా నిర్వచిస్తే $\lim\limits_{x \to c+} \phi(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

సాధన: c ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకుందాం. $n \in \mathbb{N}$ అయిన $c + \frac{1}{n}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య మరియు

$$\phi\left(c + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

$$\lim_{n}\left(c + \frac{1}{n}\right) = c \text{ మరియు } \lim_{n} \phi\left(c + \frac{1}{n}\right) = 0$$

$c + \frac{\sqrt{2}}{n} > c$, $c + \frac{\sqrt{2}}{n}$ కరణీయ సంఖ్య కావున $\lim\limits_{n}\left(c + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = c$ మరియు $\lim \phi\left(c + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to c+} \phi(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

ఇదే విధంగా $\therefore \lim\limits_{x \to c-} \phi(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపవచ్చును. 'c' కరణీయ సంఖ్య అయినప్పుడు కూడా పై రీతిలో నిరూపించవచ్చును.

14.6.8 ఉదాహరణ: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని

$\phi(x) = 0 \ (x < 0)$

$= 0$ ($x \geq 0$, మరియు x అకరణీయ సంఖ్య)

$= 1$ ($x \geq 0$, x కరణీయ సంఖ్య) గా నిర్వచిస్తే $\lim\limits_{x \to 0-} \phi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} \phi(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

సాధన: $x \in (-\infty, 0)$ అయిన $\phi(x) = 0$

$\in > 0,\ \delta > 0$ అయిన $-\delta < x < 0$ మరియు $|\phi(x) - 0| = 0 < \in$ కావున $\lim\limits_{x \to 0-} \phi(x) = 0$

$$\ell im\left(\frac{1}{n}\right) = 0 = \ell im\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{1}{n}\right) = 0,\ \phi\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \ell im\ \phi\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \neq 1 = \ell im\ \phi\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0+} \phi(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

14.6.9 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R},\ c$ $A \cap (c, \infty)$ మరియు $A \cap (-\infty, c)$ రెండింటికి అవధి బిందువు అయిన $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c+} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to c-} f(x)$

ఉపపత్తి: $A \cap (c, \infty) \subseteq A$ కావున c, A కి అవధి బిందువు $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అనుకుందాం.

$x \in A,\ 0 < |x - c| < \delta(\in)$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$ ఉంటుంది.

$\therefore 0 < x - c < \delta(\in),\ x \in A$ అయిన $0 < |x - c| < \delta(\in)$

$$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \in \Rightarrow \lim_{x \to c+} f(x) = \ell$$

$A \cap (-\infty, c)$ యొక్క ఒక అవధి బిందువు c కావున $0 < c - x < \delta(\in),\ x \in A$ అయిన $0 < |x - c| < \delta(\in) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \in \Rightarrow \lim\limits_{x \to c-} f(x) = \ell$

విపర్యయంగా $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to c-} f(x)$ అనుకుందాం.

$\in > 0$ అయిన $x \in A, 0 < x - c < \delta_1, 0 < c - x < \delta_2$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కు $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ఉంటాయి.

$\delta =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అనుకుందాం.

$x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ అయిన $0 < x - c < \delta$ లేక $0 < c - x < \delta$ అవుతుంది.

$0 < x - c < \delta$ అయిన $0 < x - c < \delta_1$ మరియు $|f(x) - \ell| < \in$ మరియు $0 < c - x < \delta$ అయిన $0 < x - c < \delta_2, |f(x) - \ell| < \in$.

$\therefore x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ అయిన $|f(x) - \ell| < \in$

కావున $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$.

14.7 అనంత అవధులు మరియు అనంత విలువల వద్ద అవధులు:

14.7.1 అనంత అవధులు: $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, A కు అవధి బిందువు.

(i) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య α కి అనురూపంగా $\delta(\alpha) > 0$, x, A లో ఉంటూ $0 < |x - c| < \delta(\alpha)$ అయితే $f(x) > \alpha$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే c వద్ద f యొక్క అవధి '∞' అంటాం. దీనిని $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$గా వ్రాస్తాం.

(ii) ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య β కి అనురూపంగా $\delta(\beta) > 0$, A లో వుంటూ $0 < |x - c| < \delta(\beta)$ అయితే $f(x) < \beta$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటే c వద్ద f యొక్క అవధి $-\infty$ అంటాం. దీనిని $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$గా వ్రాస్తాం.

14.7.2: $A \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, A \cap (c, \infty) = \{x \in A / x > c\}$ కి c అవధి బిందువు. $f : A \to \mathbb{R}$ కి c వద్ద అవధి $\infty(-\infty)$ అని ఈ క్రింది సందర్భంలో అంటాము. $x \in A$, మరియు $0 < x - c < \delta$ అయినప్పుడు $f(x) > \alpha$ $(f(x) < \alpha)$ అయ్యేటట్లు α కి అనురూపంగా $\delta(\alpha) > 0$ వుండవలె. $\delta(\alpha) > 0$ ఉంటే $x \to c+$ అయినప్పుడు $f(x) \to \infty$.

$\left(f(x) \to -\infty\right)$ అంటాం. దీనిని $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = \infty$

$\left(\lim\limits_{x \to c-} f(x) = -\infty\right)$ అని వ్రాస్తాం.

14.7.3 ఉదాహరణలు:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

$\alpha < 0$ ఇవ్వబడినది, $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ గా తీసుకుందాం.

$0 < |x| < \delta$ అయిన $x^2 < \dfrac{1}{\alpha}$ కావున $\dfrac{1}{x^2} > \alpha$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x} (x \neq 0)$ g ప్రదేశం $\mathbb{R} - \{0\}$ కి 0 అవధి బిందువు.

$x > 0, \in > 0$ అయిన $|g(x)| > \in \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \in \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{\in}$ కాబట్టి $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = \alpha$

$x < 0, \beta \in \mathbb{R}, \beta < 0$ అయిన $g(x) = \dfrac{1}{x} < 0$ కాబట్టి

$\therefore g(x) < \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < \beta \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} > -\beta > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta} < x < 0$

$\beta > 0, x < 0$ అయిన $g(x) < 0 < \beta$ కాబట్టి $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = -\alpha$

$\mathbb{R}$లో $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ వ్యవస్థితము కాదు మరియు $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq \alpha$ మరియు $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq -\alpha$.

(c) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x}{x-1}$, $\dfrac{x}{x-1}$ ప్రమేయపు ప్రదేశం $\mathbb{R} - \{1\}$ కి 1 అవధి బిందువు. $\alpha > 1, 1 < x < \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$

అయిన $\alpha < \dfrac{x}{x-1}$ కావున $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x}{x-1} = \alpha$.

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}} (x > 0)$

$\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ ప్రమేయాని ప్రదేశం $R - \{0\}$ దీనికి 0 అవధి బిందువు.

$x > 0$ కావున $\dfrac{x+2}{\sqrt{x}} > \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $\alpha > 0$ మరియు $\dfrac{2}{\sqrt{x}} > \alpha$ అయిన $\dfrac{4}{\alpha^2} > x > 0$,

$\therefore 0 < x < \dfrac{4}{\alpha^2} \Rightarrow g(x) > \alpha$ కాబట్టి $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = \alpha$.

14.7.4 అనంత విలువల వద్ద అవధులు: $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, a \in A$ అయిన $(a, \infty) \subseteq A$ అనుకుందాం.

$\in > 0$ మరియు $x > \delta(\in)$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$ ఉండే $x \to \infty$ అయినప్పుడు $\ell \in \mathbb{R}$ ను f యొక్క అవధి అంటారు.

దీనిని $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$ గా వ్రాస్తాం.

14.7.5 సిద్ధాంతం: $a \in \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, (a, \infty) \subseteq A$ మరియు $f : A \to \mathbb{R}$ అయిన క్రింది ప్రతిపాదనలు తుల్యము.

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$,

(ii) $A \cap (a, \infty)$లో (x_n) అనుక్రమం $\lim x_n = \infty$ అయినప్పుడు $\lim f(x_n) = \ell$

ఉపపత్తి: $(i) \Rightarrow (ii)$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$

$x \in A \cap (a, \infty)$, $x > \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు δ ఉంటుంది.

$A \cap (a, \infty)$లో (x_n) ఏదేని అనుక్రమం మరియు $\lim x_n = \infty$ అనుకొందాం. ఈ δ కి అనురూపంగా $\mathbb{N}$లో $k(\delta)$, $n \geq k(\delta)$ అయితే $x_n > \delta$ అగస్తునట్లుగా వుంటుంది. అట్టి n $|f(x_n) - \ell| < \in$.

కాబట్టి $\lim f(x_n) = \ell$ అందుచేత $(i) \Rightarrow (ii)$

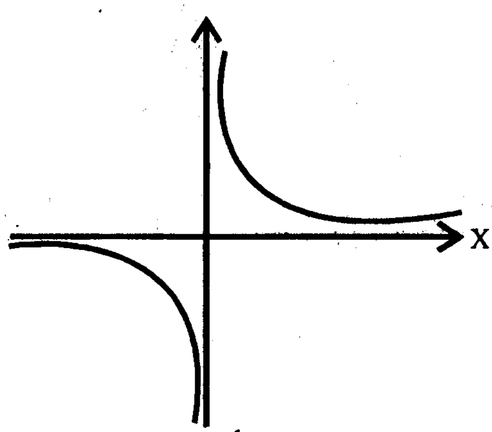
ఇప్పుడు $(ii) \Rightarrow (i)$ అని నిరూపిద్దాం.

(i) నిజం కాకపోతే 0 ఇచ్చిన ఒక ధన సంఖ్య $\in$ ప్రతి $\delta > 0$ కి అనురూపంగా కనీసం ఒక x_δ, $A \cap (a, \propto)$లలో ఉంటూ $|f(x_\delta) - \ell| \geq \in$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటుంది.

$n \in \mathbb{N}, \delta = \frac{1}{n}$గా తీసుకుంటే $A \cap (a, \propto)$లో లభించే (x_n)కి $\ell im\ x_n = \propto$ కాని $\ell im\ f(x_n) \neq \ell$.

అనగా (ii) నిజం కాదు కాబట్టి (ii) $\Rightarrow$ (i)

14.7.6 ఉదాహరణలు:



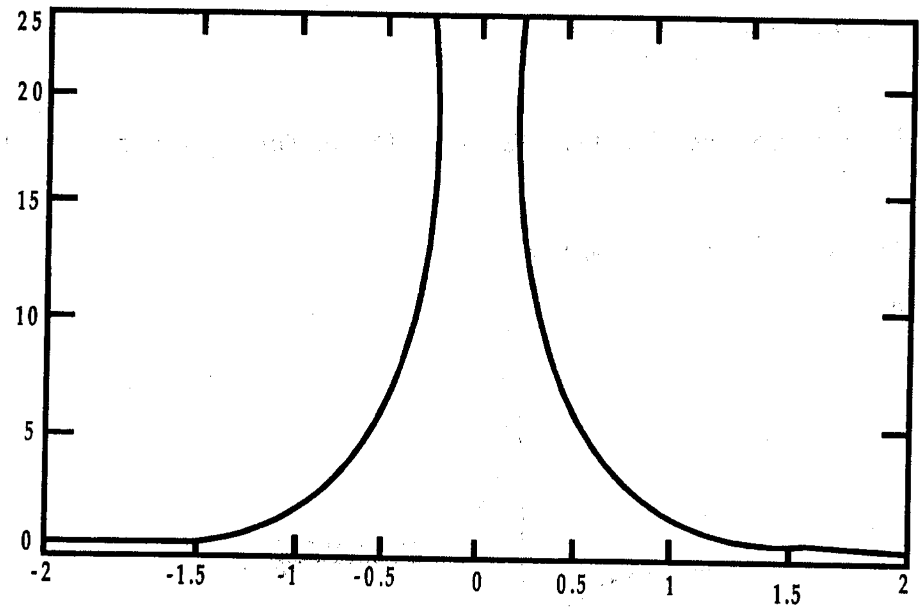
$y = \frac{1}{x}$

(a) $f(x) = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$

పై పటము నుండి $\lim\limits_{x \to \propto} \frac{1}{x} = 0$ మరియు $\lim\limits_{x \to -\propto} \frac{1}{x} = 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$

పటం నుండి $\lim\limits_{x \to \propto} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x \to -\propto} \frac{1}{x^2}$



$\frac{1}{x^2}$ రేఖా చిత్రం

14.7.7 $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$ అయిన $(a, \infty) \subseteq A$ అనుకొందాం. ఇచ్చిన ప్రతి $\alpha \in \mathbb{R}$కు $x > k(\alpha)$ అయినప్పుడల్లా $f(x) > \alpha \left(f(x) < \alpha\right)$ అయ్యేటట్లు $k(\alpha) > \alpha$ ఉంటే $x \to \infty$ అయినప్పుడు $f(x) \to \infty$, $\left(f(x) \to -\infty\right)$ అని అంటాం. దీనిని $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty\right)$గా వ్రాస్తాం.

14.7.8 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $(a, \infty) \subseteq A$ అయిన క్రింది ప్రతిపాదనలు తుల్యం.

(i) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\right)$

(ii) (a, ∞)లో (x_n) అనుక్రమం, $\lim (x_n) = \infty$ అయినప్పుడు

$\lim f(x_n) = \infty$ $\left(\lim f(x_n) = -\infty\right)$

ఉపపత్తి: (i) నిజమైతే

ఇచ్చిన $\in > 0$ కి, $x > \delta$ అయినప్పుడు $f(x) > \in$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\ell im\left(x_n\right)=\infty$ అయ్యేటట్లు $\left(x_n\right)$ ఒక అనుక్రమం అనుకొందాం.

$n \geq k$ అయినప్పుడు $x_n>\delta$ అయ్యేటట్లు ఒక సహజ సంఖ్య k ఉంటుంది.

$n \geq k$ అయితే $x_n>\delta$ అయినందున $f\left(x_n\right)>\epsilon \Rightarrow \ell im\, f\left(x_n\right)=\infty$

విపర్యయంగా $\ell im\, f(x) \neq \infty$ అనుకొందాం. ప్రతి $\delta>0$కి $x>\delta$ మరియు $f(x) \ngtr \epsilon_0$ అయ్యేటట్లు కనీసం ఒక x అయిన δ మీద ఆధారపడుతూ ఉండేటట్లు ఒక $\epsilon_0>0$ ఉంటుంది. అందుచేత

$n \in \mathbb{N}, \delta=n$గా తీసుకుంటే $x_n>n$ కాని $f\left(x_n\right)<\epsilon_0$ అయ్యేటట్లు ఒక x_n ఉంటుంది.

$\Rightarrow \ell im\left(x_n\right)=\infty$ కాని $\ell im\; f\left(x_n\right) \neq \infty$ అందుచేత (ii) నిజం కాదు.

14.7.9 ఉదాహరణలు:

(1) $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} x^n=\infty\;(n \in \mathbb{N})$

$x \in(0, \infty)$లో xకి $g(x)=x^n$ అనుకుందాం.

$\alpha>0,\ \beta=\alpha^{\frac{1}{n}}$ అయితే $x>\beta \Rightarrow g(x)=x^n>\beta^n=\alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \rightarrow \infty} g(x)=\infty$

(2) $f:(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ అయిన $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\ell$

సాధన: $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=\ell \Rightarrow x>k$ అయిన $|f(x)-\ell|<\epsilon$ అయ్యేటట్లుగా ప్రతి $\epsilon>0$ కి అనురూపంగా $k>0$ ఉంటుంది. అందుచేత $0<x<\frac{1}{k}$ అయితే

$$\left|f\left(\frac{1}{x}\right)-\ell\right|<\epsilon$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\ell$ ఇదే రీతిలో $\lim\limits_{x \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{x}\right)=\ell \Rightarrow \lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=\ell$ అని చూపవచ్చును.

(3) $f:(a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \ell \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)=\ell$ అయిన $\lim\limits_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$

సాధన: $\underset{x \to \infty}{\ell im}\ x \cdot f(x) = \ell \Rightarrow$ ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా ఒక $\delta > 0$, $x > \delta$ అయినప్పుడు $\left|x f(x) - \ell\right| < \in$ ఉంటుంది.

$\Rightarrow x > \infty$ అయిన $\left|x \cdot f(x)\right| - \left|\ell\right| < \in$

$\Rightarrow \left|x \cdot f(x)\right| < \left|\ell\right| + \in$

$\Rightarrow \left|f(x)\right| < \dfrac{\in + \left|\ell\right|}{\left|x\right|} < \in$ $\qquad \left(x > \dfrac{\in + \left|\ell\right|}{\in}\right)$ గా తీసుకుందాం.

$\therefore \underset{x \to \infty}{\ell im}\ f(x) = 0$

(4) (a, ∞) మీద f, g లు నిర్వచించబడి $\underset{x \to \infty}{\ell im}\ f(x) = \ell$, $\underset{x \to \infty}{\ell im}\ g(x) = \infty$ అయిన $\underset{x \to \infty}{\ell im}\ (f \cdot g)(x) = \ell$ అని చూపండి.

సాధన: $\underset{x \to \infty}{\ell im}\ f(x) = \ell \Rightarrow$ ఇచ్చిన $\in > 0$ కి అనురూపంగా ఒక $k > 0$, $x > k$ అయినప్పుడల్లా $\left|f(x) - \ell\right| < \in$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటుంది.

$\underset{x \to \infty}{\ell im}\ g(x) = \infty \Rightarrow y > H$ అయినప్పుడు $g(y) > k$ అయ్యేటట్లు kకు అనురూపంగా $H > 0$ ఉంటుంది.

$g(\eta) > k$ అయిన $\eta > H$ కావున $\left|(fog)(y) - \ell\right| = \left|f(g(y)) - \ell\right| < \in$

$\Rightarrow y > H$ అయినప్పుడు $\left|(fog)(y) - \ell\right| < \in$

$\Rightarrow \underset{x \to \infty}{\ell im}\ (fog)(x) = \ell$

(5) $A \subseteq \mathbb{R}$, c, Aకు అవధి బిందువు. $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$లు రెండు ప్రమేయాలు. $\ell > 0$ అయిన $\underset{x \to c}{\ell im}\ f(n) = \ell$, $\underset{x \to c}{\ell im}\ g(x) = \infty$ అయిన $\underset{x \to c}{\ell im}\ f(x) \cdot g(x) = \infty$ అని చూపండి. $\ell = 0$ అయిన ఈ ప్రతిపాదన నిజం కాదు అని చూపండి.

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell > 0$ కావున ఇచ్చిన $\in = \frac{\ell}{2} > 0$కు అనురూపంగా $\delta_1 > 0$, $x \in A$,

$0 < |x-c| < \delta_1$, $\frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటుంది. $\in > 0$ అయినప్పుడు

$\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ కావున $x \in A$, $0 < |x-c| < \delta_2$, $g(x) > \frac{z}{\ell} E$ అయ్యేటట్లు $\delta_2 >$ ఉంటుంది.

$\delta =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$, $x \in A$, $0 < |x-c| < \delta$ అనుకుంటే,

$f(x) > \frac{\ell}{2}$, $g(x) > \frac{2}{\ell} \in$ కావున $f(x)\cdot g(x) > \in$. ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి వర్తిస్తుంది.

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty, \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ కాని } \lim_{x\to\infty}\left(x, \frac{1}{x}\right) = 1$$

కావున $\ell = 0$కు ఈ ప్రతిపాదన నిజం కాదు.

(6) (i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} (f-g)(x) = 0$ అయ్యేటట్లు $(0, \infty)$ మీద f, gలను కనుక్కోండి.

(ii) ప్రతి $x \in (0, \infty)$కు $g(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0$ అయ్యేటట్లు f, gలను కనుక్కోండి.

సాధన: (i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $g(x) = f(x)$గా తీసుకుంటే $f - g = 0$ కావున

$$\lim_{x\to\infty} (f-g)(x) = 0.$$

(ii) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ అనుకొనిన $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ మరియు

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f}{g}(x)\right) = 0.$$

14.7.10 సిద్ధాంతం : $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, c బిందువు A కి అవధి బిందువు. $x \in A$, $x \neq c$ అయితే $f(x) \le g(x)$ అయితే

(a) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$

(b) $\lim\limits_{x \to c} g(x) = -\infty$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$

ఉపపత్తి: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ అనుకుందాం. $x \in A, 0 < |x-c| < \delta$ అయిన $f(x) > \alpha$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$g(x) \ge f(x)$ కావున $x \in A, 0 < |x-c| < \delta$ అయిన $g(x) > \alpha \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to c} g(x) = -\infty$ అనుకుందాం. $\beta \in \mathbb{R}$ అనుకోండి. $x \in A, 0 < |x-0| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $g(x) < \beta$ అయ్యేటట్లుగా, β కి అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$f(x) \le g(x)$ కావున $x \in A, 0 < |x - 0| < \delta$ అయినప్పుడు $f(x) < \beta$.

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$

14.7.11 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $(a, \infty) \le A$

ప్రతి x A లోని $g(x) > 0$ మరియు $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ అయితే

(i) $L > 0$ అయినప్పుడు $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$

(ii) $L < 0$ అయినప్పుడు $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty$

ఉపపత్తి: $L > 0$ అనుకుందాం.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ కావున $x > a_1$ అయినప్పుడు

$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}L$ అయ్యేటట్లు $a_1 > a$ ఉంటుంది.

$g(x) > 0, x > a$ కావున $\frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}L\,g(x) \quad \cdots \quad (1)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ కావున $\in > 0$ అయితే $x > \delta$ అయినప్పుడు $f(x) > \frac{3L}{2}\in$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$x >$ గరిష్ఠం $\{\delta, a_1\}$ అయిన $g(x) > \frac{2}{3L}f(x) > \in \Rightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

విపర్యయంగా $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ అనుకుందాం. $\in > 0$ అయితే $x > \delta^1$ అయినప్పుడు $g(x) > \frac{2}{L}\in$ అయ్యేటట్లు $\in$కి అనురూపంగా $\delta^1 > 0$ ఉంటుంది.

$x >$ గరిష్ఠం $\{\delta^1, a^1\}$ అయిన $f(x) > \frac{L}{2}\ \frac{2}{L}\in = \in$ కావున $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

(ii) $L < 0$ అయిన $-L > 0$. f కు బదులుగా $-f$ తీసుకొని (i)ని ఉపయోగిస్తే (ii) వస్తుంది.

14.8 S.A.Q. ల సాధనలు:

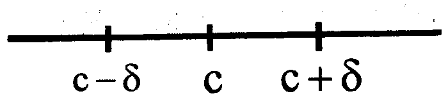
14.4.6 (i) $c < 0$ అయిన $-c > 0$, $x \in \left(\frac{3c}{2}, \frac{c}{2}\right) \Rightarrow x < 0$

కావున $V_{-\frac{c}{2}}(c) = \left(\frac{3c}{2}, \frac{c}{2}\right) \cap A - \{c\} = \phi$

$\Rightarrow x < \frac{c}{2} < 0$ అయిన $x \in A = A - \{c\}$.

$\therefore$ c అనేది A కి అవధి బిందువు కాదు.

(ii) $c > 1$ అయిన $(c-\delta, c+\delta)$ అంతరంలో 1 లేకుండా $\delta > 0$ను ఎన్నుకుందాం. అప్పుడు $(c-\delta, c+\delta)$లో A లో ఉండే ఏ బిందువూ ఉండదు. కావున c బిందువు A కి అవధి బిందువు కాదు.

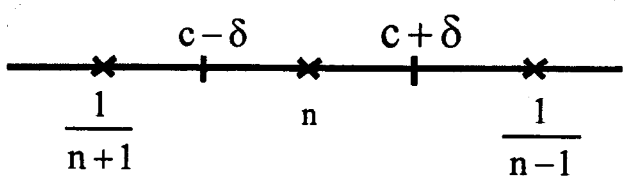


(iii) $0 < c < 1$ అయిన ఆర్కిమెడియన్ సూత్రం ప్రకారం $n < \frac{1}{c} < n+1$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{N}$లో n ఉంటుంది.

$\frac{1}{n+1} < c < \frac{1}{n}$ కావున $V_\delta(c) \cap \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) = \phi$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఎన్నుకుందాం.

$V_\delta(c) \cap A$ లో Aలోని ఏ బిందువులు ఉండవు. కావున c బిందువు Aకి అవధి బిందువు కాదు.

(iv) $n > 1$, $c = \frac{1}{n}$ అయిన $(c - \delta, c + \delta) \cap \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ను తీసుకోవచ్చును.



$\left(c = \frac{1}{n}\right)$

$V_\delta(c) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ కావున $V_\delta(c) \cap A - \{c\} = \phi$

$n \in \mathbb{N}, n > 1$ అయిన $\frac{1}{n}$ బిందువు Aకి అవధి బిందువు కాదు.

(v) $c = 1$ అయిన 1 యొక్క $\frac{1}{4}$ – సామీప్యం $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ మరియు $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \cap A - \{1\} = \phi$.

$\therefore A$ కి 1 అవధి బిందువు కాదు. అందుచేత, $c \neq 0$ అయినప్పుడు Aకి c అవధి బిందువు కాదు.

14.4.8 (a) c బిందువు A, Bలకు అవధి బిందువు కాదు అనుకుందాం.

$V_{\delta_1} \cap A - \{c\} = \phi$, $V_{\delta_2} \cap B - \{c\} = \phi$ అయ్యేటట్లు $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ఉంటాయి.

$0 < \delta <$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అయిన $V_\delta(c) \subseteq V_{\delta_1}(c)$ మరియు $V_\delta(c) \subseteq V_{\delta_2}(c)$.

$\therefore V_\delta(c) \cap A - \{c\} = \phi$ మరియు $V_\delta(c) \cap B - \{c\} = \phi$

$\Rightarrow V_\delta(c) \cap (A \cup B - \{c\}) = (V_\delta(c) \cap A - \{c\}) \cup (V_\delta(c) \cap B - \{c\}) = \phi$

కావున c బిందువు $A \cup B$కి అవధి బిందువు కాదు.

(b) $c \in (a, b)$, c బిందువు A కి c అవధి బిందువు అయిన $a < c-\delta < c < c+\delta < b$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ కనుక్కోండి.

$0 < \delta <$ కనిష్ఠం $\{c - a, b - c\}$ అయినప్పుడు δ పై నియమం పాటిస్తుంది.

నిర్వచనం ప్రకారం, $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap A - \{c\} \subseteq (a, b) \cap A - \{c\}$

ప్రతి $\delta > 0$కి $(c-\delta, c+\delta) \cap A \{c\} \neq \phi$ కావున విపర్యయం నిజం.

(c) F ఒక పరిమిత సమితి $F \neq \phi$ అనుకుందాం.

$c \notin F$ అయిన **14.4.2(2)** ప్రకారం $V_\delta(c) \cap F = \phi$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$c \in F$ అయిన $V_\delta(c) \cap F = \{c\}$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\therefore$ c, F కి అవధి బిందువు కాదు.

14.4.14 (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x+c)$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c} g(x) = \ell$

సాధన: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell,\ \in > 0$ అనుకోండి. $\in > 0$ అయితే $\in$కి అనురూపంగా $\delta > 0$

$0 < |x-c| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటుంది.

$0 < |y| < \delta,\ x = y + c$ అయిన $0 < |y| = |x - c| < \delta$

$\Rightarrow |g(y) - \ell| = |f(y+c) - \ell| = |f(x) - \ell| < \in$

$\therefore\ 0 < |y| < \delta \Rightarrow |g(y) - \ell| < \in$

$\Rightarrow \lim\limits_{y \to 0} g(y) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ell$

ఇదే విధంగా విపర్యం నిరూపించవచ్చును.

14.4.14 (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయానికి '0' వద్ద అవధి ℓ, $a > 0$, $g(x) = f(a\,x)$ అయ్యేటట్లు $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ను నిర్వచిస్తే $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ell$ అని చూపండి.

సాధన: $0 < |x| < \delta_1$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన $\epsilon > 0$ ను అనురూపంగా $\delta_1 > 0$ ఉంటుంది.

$0 < |x| < \dfrac{\delta}{a}$ అయిన $0 < |a\,x| < \delta$ కావున $|f(a\,x) - \ell| < \epsilon \Rightarrow |g(x) - \ell| < \epsilon$

$\therefore\ 0 < |x| < \dfrac{\delta}{a}$ అయిన $|g(x) - \ell| < \epsilon$ కావున $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ell$

14.4.14 (c) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ 1 & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య}) \end{cases}$

(i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, (ii) $c \neq 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

సాధన: (i) $x \in \mathbb{R}$ అయిన $|f(x)|$ విలువ 0 లేక $|x|$

$0 < |x| < \epsilon$ అయిన $|f(x) - 0| = |f(x)| \le |x| < \epsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

(ii) $c \neq 0$ అనుకుందాం. $\mathbb{R}$ లో Q మరియు $\mathbb{R}, Q$ ల సాంద్రత బట్టి $\mathbb{N}$ లో ప్రతి n కి అకరణీయ సంఖ్య x_n, కరణీయ సంఖ్య y_n లు.

$c < x_n < c + \dfrac{1}{n}$, $c < y_n < c + \dfrac{1}{n}$ అయ్యేటట్లు ఉంటాయి.

$\Rightarrow \lim x_n = \lim y_n = c$

కాని $f(x_n) = x_n$, $f(y_n) = 0$ కావున

$\lim f(x_n) = \lim(x_n) = c$ మరియు $\lim f(y_n) = 0$

$\therefore c \neq 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

14.4.14 (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ లో వివృతాంతరం I. $f_1 : I \to \mathbb{R}$, f కుదింపు ప్రమేయం, $c \in I$ అయిన 'c' వద్ద f_1 కు అవధి ఉంటే c వద్ద f కు అవధి ఉంటుంది అని చూపండి. ఈ అవధులు వ్యవస్థితమైతే $\lim\limits_{x \to c} f_1(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x)$ అని చూపండి.

సాధన: I వివృతాంతరం, $c \in I$ కావున $(c - \delta_0, c + \delta_0) \subseteq I$ అయ్యేటట్లు $\delta_0 > 0$ కనుగొనవచ్చును.

$\lim\limits_{x \to c} f_1(x) = \ell$ అనుకుందాం. $\in > 0$ అయితే $x \in I, 0 < |x - c| < \delta_1$ అయినప్పుడల్లా $|f_1(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు $\in$కు అనురూపంగా $\delta_1 > 0$ ఉంటుంది.

$\delta(\in) =$ కనిష్ఠం $\{\delta_0, \delta_1\}$ కనుగొనిన

$(c - \delta(\in), c + \delta(\in)) \subseteq (c - \delta_0, c + \delta_0) \subseteq I$ మరియు

$(c - \delta(\in), c + \delta(\in)) \subseteq (c - \delta_1, c + \delta_1)$

$0 < |x - c| < \delta(\in), x \in I$ అయిన $f_1(x) = f(x)$; కాబట్టి $x \in I$, $0 < |x - c| < \delta_1$ అయిన $|f(x) - \ell| = |f_1(x) - \ell| < \in$

$\therefore$ $0 < |x - c| < \delta(\in)$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లుగా ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$ ఉంటుంది. కావున $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$

విపర్యయంగా $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అనుకుందాం. $\in > 0$ అయితే $0 < |x - c| < \delta_1$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు $\in$కి అనురూపంగా $\delta_1 > 0$ ఉంటుంది. $\delta_0 > 0$ పై రీతిగా ఎన్నుకుందాం.

$\delta(\in) =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_0\}$ అనుకుందాం.

$0 < |x - c| < \delta(\in)$ అయిన $x \in I, 0 < |x - c| < \delta_1$ కావున $|f_1(x) - \ell| = |f(x) - \ell| < \in$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to c} f_1(x) = \ell$

14.5.4 $\epsilon > 0$ అనుకుందాం.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ కావున $x \in A,\ 0 < |x - c| < \delta_1$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \epsilon/2$ అయ్యేటట్లు $\epsilon > 0$ కి అనురూపంగా $\delta_1 > 0$ ఉంటుంది.

$0 < |x - c| < \delta_2$ అయినప్పుడల్లా $|g(x) - m| < \epsilon/2$ అయ్యేటట్లు $\epsilon > 0$ కి అనురూపంగా $\delta_2 > 0$ ఉంటుంది.

$\delta(\epsilon) =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ గా తీసుకుంటే $0 < |x - c| < \delta(\epsilon)$ అయినప్పుడు

$|f(x) - \ell| < \epsilon/2,\ \ |g(x) - m| < \epsilon/2$ కాబట్టి

$$|(f+g)(x) - (\ell + m)| = |f(x) - \ell + g(x) - m| \le |f(x) - \ell| + |g(x) - m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} (f+g)(x) = \ell + m = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

ఇదే విధంగా $\lim\limits_{x \to c} (f - g)(x) = \ell - m$ అని చూపవచ్చును.

14.5.8 $f(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x},\ g(x) = x + x^2$ అయిన $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

$x > 0$ అయిన $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(1+2x) - (1+3x)}{(x+x^2)\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x}\right)}$

$$= \frac{-1}{(1+x)\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{(1+x)\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+3x}\right)}$$

$$= \frac{-1}{(1+0)(1+1)} = -\frac{1}{2}$$

14.5.9 (a) $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\ 1 \le k \le n$ అయిన $\lim\limits_{x \to c} x^k = c^k$ కాబట్టి

$$\therefore \lim_{x \to c} p(x) = a_0 + a_1 \lim_{x \to c} x + \cdots + a_n \lim_{x \to c} x^n$$

$$= a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n = p(c)$$

(b) పై లెక్క ప్రకారం $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$, $\lim\limits_{x \to c} q(x) = q(c)$

$q(c) \neq 0$ కావున $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(c)}{q(c)}$

14.5.14 (i) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

(ii) $0 = f(0) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

(iii) $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ అయిన $f(n\,x) = n \cdot f(x)$ అని చూపుదాం.

$f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x)$

$f(2 \cdot x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2 \cdot f(x)$

$k \in \mathbb{N}, f(kx) = k \cdot f(x)$ అయిన

$f((k+1)\,x) = f(k\,x + x) = f(k\,x) + f(x)$

$= k \cdot f(x) + f(x) = (k+1)\,f(x)$

$\therefore$ గణితానుగమన సూత్రం ప్రకారం $f(n\,x) = n \cdot f(x)\ \forall\ n \in \mathbb{N}, x \in X$

n ఋణ పూర్ణాంకం అయిన $f(n\,x) = f(-(-nx)) = -f((-n)x) = -(-n)f(x)$

$= n f(x)$

14.5.15 ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య xకి $f(x) = xf(1)$

(i) (x_n) అనేది అకరణీయ సంఖ్యా అనుక్రమము $\lim x_n = 0$ అయిన

$L = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim f(x_n) = \lim (x_n \cdot f(1))$

$= f(1) \cdot \lim x_n = f(1) \cdot 0 = 0$

(ii) $c \in \mathbb{R}$ అయిన $f(x) = f(x-c) + f(c)$

$\Rightarrow |f(x) - f(c)| = |f(x-c)|$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ కావున $0 < |t| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(t)| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\epsilon > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\therefore 0 < |x - c| < \delta$ అయిన $|f(x) - f(c)| = |f(x-c)| < \epsilon$

$\Rightarrow$ ప్రతి c కి $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

(iii) x ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య అయితే $\lim x_n = x$, $x_n \neq x$ అయ్యేటట్లు అకరణీయ అనుక్రమం (x_n)ను ఎన్నుకుందాం.

$\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$, $\lim f(x_n) = f(x)$ కావున

$f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_n \ f(1) = f(1) \cdot \lim x_n$

$= f(1) \cdot x$

$\Rightarrow f(x) = x \cdot f(1)$

14.5.16 $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ కావున $x \in A, 0 < |x - 0| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - \ell| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\epsilon > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$0 < |x - c| < \delta$ అయిన $\big||f|(x) - |\ell|\big| = \big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell| < \epsilon$

$\therefore \lim |f|(x) = |\ell|$

14.5.17 f పరిబద్ధం కావున A లోని ప్రతి x కి $|f(x)| \leq M$ అయ్యేటట్లు $M > 0$ ఉంటుంది. $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ కాబట్టి $\epsilon > 0$ అయిన $x \in A, 0 < |x - c| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|g(x)| < \epsilon/M$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$x \in A, \ 0 < |x - \epsilon| < \delta$ అయిన $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M, |g(x)| < \epsilon/M$

$\therefore \left|(fg)(x) - 0\right| = \left|f(x)\cdot g(x)\right| = \left|f(x)/g(x)\right| < M\cdot \in/M = \in$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} (fg)(k) = 0$

14.6.3 f $(a, b) \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \ell \Leftrightarrow x \in (a, b),\ 0 < |x-a| < \delta$ అయినప్పుడల్లా

$|f(x) - \ell| < \in$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\in > 0$ అయితే $0 < \delta < b-a$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ తీసికోండి మరియు $a < x < a + \delta < b$, $|f(x) - \ell| < \in$ కాబట్టి $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \ell$.

14.6.6 A కి c అవధి బిందువు. $\Leftrightarrow A \cap (c, \infty)$ లేక $A \cap (-\infty, c)$కు c ఒక అవధి బిందువు: $A \cap (-\infty, c)$ మరియు $A \cap (c, \infty)$లకు 'c' అవధి బిందువు కాకపోతే

$V_{\delta_1} \cap A \cap (c, \infty) = \phi = V_{\delta_2} \cap A \cap (-\infty, c) = \phi$ అయ్యేటట్లు $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ఉంటాయి.

$\delta =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అనుకొనిన $V_\delta \cap A \cap (c, \infty) = \phi = V_\delta \cap A \cap (-\infty, c)$

$\therefore V_\delta \cap A - \{c\} = V_\delta \cap \{A \cap (c, \infty) \cup A \cap (-\infty, c)\} = \phi$

అందుచేత A కి c అవధి బిందువు కాదు.

విపర్యయంగా $A \cap (-\infty, c)$ మరియు $A \cap (c, \infty)$లలో ఏదో ఒక దానికి c అవధి బిందువు అనుకుందాం. $A \cap (-\infty, c) \subseteq A - \{c\}, A \cap (c, \infty) \subseteq A - \{c\}$ కావున c బిందువు A కి అవధి బిందువు.

14.9 సారాంశము:

ఈ పాఠంలో సమితికి అవధిబిందువు, వాస్తవ ప్రమేయానికి దాని ప్రదేశంలోని అవధి బిందువు వద్ద అవధిని నిర్వచించాం మరియు అవధి $\in$, δ ల నిర్వచనం, అనుక్రమాలనుపయోగించి నిర్వచించినాం. ఏకపక్ష అవధులను ∞ వద్ద అవధులను, అనంత అవధులను చర్చించడం జరిగినది.

14.10 సాంకేతిక పదాలు:

అవధి బిందువు

ప్రమేయానికి అవధి

ఏకపక్ష అవధి

14.11 అభ్యాసం:

1. x, కింది వాటిని పాటించేటట్లు $|x-1|$ మీద నియమాలను కనుక్కోండి.

(a) $|x^2-1|<\frac{1}{2}$ (b) $|x^2-1|<\frac{1}{10^{-3}}$

(c) $n \in \mathbb{N}$ అయిన $|x^2-1|<\frac{1}{n}$ (d) $n \in \mathbb{N}$ అయిన $|x^3-1|<\frac{1}{n}$

2. x, కింది వాటిని తృప్తిపరిచేటట్లు $|x-4|$ మీద నియమాన్ని కనుక్కోండి.

(a) $|\sqrt{x}-2|<\frac{1}{2}$ (b) $|\sqrt{n}-2|<10^{-2}$

3. A యొక్క అవధి బిందువు 'c' అయిన $A-\{c\}$ యొక్క అవధి బిందువు 'c' అని చూపండి.

4. $\ell im\,(a_n)=a$, $A=\{a_n/\ n\in\mathbb{N}\}$ అయిన A యొక్క ఒకే ఒక అవధి బిందువు 'a' అని చూపండి.

5. $A\subset B$, A యొక్క ఒక అవధి బిందువు c అయిన B యొక్క ఒక అవధి బిందువు 'c' అని చూపండి.

6. $\left\{\pm 1+\frac{1}{n}\Big/ n\in\mathbb{N}\right\}$ సమితికి అవధి బిందువులను కనుక్కోండి.

7. c, A కు అవధి బిందువు అయిన $A\cap\{x/x<c\}$ లేక $A\cap\{x/x>c\}$ అవధి బిందువు 'c' అని చూపండి.

8. c అనేది $A\subseteq\mathbb{R}$ కు ఒక అవధి బిందువు $f:A\to\mathbb{R}$ అయిన

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c}|f(x)-\ell|=0$ అని చూపండి.

9. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ అయిన $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x-c)=L$ అని చూపండి.

10. కింది వాటి అవధులను కనుక్కోండి.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(x+2)\quad (x\in\mathbb{R})$

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2}{x-2}\quad (x>0)$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2x} \right)$ $(x > 0)$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2+2}$ $(x \in \mathbb{R})$

11. కింది వాటిని నిరూపించండి.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}} = \sqrt{7/5}$ (b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{n}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$ (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^2 - 1}{x} = 2$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \sin \left(\dfrac{1}{x^2} \right)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

($x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n \pi}}$, $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{(4x+1)\, \pi/2}}$ గా తీసుకోండి)

13. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2} \right) = 0$ అని చూపండి. $(|\sin t| \leq 1)$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} \left(\sin \dfrac{1}{n} \right)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

(సూచన: $x_n = \dfrac{1}{2n \pi}$, $y_n = \dfrac{1}{(2n+1) \pi}$)

15. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{n} \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2} \right) = 0$ అని చూపండి. $(x > 0)$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

(సూచన: $x_n = \dfrac{1}{2n \pi}$, $y_n = \dfrac{1}{(2n+1) \pi}$)

17. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ అని చూపండి.

18. $x \geq 0$ అయిన $f(x) = f(-x)$ అయిన $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \ell$ అని చూపండి.

19. $x \geq 0$ అయిన $f(x) = -f(-x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell$ అయిన $\ell = 0$ అని చూపండి.

20. $\lim\limits_{x \to 1+} [2x]$, $\lim\limits_{x \to 1-} [2n]$ విలువలను కనుక్కోండి.

14.12 నమూనా ప్రశ్నలు:

1. $\left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$ యొక్క అవధి బిందువులు కనుక్కోండి.

2. c అనేది $A \cup B$కు అవధి బిందువు అయిన A లేక B యొక్క అవధి బిందువు c అని చూపండి.

3. ప్రమేయాలకు స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ విలువ ఎంత?

5. $\lim\limits_{x \to 1+} [2x]$, $\lim\limits_{x \to 1-} [2x]$లను కనుక్కోండి.

6. $x \geq 0, x \in \mathbb{R}$ అయిన $f(x) = f(-x)$ అయితే

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \ell$ అని చూపండి.

జవాబులు:

1. a, b, c లలో కుడి వైపు సంఖ్య $\propto$ అనుకుంటే $|x - 1| < \propto$

2. (a) $|x-4| < 1$ (b) $|x-4| < \cdot 001$

6. $\{-1, 1\}$

10. (a) 2 (b) -3 (c) $\frac{1}{12}$ (d) $\frac{1}{2}$

20. 2, 1

14.13 మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య - సాధన:

సమస్య: $x \neq 0$ అయితే $f(x) = \sqrt{|x|}\ \text{sgn}\ x\ \sin\frac{1}{x}$, $f(0) = 0$ ప్రమేయానికి 0 వద్ద అవధి వ్యవస్థితమవునో కాదో చర్చింపుము.

నిర్వచనాలు:

(1) sgn ప్రమేయం $x > 0$ అయితే $\text{sgn}\ x = +1$, $x = 0$ అయితే $\text{sgn}\ x = 0$, $x < 0$ అయితే $\text{sgn}\ x = -1$గా నిర్వచింపబడినది.

(2) $\in \subseteq \mathbb{R}$, $\in$కి c అవధి బిందువు $f : \in \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ అనుకొనుము. $\mathbb{R}$లో ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$, $0 < |x-c| < \delta(\in)$ అయితే $|f(x) - \ell| < \in$ అగునట్లుగా వ్యవస్థితమైతే $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$ అని వ్రాసి, 0 వద్ద f అవధి ℓ అంటాము.

సాధన: f ప్రదేశం $\mathbb{R}$కి అవధి బిందువని స్పష్టము. $x \neq 0$ అయినప్పుడు

$$|f(x)| = \left|\sqrt{|x|}\ \text{sgn}\ x \sin\frac{1}{x}\right| = \sqrt{|x|}\cdot|\text{sgn}\ x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq \sqrt{|x|}\cdot 1\cdot 1$$

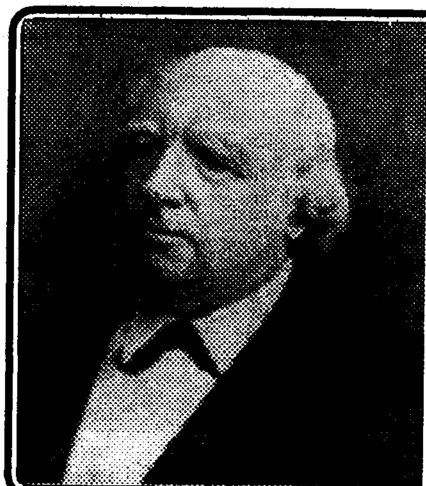
(కారణం - $x = 0$ అయితే $|\text{sgn}\ x| = 0$, యితరత్రా $|\text{sgn}\ x| = 1$ మరియు $x \neq 0$ అయితే $\left|\sin\frac{1}{x}1\right| \leq 1$).

$|f(0)| = |0| = 0$ కావున ప్రతి x కి $|f(x)| \leq \sqrt{|x|}$

$\in > 0$, $0 < |x| < \in^2$ అయితే $0 < \sqrt{|x|} < \in$ కాబట్టి $|f(x)| \leq \sqrt{|x|} < \in$ అందుచేత $0 < |x| < \in^2$ అయితే $|f(x) - 0| = |f(x)| < \in$ కావున $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ వ్యవస్థితం మరియు $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

పాఠ్యభాగ రచయిత

కస్తూరి సాంబశివరావు



కార్ల్ వీయర్‌స్ట్రాస్ (1815 - 1897):

వీయర్‌స్ట్రాస్ ఘాత శ్రేణిల ద్వారా సంకీర్ణ ప్రమేయవాద నిర్మాతగా ఘనత వహించారు.

పాఠము - 15

అవిచ్ఛిన్నప్రమేయాలు

15.1 లక్ష్యము:

విద్యార్థికి అవిచ్ఛిన్నతను గూర్చి అవగాహన కలిగించుట. ప్రత్యేకంగా పరిబద్ధ సంవృతాంతరంల మీద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాల వ్యాప్తి ధర్మాలను పరిశీలించడం ముఖ్య ఉద్దేశం.

15.2 అంశాలక్రమము:

15.3 ఉపోద్ఘాతము:

వక్రాన్ని ఏ విధమైన అడ్డంకులు లేకుండా నిరాటంకంగా సాగిపోయే రేఖగా వర్ణించడం సామాన్యం. ఈ పాఠంలో గణిత విశ్లేషణలో ముఖ్యమైన అవిచ్ఛిన్నతని పై వివరణ స్ఫూర్తితో పరిచయం చేస్తాము.

ప్రదేశంలోని ఒక బిందువు వద్ద ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నతతో మొదలుపెట్టి ఒక సమతలం మీద అవిచ్ఛిన్నతను నిర్వచించి తరువాత అవిచ్ఛిన్న, విచ్ఛిన్న ప్రమేయాల నియమాలు వివరిస్తాము. బీజీయ ధర్మాలు, క్రమ ధర్మాల గురించి పలు సిద్ధాంతాలు నిరూపించగలము. పరిబద్ధ సంవృతాంతరాల మీద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాల పరిబద్ధత, కనిష్ట - గరిష్ట సిద్ధాంతాలు, మధ్యాంతర మూల్య సిద్ధాంతం మొదలైన వాటితో సహా పలు అంశాలు వివరిస్తాము.

ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నతా భావాన్ని ప్రవేశపెట్టి పరిబద్ధ సంవృతాంతరం మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నత, అవిచ్ఛిన్నతలు ఒకటేనని చూపిస్తాము.

సర్ ఇజాక్ న్యూటన్ వస్తువుల గమనం వివరించుటకు అవిచ్ఛిన్నత వుపయోగించినప్పటికీ, గణిత విశ్లేషణలో ఈ భావం ప్రాముఖ్యత గుర్తించిన వారు బొల్జానో మరియు కోషీలనీ, క్షుణ్ణంగా పరిశీలించి పరిశోధించిన ఘనత కార్ల్ వైర్‌స్ట్రాస్‌కి దక్కుతుందని మనస్సులో పెట్టుకోవడానికిది తగిన సమయం.

15.4 అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు:

15.4.1 నిర్వచనం:- $A \subseteq \mathbb{R}, c \in A$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం. ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0, x \in A$ మరియు $|x - c| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - f(c)| < \in$ అయ్యేటట్లు వుంటే c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అంటాము. ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటే c వద్ద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం కాకపోతే c వద్ద f విచ్ఛిన్న ప్రమేయము అంటాము. A లోని ప్రతి c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నమైతే A మీద f అవిచ్ఛిన్నమంటాం.

ఉదాహరణ (1):- $f(x) = K$ అను స్థిర ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము.

కారణం:- $\in > 0$, $\delta = \in$ గా తీసుకుందాం. $x, c \in \mathbb{R}, |x - c| < \delta$ అయినప్పుడు

$$|f(x) - f(c)| = |K - K| = 0 \text{ if } \ 0 < |x - c| < \delta = \in \text{ కాబట్టి}$$

c వద్ద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం. ఇది $\mathbb{R}$ లోని ప్రతి c కి వర్తిస్తుంది. కావున $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

ఉదాహరణ (2):- f యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు $f(x) = x$ అయితే f ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

కారణం:- $\in > 0$, అయినప్పుడు $\delta = \in$ గా తీసుకుంటే $x, c \in \mathbb{R}, |x - c| < \in$ అయినప్పుడు $|f(x) - f(c)| = |x - c| < \delta = \in$ కాబట్టి c వద్ద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం. $\mathbb{R}$ లో c యాదృచ్ఛికం. కావున f, $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

15.4.2 గమనిక:- $f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం. c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం, c వద్ద f యొక్క అవధి వ్యవస్థితమగుటల మధ్య పోలికలు:

(1)	c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నమైతే, c తప్పనిసరిగా A లో వుండవలెను.	(1)	$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$ వ్యవస్థితం కావటానికి A లో (1) c వుండనవసరం లేదు, కాని A కి అవధి బిందువు కావలెను.
(2)	$\lvert x-c \rvert < \delta$ అయినప్పుడల్లా $\lvert f(x)-f(c) \rvert < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా ఒక $\delta > 0$ ఉంటుంది.	(2)	$0 < \lvert x-c \rvert < \delta, x \in A$ అయినప్పుడల్లా $\lvert f(x)-\ell \rvert < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది. కాని ℓ, $f(c)$ లు సమానం కానక్కరలేదు.
(3)	$c \in A$, కాని c అవధి బిందువు కాకపోతే f తప్పనిసరిగా c వద్ద అవిచ్ఛిన్నమవుతుంది.	(3)	$c \in A$, కాని c అవధి బిందువు కాకపోతే $\lim f(x)$ ఉనికి ప్రస్తావనకే అవకాశం లేదు.

$c \in A$, 'c' అవధి బిందువు అయితే కింది సిద్ధాంతం నిరూపించవచ్చును.

15.4.3 సిద్ధాంతం:- A యొక్క అవధి బిందువు c, $c \in A$. c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ వ్యవస్థితమై, ఆ అవధి $f(c)$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి:- c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నతకి తుల్యం $x \in A, \lvert x-c \rvert < \delta$ అయినప్పుడల్లా $\lvert f(x)-f(c) \rvert < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా ఒక $\delta > 0$ ఉండడం దీనికి తుల్యం.

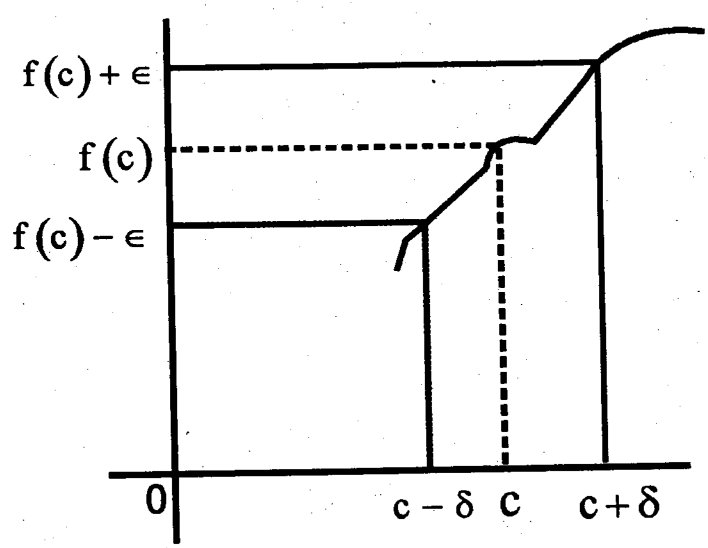
$x \in A$, $0 < \lvert x-c \rvert < \delta$, ($x = c$ అయితే $f(x) = f(c)$) అయినప్పుడల్లా $\lvert f(x)-f(c) \rvert < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉండడం దీనికి తుల్యం.

$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ వ్యవస్థితమవుతుంది మరియు $f(c)$కు సమానం.

కింది సిద్ధాంతంలో ఏదైనా బిందువు వద్ద ఒక ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నతను ఆ బిందువు సామీప్యంలో ప్రమేయం పాటించే నియమావళి ద్వారా వివరిద్దాం.

15.4.4 సిద్ధాంతం:- $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in A$ అనుకొందాం. c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నతకి తుల్యం. ప్రతి $x \in A \cap V_\delta(c)$ కు $f(x) \in V_\epsilon(f(c))$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\epsilon > 0$ కు $\delta > 0$ ఉండడం.

ఉపపత్తి:- c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం $\Leftrightarrow x \in A \cap V_\delta(c)$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\epsilon > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.



$|f(x) - f(c)| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in V_\epsilon(f(c))$ కాబట్టి c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నతకి తుల్యం. ప్రతి $x \in V_\delta(c) \cap A$ కి $f(x) \in V_\epsilon f(c)$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\epsilon > 0$ కు అనురూపంగా ఒక $\delta > 0$ ఉండడం.

15.4.5 సిద్ధాంతం:- $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $c \in A$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అయిన $x, y \in A \cap V_\delta(c)$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\epsilon > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

ఉపపత్తి:- c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అయితే

ఇచ్చిన $f(c)$ యొక్క $\frac{\epsilon}{2}$ – సామీప్యం $V_{\epsilon/2}\, f((c))$ అయిన $x \in A \cap V_\delta(c)$ అయ్యేటట్లు c యొక్క δ – సామీప్యం $V_\delta(c)$ ఉంటుంది. కాబట్టి $A \cap V_\delta(c)$ లోని ప్రతి x కి $|f(x) - f(c)| < \epsilon/2$.

$x, y \in A \cap V_\delta(c)$ అనుకుందాం. $|f(x)-f(c)| < \epsilon/2$, $|f(y)-f(c)| < \epsilon/2$ కాబట్టి

$$|f(x)-f(y)| = |f(x)-f(c)+f(c)-f(y)|$$

$$\le |f(x)-f(c)|+|f(c)-f(y)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

కాబట్టి $x, y \in A \cap V_\delta(c)$ లకు $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.

15.4.6 సిద్ధాంతం:- అనుక్రమాల ద్వారా ప్రమేయ అవిచ్ఛిన్నతకి సూత్రం: $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $c \in A$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కావడాన్కి, A లో ఒక అనుక్రమం (x_n), c కి అభిసరిస్తూ $(f(x_n))$ అనుక్రమం $f(c)$కి అభిసరణం చెందడం ఆవశ్యక పర్యాప్తం.

ఉపపత్తి:- c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం మరియు A లోని (x_n) అనుక్రమం c కి అభిసరణ చెందుతుంది అనుకుందాం. c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం $\Rightarrow |x-c| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x)-f(c)| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు, ఇచ్చిన ప్రతి $\epsilon > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

A లోని (x_n) అనుక్రమం c కి అభిసరణ చెందితే $n > m$ అయినప్పుడల్లా $|x_n - c| < \delta$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\delta > 0$ కు అనురూపంగా ఒక ధన పూర్ణాంకం m ఉంటుంది.

$\therefore n > m$, $|x_n - c| < \delta$ అయిన $|f(x_n)-f(c)| < \epsilon$ అందుచేత $\lim f(x_n) = f(c)$

అనగా $(f(x_n))$ అనుక్రమం $f(c)$ కి అభిసరణ చెందుతుంది.

విపర్యయంగా A లోని ఒక అనుక్రమం (x_n), c కి అభిసరణ చెందినప్పుడు $(f(x_n))$ అనుక్రమం $f(c)$కి అభిసరణ చెందుతుంది అనుకుందాం.

c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాకపోతే ఒక ధనసంఖ్య ϵ_0 కు ప్రతి $\delta > 0$ కి అనురూపంగా A లో ఒక x, $|x-c| < \delta$ మరియు $|f(x)-f(c)| \ge \epsilon_0$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటుంది.

$n \in N$, $\delta = \dfrac{1}{n}$ అనుకుంటే, $x_n \in A$ మరియు $|x_n - c| < \dfrac{1}{n}$ కాని $|f(x_n)-f(c)| \ge \epsilon_0$

A లోని (x_n) అనుక్రమం c కు అభిసరణం చెందుతుంది. కాని $(f(x_n))$ అనుక్రమం $f(c)$కి అభిసరణ చెందదు. కావున ఇది దత్తాంశానికి విరుద్ధం. అందుచేత c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

15.4.7 ఉప సిద్ధాంతం:- (విచ్ఛిన్నతకు నియమం) A లోని c వద్ద $f : A \to \mathbb{R}$ విచ్ఛిన్నం $\Leftrightarrow \ell im\,(x_n) = c$, $\ell im\, f(x_n) \neq f(c)$ అయ్యేటట్లు అనుక్రమం (x_n) A లో ఉంటుంది.

15.4.8 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:- $f : A \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం, $A \subseteq \mathbb{R}$, A యొక్క అవధి బిందువు c, $f : A \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell im_{x \to c} f(x) = \ell$ అయిన f ను $A \cup \{c\}$ మీదకు $x \in A$ అయినప్పుడు

$$F(x) = f(x),\ \ x = c \text{ అయితే } F(x) = \ell \text{ గా}$$

F ను నిర్వచించడం ద్వారా f ని $A \cup \{c\}$ మీద విస్తృతపరిస్తే అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయంగా విస్తృతపరచవచ్చని అనగా $F : A \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నము అని చూపుము.

15.4.9 గమనిక:- $f : A \to \mathbb{R}$, A మీద అవిచ్ఛిన్నం, A కి c అవధి బిందువు, $c \notin A$, $\ell im_{x \to c} f(x)$ వ్యవస్థితం కాదనుకోండి. F, $A \cup \{c\}$ మీద f విస్తృతి అయితే A లోని ప్రతి x కి $F(x) = f(x)$. అందుచేత $\ell im_{x \to c} F(x) = \ell im_{x \to c} f(x)$. కాని $\ell im_{x \to c} f(x)$ వ్యవస్థితం కానందున F కి c వద్ద అవధి వ్యవస్థితం కాదు. అందుచేత f ని $A \cup \{c\}$ మీదికి అవిచ్ఛిన్నంగా విస్తృతపరచడం అసాధ్యం.

15.4.10 ఉదాహరణ:- (a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $(0, \infty)$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

$x_n = \frac{1}{n\pi}$ అయిన, $\ell im\, x_n = 0$ కాని $\ell im\, f(x_n) = \ell im \sin n\pi = 0$.

$x_n = \frac{1}{(4n+1)\pi/2}$ అయిన, $\ell im\, x_n = 0$ కాని ప్రతి n కు $f(x_n) = 1$ కావున $\ell im\, f(x_n) = 1$

పై రెండు అనుక్రమాల నుండి $\ell im_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ వ్యవస్థితం కాదు.

కావున పై గమనిక ప్రకారం, $F(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ మరియు $F(0) = \ell$, $F/_1$ అవిచ్ఛిన్నం అయ్యేటట్లు ℓ ఉండదు.

(b) $f(x) = a(a \in \mathbb{R})$ అను స్థిర ప్రమేయం, $\mathbb{R}$ యొక్క ప్రతి ఉప సమితి మీద అవిచ్ఛిన్నం.

$\in > 0, \delta > 0$ అయిన $c \in A, x \in A$ మరియు $|x - c| < \delta$ అయినప్పుడు

$|f(x) - f(c)| = |a - a| = 0 < \in$. $\therefore$ A లోని ప్రతి c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

(c) $g(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

$c \in \mathbb{R}, \in > 0$ మరియు $\delta = \in$ అనుకుందాం.

$|x - c| < \delta$ అయిన $|g(x) - g(c)| = |x - c| < \delta = \in$

కాబట్టి $\mathbb{R}$ లోని ప్రతి c వద్ద ప్రమేయం g అవిచ్ఛిన్నం.

(d) $k \in \mathbb{N}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = x^k$ గా నిర్వచిస్తే $\mathbb{R}$ మీద g అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

$c \in \mathbb{R}$ అయిన $|g(x) - g(c)| \ |x^k - c^k| = \left|(x - c)\left(x^{k-1} + x^{k-2}c + \cdots\cdots + c^{k-1}\right)\right|$

$\leq |x - c| \left(|x|^{k-1} + |x|^{k-2}|c| + \cdots\cdots + |c|^{k-1}\right)$

$|x - c| < 1$ అయిన $(|x| - |c|) \leq |x - c| < 1 \Rightarrow |x| < 1 + |c|$

$\Rightarrow |x|^r < (1 + |c|)^r, 1 \leq r \leq k$

$|x|^{k-1} + |x|^{k-2}|c| + \cdots\cdots + |c|^{k-1}$

$\leq (1 + |c|)^{k-1} + (1 + |c|)^{k-2}|c| + \cdots\cdots + |c|^{k-1} = M$ అనుకుందాం. అప్పుడు

$|g(x) - g(c)| \leq |x - c| M$ అవుతుంది.

$\in > 0$ అయిన $|x - c| < \delta =$ కనిష్ఠం $\{1, \in/M\}$.

$\Rightarrow |g(x) - g(c)| < M|x - c| < \in$

$\Rightarrow$ c వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం.

$c \in \mathbb{R}$ కావున $\mathbb{R}$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం.

గమనిక:- దీనిని అనుక్రమాల పద్ధతి ద్వారా కూడా నిరూపించవచ్చును.

(e) $g:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ ను $g(x) = \frac{1}{x}$ గా నిర్వచింపుము.

$0 < c < \infty$ అయిన $\frac{c}{2} < x < \frac{3c}{2} \Rightarrow \frac{2}{3c} < \frac{1}{x} < \frac{2}{c}$

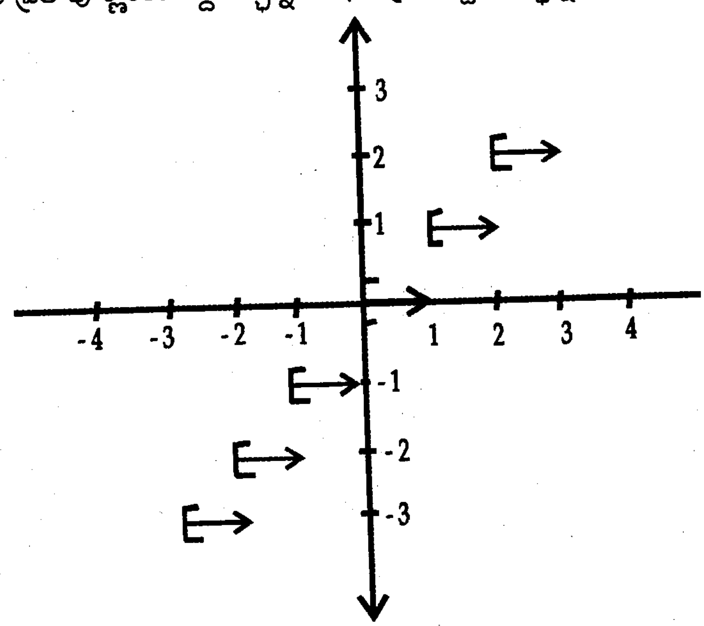
$$\left|g(x)-g(c)\right| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{c}\right| = \frac{|x-c|}{cx} < \frac{2|x-c|}{c^2}$$

$\in > 0, \frac{c}{2} < x < \frac{3c}{2}$ అయిన $\delta =$ కనిష్ఠం $\left\{\frac{c^2 \in}{2}, \frac{c}{2}\right\}$, $\delta > 0$ గా తీసుకుందాం.

$|x-c| < \delta$ అయిన $|x-c| < \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} < x < \frac{3c}{2}$

$\Rightarrow |x-c| < \frac{c^2 \in}{2} = \delta \Rightarrow \left|g(x)-g(c)\right| < \frac{2}{c^2}|x-c| < \in$, కావున c వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం.

(f) x వాస్తవ సంఖ్య అయితే, $[x]$; x ని మించని అతి పెద్ద పూర్ణాంకం $g(x) = [x]$ అని వ్రాయండి. ఈ ప్రమేయం ప్రతి పూర్ణాంకం వద్ద విచ్ఛిన్నం, ఇతరత్రా వద్ద అవిచ్ఛిన్నం.



n ఏదైన పూర్ణాంక సంఖ్య, $x_k = n - \frac{1}{k+1}$ అనుకుందాం.

ప్రతి k కి $x_k \neq n$. $\ell imit\ \frac{1}{k} = 0$ కాబట్టి $\ell im_k (x_k) = n$

$n-1 < x_k < n$

$g(x_k) = n-1 \Rightarrow \ell im\ g(x_k) = n-1$

ప్రతి n కి అనురూపంగా అనుక్రమం (x_k) కి $\ell im\ x_k = n$, కాని $\ell im\ g(x_k) \neq g(n)$.

$\Rightarrow$ x వద్ద g విచ్ఛిన్నం.

x పూర్ణాంక సంఖ్య కాకపోతే $n-1 < x < n$ అయ్యేటట్లు ఏకైక పూర్ణాంకం n ఉంటుంది.

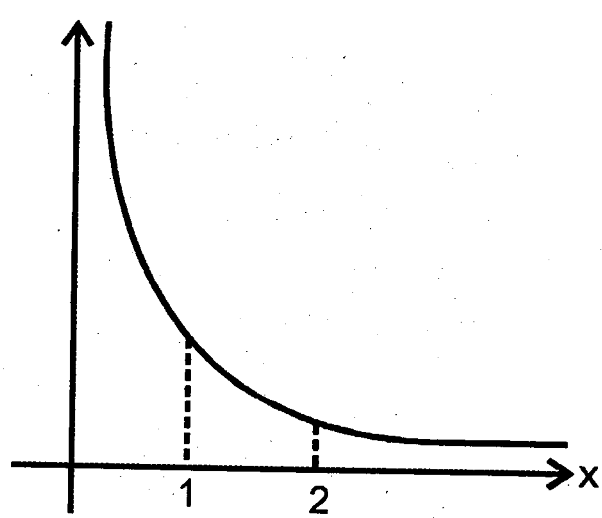
ఈ అంతరంలో y ఉంటే $g(y) = n-1$

$\Rightarrow g(y) - g(x) = 0$

$\in > 0$, δ ఏదైన ధన సంఖ్య మరియు $n-1 < x - \delta < x < x+\delta < n$, $y \in (x-\delta, x+\delta)$ అయిన $|g(y) - g(x)| = 0 < \in$.

కాబట్టి x పూర్ణ సంఖ్య కానప్పుడు g అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

(g) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ను $g(x) = \frac{1}{x}\ (x > o)$, $g(0) = k\ (k \in \mathbb{R})$ గా నిర్వచిస్తే '0' వద్ద g అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం కాదు.



$g(x) = 1/x\ (x > 0)$

$n \in \mathbb{N}$ అయిన $x_n = \dfrac{1}{n}$ అనుకుంటే,

$\ell im\,(x_n) = 0,\ \ell im\,(g(x_n)) = \ell im\,(n) = \infty$

$k < \infty$ కావున $\ell im\,(g(x_n)) \neq k$

$\ell im\,(x_n) = 0,\ \ell im\,(g(x_n)) \neq k$

కాబట్టి 0 వద్ద g అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం కాదు.

(h) డిరిక్లే(DIRICHLET) ప్రమేయం - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ అకరణీయ సంఖ్య అయితే} \\ 0, & x \text{ కరణీయ సంఖ్య అయితే} \end{cases}$$

ఈ ప్రమేయాన్ని 1829వ సం॥లో P.G.L. డిరిక్లే ప్రవేశ పెట్టినాడు. దీనిని Ruler ప్రమేయం అని కూడా అంటారు. ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య వద్ద f విచ్ఛిన్నం.

c ఏదైన సంఖ్య అయిన x_n లు అకరణీయ సంఖ్యలు, y_n లు కరణీయ సంఖ్యలు $c - \dfrac{1}{n} < x_n < c,\ c - \dfrac{1}{n} < y_n < c$ అయ్యేటట్లు $(x_n), (y_n)$ అనుక్రమాలను ఎన్నుకుందాం.

$0 < |x_n - c| < \dfrac{1}{n},\ 0 < |y_n - c| < \dfrac{1}{n}$ కాబట్టి

స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, $\ell im\,(x_n) = c = \ell im\,(y_n)$

ప్రతి n కు, $f(x_n) = 1, f(y_n) = 0$ కాబట్టి $\ell im\,(f(x_n)) = 1, \ell im\,(f(y_n)) = 0$

అందుచేత 14.4.7వ సిద్ధాంతం ప్రకారం, c వద్ద f విచ్ఛిన్నం.

(i) $\mathbb{R}$ మీద f అను ప్రమేయాన్ని $f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \end{cases}$

గా నిర్వచిస్తే '0' వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

x శూన్యేతర సంఖ్య అయితే $|f(x)| = \left|x \sin\frac{1}{n}\right| \le |x|$

$\in > 0, \delta = \in$ అయిన $0 \le |x| < \in = \delta, |f(x) - f(0)| \le \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \in$.

$\Rightarrow 0$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

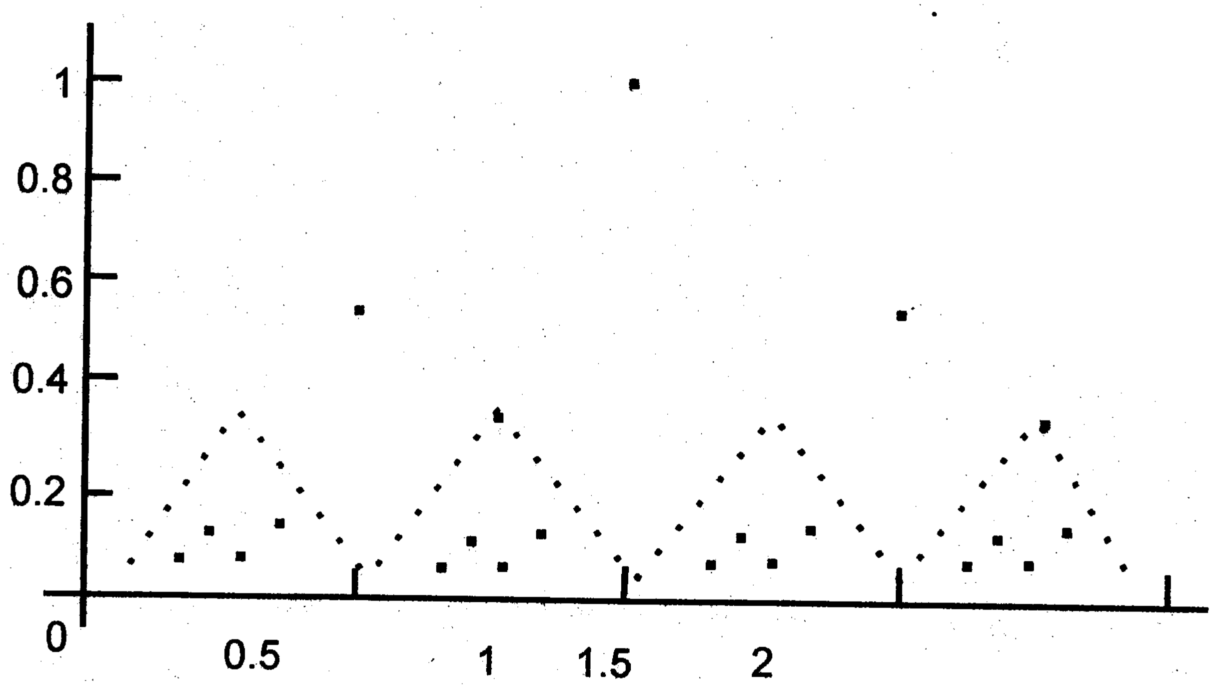
(j) Thomae ప్రమేయం - $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ప్రమేయాన్ని

x కరణీయ సంఖ్య అయినప్పుడు $h(x) = 0$ అని

x అకరణీయ సంఖ్య అయినప్పుడు

$x = \frac{p}{q}$, p, q లు సహజ సంఖ్యలు, $(p, q) = 1$ అయిన $h(x) = \frac{1}{q}$

గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం h, Thomae ప్రమేయం అంటాము.

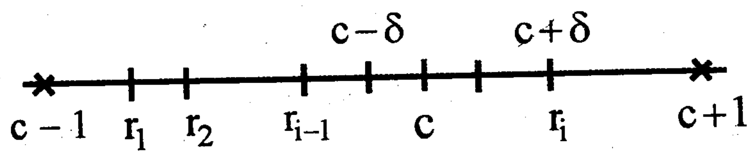


ప్రతి కరణీయ సంఖ్య వద్ద h అవిచ్ఛిన్నం, ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య వద్ద h విచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

సందర్భం 1 - c ఏదైన కరణీయ సంఖ్య, $\in > 0$ అనుకుందాం. $\frac{1}{q} > \in$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{N}$లో q ఉంటుంది. అటువంటి ప్రతి qకి $(c-1, c+1)$ల మధ్య పరిమితంగా అకరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయి.

$\Rightarrow (c-1, c+1)$ అంతరంలో పరిమిత సంఖ్యలో మాత్రమే అకరణీయ సంఖ్యలు $\frac{p}{q}$ రూపంలో $\frac{1}{q} > \in$ అయ్యేటట్లుగా వుంటాయి.

వాటిని ఆరోహణ క్రమంలో $r_1 < r_2 < \cdots\cdots < r_{i-1} < c < r_i \cdots\cdots r_n$ గా అమర్చి



$(c-\delta, c+\delta) \leq (r_{i-1}, r_i)$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ తీసుకుందాము. $(c-\delta, c+\delta)$ అంతరంలోని ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య $\frac{p}{q}$కు $\frac{1}{q} < \in$ మరియు $\left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f(c)\right| = \left|\frac{1}{q} - 0\right| = \frac{1}{q} < \in$

$(c-\delta, c+\delta)$ అంతరంలోని ప్రతి కరణీయ సంఖ్య xకు

$f(x) = f(c) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(c)| = 0 < \in$

$c-\delta < x < c+\delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - f(c)| < \in$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది. కాబట్టి c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

సందర్భం 2 - c ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య. $c = \frac{p}{q}$, p, qలు సహజ సంఖ్యలు, $(p, q) = +1$ అనుకోండి.

$0 < \in < \frac{1}{q}$ అయ్యేటట్లు $\in$ తీసుకుందాం. ప్రతి కరణీయ సంఖ్య xకి $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \delta, f(x) = 0$,

$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \Rightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|0 - \frac{1}{q}\right| = \frac{1}{q} > \in \Rightarrow c$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం కాదు.

(k) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని x అకరణీయ సంఖ్య అయితే $g(x) = 2x$, x కరణీయ సంఖ్య అయితే $g(x) = x + 3$ గా నిర్వచిస్తే 'g' అవిచ్ఛిన్నం అయ్యే x లను కనుక్కోండి.

c అకరణీయ సంఖ్య అనుకుందాం $\Rightarrow g(c) = 2c$.

$c - \frac{1}{n} < x_n < c$ అయ్యేటట్లు కరణీయ అనుక్రమం (x_n) ను ఎన్నుకుంటే

$$c - x_n < \frac{1}{n} \Rightarrow \ell im\,(c - x_n) = 0 \Rightarrow \ell im\,(x_n) = c$$

ప్రతి x_n కరణీయ సంఖ్య కావున $g(x_n) = x_n + 3$

$$\Rightarrow \ell im\,(g(x_n)) = \ell im\,(x_n + 3) = c + 3$$

$$\Rightarrow 2c = c + 3 \Rightarrow c = 3$$

అందుచేత c ఏదైన అకరణీయ సంఖ్య, c వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం అయితే $c = 3$.

c కరణీయ సంఖ్య అయితే, $\ell im\,(x_n) = c$ అయ్యేటట్లు అకరణీయ అనుక్రమం (x_n) ను ఎన్నుకుందాం. c వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం కావున $\ell im\,(g(x_n)) = g(c)$ కావలెను.

$$\Rightarrow \ell im\,(2x_n) = c + 3 \Rightarrow 2c = c + 3 \Rightarrow c = 3$$

c కరణీయ సంఖ్య అయినప్పుడు ఇది అసంభవం.

$\therefore$ 3 కాకుండా ఏ అకరణీయ సంఖ్య, కరణీయ సంఖ్య c వద్ద g అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం కాదు.

$c = 3$ అయిన $g(c) = 6$

$\Rightarrow |g(x) - g(3)| = |2x - 6| = 2|x - 3|$ (x అకరణీయ సంఖ్య అయినప్పుడు)

$|x + 3 - 6| = |x - 3|$ (x కరణీయ సంఖ్య అయినప్పుడు)

$$\Rightarrow |g(x) - g(c)| \le 2|x - 3|$$

$\delta = \epsilon/2$ అనుకుంటే $|x - 3| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|g(x) - g(c)| < \epsilon$

అందుచేత 3 వద్ద మాత్రం g అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

15.4.11 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు:-

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం, $f(c) > 0$ అయిన $x \in V_\delta(c)$ అయినప్పుడల్లా $f(x) > 0$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుందని చూపండి.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం, $Z(f) = \left\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\right\}$. $Z(f)$ లో (x_n) ఒక అనుక్రమం మరియు $\ell im\ (x_n) = x$ అయిన $x \in Z(f)$ అని చూపండి.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $k > 0$, ప్రతి x, y లకీ $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$ అయిన $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నమని చూపండి.

(d) $x \neq 2$ అయితే $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2}$. f అవిచ్ఛిన్నం అయితే x $f(2) = L$ అయ్యేటట్లు $L \in \mathbb{R}$ వ్యవస్థితమవుతుందా?

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం. ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య r కి $f(r) = r$ అయిన ప్రతి x కి $f(x) = x$ అని చూపండి.

(f) $c \notin A$, A యొక్క అవధి బిందువు c, $f : A \to \mathbb{R}$, $\ell im_{x \to c} f(x) = \ell$

$F : A \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $x \in A$ అయినప్పుడు $F(x) = f(x)$, $F(c) = \ell$ గా నిర్వచిస్తే c వద్ద F అవిచ్ఛిన్నమని చూపండి.

15.5 అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాల సంయోగాలు:

ప్రమేయాలు, అనుక్రమాల అవధిలలో మాదిరిగా అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాల సంయోగాలు వ్యత్యాసాలు లబ్దం వాస్తవ సంఖ్యతో ప్రమేయపు లబ్దంల అవిచ్ఛిన్నత పరిశీలిస్తాము.

15.5.1 సిద్ధాంతం: f, g లు రెండూ c వద్ద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు అయితే

(a) c వద్ద $f + g$ అవిచ్ఛిన్నం

(b) c వద్ద $f - g$ అవిచ్ఛిన్నం

(c) $b \in \mathbb{R}$ అయిన c వద్ద $b\,f$ అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: A కి c అవధి బిందువు కాకపోతే (a), (b), (c)లు స్పష్టము.

A కి c అవధి బిందువు అయితే $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c)$

14.4.5 ప్రకారం $\lim\limits_{x \to c} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

$= f(c) + g(c) = (f+g)(c)$ కాబట్టి c వద్ద f + g అవిచ్ఛిన్నం.

$\lim\limits_{x \to c} (f-g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = f(c) - g(c)$

$= (f-g)(c)$ కాబట్టి c వద్ద f − g అవిచ్ఛిన్నం.

$\lim\limits_{x \to c} (b\ f)(x) = \lim\limits_{x \to c} b \cdot f(x) = b \cdot \lim\limits_{x \to c} f(x) = b \cdot f(c)$

$= (b\ f)(c)$ కాబట్టి c వద్ద b f అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.2 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించి 15.5.1 సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించండి.

15.5.3 సిద్ధాంతం: f, g లు A మీద నిర్వచింపబడి f, g లు c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అయిన

(a) c వద్ద f g అవిచ్ఛిన్నం (b) A లోని ప్రతి x కి $g(x) \neq 0$ అయిన c వద్ద $\dfrac{f}{g}$ అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: A కి, c అవధి బిందువు కాకపోతే ఇది స్పష్టం.

A కి, c అవధి బిందువు అనుకుందాం.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c)$

$\lim\limits_{x \to c} (f\ g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = f(c) \cdot g(c) = (f\ g)(c)$

కాబట్టి c వద్ద f g అవిచ్ఛిన్నం.

A లోని ప్రతి x కి

$g(x) \neq 0$ అయిన $\ell im_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell im_{x \to c} f(x)}{\ell im_{x \to c} g(x)}$

$= \frac{f(c)}{g(c)} = \left(\frac{f}{g}\right)(c)$ కాబట్టి c వద్ద $\frac{f}{g}$ అవిచ్ఛిన్నం

15.5.4 ఉప సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in A$, $f_i : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం 'c' వద్ద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అయిన

(a) $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ ప్రమేయం c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం.

(b) $f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$ ప్రమేయం c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: గణితాను గమన సూత్రాన్ని ఉపయోగింపుము.

15.5.5 ఉప సిద్ధాంతం: (a) f ఒక బహుపది అయిన $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం.

(b) f, g బహుపదులు, $g(\alpha) = 0$ యొక్క మూలాలు $Z(g) = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ అయిన $\mathbb{R} - Z(g)$ మీద $\frac{f}{g}$ అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: (a) $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 0$ అనుకుందాం.

ప్రతి x ను $f_1(x) = x$ అయిన $f(x) = a_0 + a_1 f_1 + a_2 f_1^2 + \cdots + a_n f^n$

$\mathbb{R}$ మీద f_1 అవిచ్ఛిన్నం కావున $f_1, f_1^2, f_1^3, \cdots, f_1^n$ లు $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు.

15.5.1, 15.5.4 ప్రకారం $f = a_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f^n$ ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

(b) f, g ప్రమేయాలు $\mathbb{R} - Z(g) = \{x / g(x) \neq 0\}$ మీద అవిచ్ఛిన్నాలు. 15.5.3 ప్రకారం $\frac{f}{g}$ ప్రమేయం $\mathbb{R} - Z(g)$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.6 సైన్ ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం - కింది వాస్తవాలను ఉపయోగించుకుందాం:

$x, y, z \in \mathbb{R}$ అయిన (i) $|\sin z| \leq 1$ (ii) $|\cos z| \leq 1$

(iii) $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$c \in \mathbb{R}$ అయిన $|\sin x - \sin c| = \left|2\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\right|$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\right| \le 2\frac{|x-c|}{2} \cdot 1 = |x-c|$$

$\delta = \epsilon$ గా తీసుకుంటే $|x-c| < \delta$ అయినప్పుడు $|\sin x - \sin c| \le |x-c| < \delta = \epsilon$ కాబట్టి

c వద్ద $\sin x$ అవిచ్ఛిన్నం. $\mathbb{R}$ లో c యాదృచ్ఛికం. కావున $\mathbb{R}$ మీద సైన్ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.7 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం,

(a) A లోని c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన c వద్ద $|f|$ అవిచ్ఛిన్నం.

(b) A మీద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన A మీద $|f|$ అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: (a) c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $|x-c| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\epsilon > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$ కావున, $|x-c| < \delta$ అయితే $\big||f(x)| - |f(c)|\big| \le |f(x) - f(c)| < \epsilon$.

$\epsilon > 0$ యాదృచ్ఛికం కాబట్టి c వద్ద $|f|$ అవిచ్ఛిన్నం.

(b) A మీద f అవిచ్ఛిన్నం కావున A లోని ప్రతి c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

$\Rightarrow c \in A$ వద్ద $|f|$ అవిచ్ఛిన్నం $\Rightarrow A$ మీద $|f|$ అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.8 ఉప సిద్ధాంతం : $f, g : A \to \mathbb{R}$, $c \in A$, f, g c వద్ద అవిచ్ఛిన్నాలు. $H(x) =$ గరిష్ఠం $\{f(x), g(x)\}$ మరియు $h(x) =$ కనిష్ఠం $\{f(x), g(x)\} x \in A$ అయిన H, h c వద్ద అవిచ్ఛిన్నాలు.

ఉపపత్తి: a, b లు ఏవైన రెండు వాస్తవ సంఖ్యలు అయిన

గరిష్ఠం $\{a, b\} = \dfrac{(a+b) + |a-b|}{2}$, కనిష్ఠం $\{a, b\} = \dfrac{(a+b) - |a-b|}{2}$

$x \in A$ అయిన $H(x) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \dfrac{(f+g)+|f-g|}{2}(x)$

f, g c వద్ద అవిచ్ఛిన్నాలు కావున $f+g, f-g, |f-g|$

అందుచేత $\dfrac{(f+g)+|f-g|}{2}$ c వద్ద అవిచ్ఛిన్నాలు. కాబట్టి c వద్ద H అవిచ్ఛిన్నం.

ఇదే విధంగా h కూడా c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.9 సిద్ధాంతం: $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $c \in A$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం. $f(A) \subseteq B$, $g : B \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $f(c)$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అయిన A లోని ప్రతి x కి $h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$ గా నిర్వచింపబడిన సంయుక్త ప్రమేయం $h : A \to \mathbb{R}$, c వద్ద అవచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: $f(A) \subseteq B$, $f(c) \in B$, $\in > 0$ అనుకుందాం.

$f(c)$ వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం కావున $y \in B \cap V_\beta(f(c))$ అయినప్పుడు $|g(y) - g(f(c))| < \in$ అయ్యేటట్లు $\beta > 0$ ఉంటుంది.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h = gof"'] & f(A) C B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $x \in A \cap V_\delta(c)$ అయినప్పుడు $|f(x) - f(c)| < \beta$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\beta > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\Rightarrow f(x) \in V_\beta(f(c)) \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(c))| < \in$

$\Rightarrow |h(x) - h(c)| < \in$

$\Rightarrow c$ వద్ద h అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.10 ఉప సిద్ధాంతం: $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ లు అవిచ్ఛిన్నాలు $f(A) \subseteq B$ అయిన సంయుక్త ప్రమేయం $h = gof$ A మీద అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: A లో c వుంటే c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం. $f(c)$ వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం. కావున 15.5.9 ప్రకారం c వద్ద h అవిచ్ఛిన్నం. ఇది A లోని ప్రతి c కి జరుగుతుంది. కావున h ప్రమేయం A మీద అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.11 ఉదాహరణలు:

(i) $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం ప్రతి x కి $f(x) > 0$, A కి c అవధి బిందువు. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అయితే $\lim\limits_{x \to c} \left(\sqrt{f}\right)(x) = \sqrt{\ell}$. A లోని c వద్ద $f : A \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నమయిన $\sqrt{f}$, c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం.

దీనిని 15.5.8 ఉపయోగించి నిరూపిస్తాం. $g(x) = \sqrt{x}$ ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం. $f : A \to (0, \infty)$ c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం. $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ప్రమేయం $f(c)$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నమైతే, gof ప్రమేయం c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని తెలుసు. అంతేకాక

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)}$$ కాబట్టి c వద్ద $\sqrt{f}$ అవిచ్ఛిన్నం.

(ii) $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$ గా నిర్వచిస్తే '0' వద్ద g విచ్ఛిన్నం. ఇప్పుడు $(0, \infty)$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం అని చూపుదాం.

$f(x) = \frac{1}{x}$ ప్రమేయం $\mathbb{R} - \{0\}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం. $h(x) = \sin x$ ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

$$f(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
(0, \infty) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g = hof"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (0, \infty)$ మీద hof అవిచ్ఛిన్నం.

$x \in (0, \infty)$ అయిన $(hof)(x) = h(f(x)) = \sin\frac{1}{x} = g(x)$

కాబట్టి $(0, \infty)$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం, $f(x) = x+1$ గాను, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = 2\ (x \neq 1)$, $g(1) = 0$ గా నిర్వచింపబడినాయి.

$x = 0$ అయిన $f(x) = 1$ కాబట్టి $(gof)(x) = g(f(x)) = g(1) = 0$

$x \neq 0$ అయిన $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 2$

$$\therefore\ gof(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2, & x \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} (gof)(x) = 2 = (gof)(0)$

$\therefore$ 0 వద్ద gof అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.12 ఉదాహరణలు: $\mathbb{R}$ లో ప్రతి x, y లకి $f(x+y) = f(x)+f(y)$ అయిన $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని సంకలన ప్రమేయం అంటాం. 14.5.14 ప్రకారం x అకరణీయ సంఖ్య అయితే $f(x) = x \cdot f(1)$ మరియు $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$ అయిన $L = 0$

(a) x_0 వద్ద f అవిచ్ఛిన్నమయిన $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం అని నిరూపించుదాం.

x_0 వద్ద f అవిచ్ఛిన్నమయిన $|x - x_0| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\epsilon > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\Rightarrow |x - x_0| < \delta$ అయిన $|f(x - x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$\Rightarrow |y| < \delta$ అయిన $|f(y)| < \epsilon$, $f(0) = 0$ కావున '0' వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

$x \in \mathbb{R}$, $\ell im\left(x_n\right) = x$ అనుకుంటే $\ell im\left(x_n - x\right) = 0$

$\Rightarrow \ell im\left(f\left(x_n - x\right)\right) = 0$ ('0' వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం)

$\Rightarrow \ell im\left(f\left(x_n\right) - f\left(x\right)\right) = 0 \Rightarrow \ell im\left(f\left(x_n\right)\right) = f\left(x\right)$

$\therefore$ x వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

(b) $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం, f సంకలన ప్రమేయం అయిన ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $f(x) = x \cdot f(1)$ అని నిరూపించుదాం.

x అకరణీయమయిన $f(x) = x \cdot f(1)$ అని తెలియును.

x కరణీయమైతే $\ell im\left(x_n\right) = x$ అయ్యేటట్లు అకరణీయ అనుక్రమం $\left(x_n\right)$ ఎన్నుకుందాం.

x వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $\ell im\ f\left(x_n\right) = f(x)$.

$\therefore f(x) = \ell im\ f\left(x_n\right) = \ell im\ x_n\ f(1) = f(1) \cdot \ell im\left(x_n\right) = f(1) \cdot x$

15.5.13 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: క్రింది ప్రమేయాలకు అవిచ్ఛిన్న బిందువులను కనుక్కోండి.

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}\ (x \in \mathbb{R})$

(ii) $g(x) = \cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right)\ (x \in \mathbb{R})$

15.5.14 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని

$f(x) = -1$ (x అకరణీయ సంఖ్య)

$= 1$ (x కరణీయ సంఖ్య) గా నిర్వచిస్తే

f విచ్ఛిన్నమని, కాని ప్రతి వాస్తవ విలువ వద్ద $|f|$ అవిచ్ఛిన్నమని చూపండి.

15.5.15 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: f, g ప్రమేయాలు $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నాలు మరియు r అకరణీయ సంఖ్య అయిన $f(r) = g(r)$ అయిన $f = g$ అని చూపండి.

15.5.16 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం మరియు ప్రతి పూర్ణాంకం m, ప్రతి సహజ సంఖ్య 'n'కి $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = 0$ అయిన $f = 0$ అని చూపండి.

15.6 అంతరం మీద అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు:

ఈ విభాగంలో అంతరం మీద నిర్వచింపబడిన అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం వ్యాప్తి యొక్క ధర్మాలను పరిశీలిద్దాం. ముఖ్యంగా పరిబద్ధ సిద్ధాంతం గరిష్ఠ, కనిష్ఠ సిద్ధాంతం, మధ్యంతర మూల్య సిద్ధాంతం చివరగా అంతరాన్ని అంతరానికి పంపే సిద్ధాంతాలను నిరూపిద్దాము. ముందుగా కొన్ని నిర్వచనాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాము.

15.6.1 నిర్వచనం: A లోని ప్రతి x కి $0 \le |f(x)| \le M$ అయ్యేటట్లు M అనే వాస్తవ సంఖ్య ఉంటే $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని పరిబద్ధ ప్రమేయం అంటాము.

15.6.2 గమనిక:

(1) "A లోని ప్రతి x కి $|f(x)| \le M$ అయ్యేటట్లు" M అనే వవస్తవ సంఖ్య లేకపోతే $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని A మీద అపరిబద్ధ ప్రమేయం అంటాం. ఇది జరగడాన్కి తుల్య నియమేమంటే ప్రతి ధన సంఖ్య M కి అనురూపంగా $|f(x)| > M$ అయ్యేటట్లు కనీసం ఒక x వుండడం.

(2) ప్రతి అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం పరిబద్ధ ప్రమేయం కానక్కరలేదు.

ఉదా॥ $A = [0, \infty)$. A లోని ప్రతి x కి $f(x) = x$ అయిన A మీద f పరిబద్ధం కాదు. ఎందుకనగా $M > 0$ అయితే $M+1 \in [0, \infty)$, $f(M+1) = M+1 > M$.

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$ ప్రమేయం $(0, 1]$ మీద అవిచ్ఛిన్నం కాని పరిబద్ధం కాదు.

(4) $f(x) = \frac{1}{x} > 0, f(0) = 0$ గా నిర్వచింపబడిన $[0, 1]$ మీద పరిబద్ధం కాదు మరియు అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

(5) A మీద f పరిబద్ధతను రేఖా చిత్రం ద్వారా కూడా చూపవచ్చును. $f : A \to \mathbb{R}$ పరిబద్ధం కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము ఒక ధన సంఖ్య M కి ఒక f యొక్క రేఖా చిత్రం $y = \pm M$ క్షితిజ రేఖల మధ్య ఉండవలె.

15.6.3 పరిబద్ధ సిద్ధాంతం: $I = [a, b]$ ఒక పరిబద్ధ సంవృతాంతరం. I మీద $f : I \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమయిన I మీద f పరిబద్ధం.

ఉపపత్తి: $f : I \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం I మీద అవిచ్ఛిన్నం అవుతూ పరిబద్ధం కాదు అనుకుందాం. $\mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $|f(x_n)| \geq n$ అయ్యేటట్లు x_n, I లో ఉంటుంది.

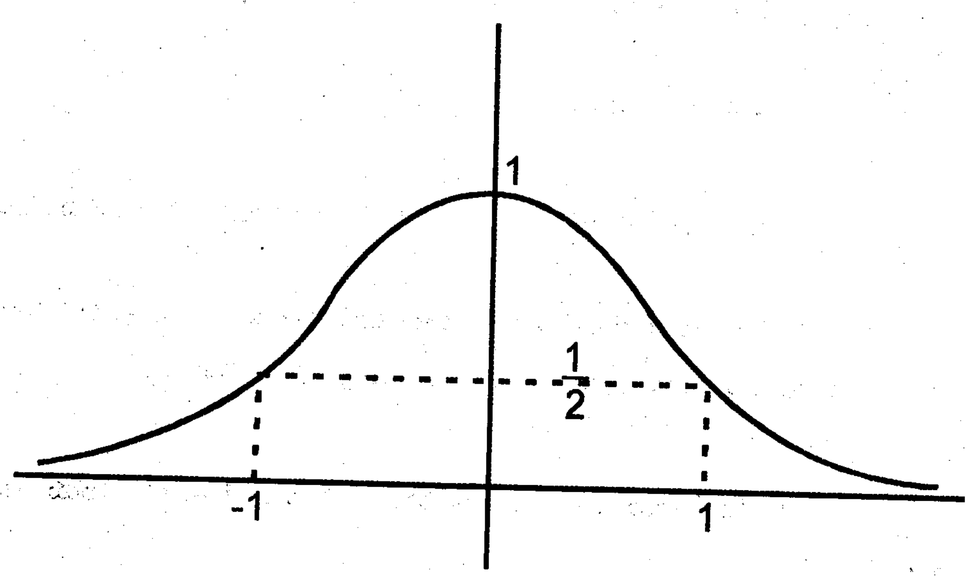
అనుక్రమం (x_n) I నుండి ఎన్నుకొన్నాం. I పరిబద్ధం కావున (x_n) పరిబద్ధం. బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం ప్రకారము (x_n)లోని ఒక ఉప అనుక్రమం (x_{n_k}) అభిసరణ చెందుతుంది. $x^1 = \ell im\, x_{n_k}$ అనుకుందాం. ప్రతి n_k కు $a \leq x_{n_k} \leq b$ కావున $a \leq \ell im\, x_{n_k} \leq b$. అందుచేత $a \leq x^1 \leq b$.

x^1 వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $\ell im\, f(x_{n_k}) = f(x^1)$. $|f(x_{n_k})| \geq n_k \geq k$ కావున $|f(x^1)| = \ell im\, |f(x_{n_k})| \geq k$, ఇది అసంభవం. ఎందుకనగా $(f(x_{n_k}))$ పరిబద్ధము కావున $\mathbb{N}$ లో ఏదో ఒక k కి $|f(x^1)| \leq k$. కావున I మీద f పరిబద్ధం.

గమనిక: అంతరం I పరిబద్ధ సంవృతాంతరం తప్పనిసరిగా కావలెనని ఉదాహరణలు 15.6.2 (2), (3)ల నుండి స్పష్టము.

ఉదాహరణ: $x \in \mathbb{R}$ అయిన $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం. $I_1 = (-1, 1)$ అయిన $f(I_1) = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$ ఇది వివృతాతరం కాదు అని గమనింపుము.

$I_2 = [0, \infty]$ అయిన $f(I_2) = (0, 1]$ ఇది సంవృతాంతరం కాదు.



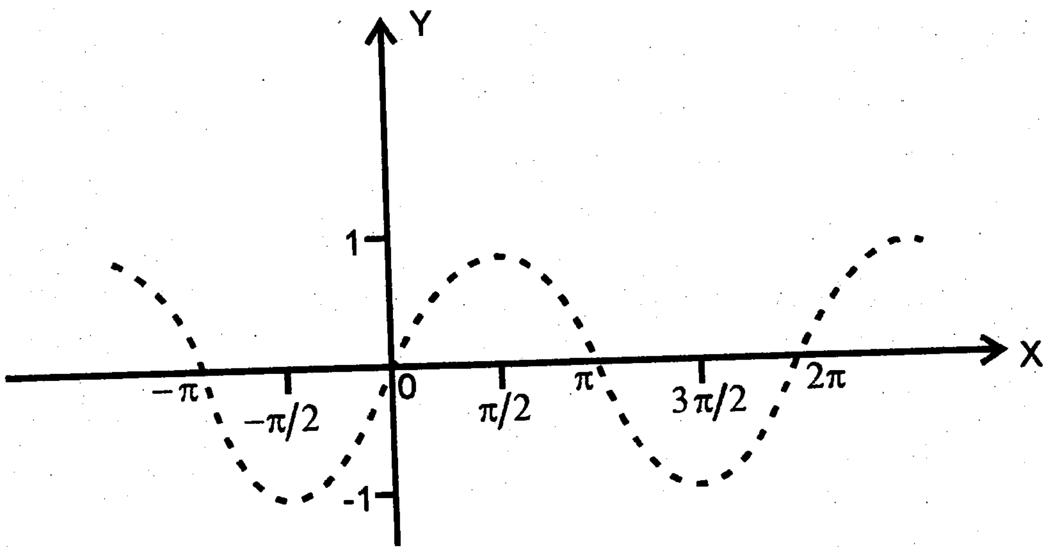
$f(x) = 1/(x^2+1) \quad (x \in \mathbb{R})$

15.6.4 గరిష్ఠ - కనిష్ఠ సిద్ధాంతం:

నిర్వచనం: $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం. ప్రతి x కి $f(x^*) \geq f(x)$ అయ్యేటట్లు x^* ఉంటే A మీద f పరమ గరిష్ఠం కలిగివుంది. A లోని ప్రతి x కి $f(x_*) \leq f(x)$ అయ్యేటట్లు x_* ఉంటే A మీద f కి పరమ కనిష్ఠం వుంది అంటాము. x^* ను f యొక్క పరమ గరిష్ఠ బిందువు అని, x_* అను f యొక్క పరమ కనిష్ఠ బిందువు అంటాం.

15.6.5 గమనిక:

(i) x^* వద్ద f కు పరమ గరిష్ఠ విలువ ఉంటే జ్యామితీయ వివరణ ప్రకారం f యొక్క రేఖా చిత్రం $y = x^*$ అను క్షితిజ రేఖకు దిగువన ఉంటుంది. ఇదే విధంగా x_* వద్ద f కు పరమ కనిష్ఠ విలువ ఉంటే f యొక్క రేఖా చిత్రం, $y = x_*$ ను క్షితిజ రేఖకు ఎగువన ఉంటుంది.



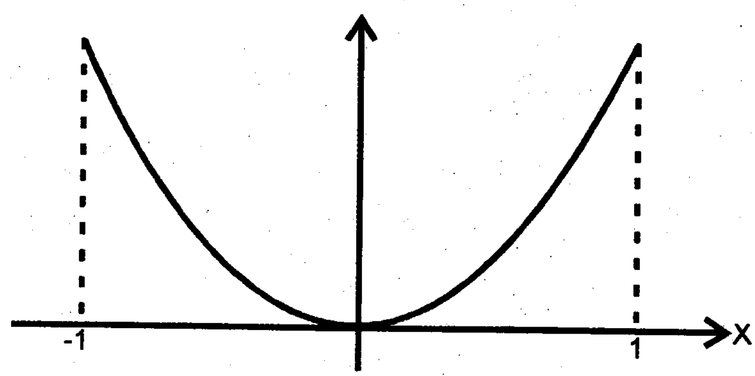
Y = Sin x

(ii) ఒక ప్రమేయానికి చాలా x విలువల వద్ద పరమ గరిష్ఠం లేక పరమ కనిష్ఠం విలువలు ఉంటాయి.

ఉదాహరణకు $\mathbb{R}$ మీద సైన్ ప్రమేయం, $y = x^2$ పరావలయాన్ని పరిశీలిద్దాం.

$y = \sin x$ యొక్క గరిష్ఠ విలువ $= 1$, ఇది $x = \pi/2, 5\pi/2, \ldots$ ల వద్ద ఉంటుంది.

$x = 3\pi/2, 7\pi/2, \ldots$ ల వద్ద కనిష్ఠ విలువ $= -1$ ఉంటుంది.



$g(x) = x^2\ (|x| \le 1)$

$y = x^2$ పరావలయానికి $[-1, 1]$ అంతరంలో $-1, 1$ల వద్ద గరిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

హెచ్చరిక: 15.6.4 సిద్ధాంతం ప్రకారం $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం అయిన పరిబద్ధం మరియు ప్రతి $a \in [a, b]$కు $f(c) \le f(x) \le f(d)$ అయ్యేటట్లు c, d in $[a, b]$ లో వ్యవస్థితం. కాని $c < d$ లేక $a = c, b = d$ అవుతుందని గ్యారంటీ లేదు. కాని $f(c) \le f(a) \le f(b)$ మరియు $f(c) \le f(b) \le f(d)$. $f(c) \le y \le f(d)$ అయ్యే ప్రతి y కి $f(x) = y$ అయ్యేటట్లు $[a, b]$లో x ఉంటుంది.

$\therefore [f(c), f(d)] \subseteq f([a, b]) \subseteq [f(c), f(d)]$ కావున $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$.

$f(a) = \inf\ f[a, b]$ లేక $f(b) = \sup\ f[a, b]$ అవుతుందని గ్యారంటీ లేదు.

(iii) ఒక ప్రమేయం A మీద అవిచ్ఛిన్నమయిన దానికి పరమ గరిష్ఠ లేక పరమ కనిష్ఠ విలువలు A మీద ఉంటాయని చెప్పలేం.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ ప్రమేయానికి $A = (0, a)$ మీద పరమ గరిష్ఠ, పరమ కనిష్ఠ విలువలు ఉండవు.

A మీద f పరిబద్ధం కాదు కావున A మీద f కి పరమ గరిష్ఠ విలువ ఉండదు.

ప్రదేశాన్ని $(0, 1)$కి తగ్గిస్తే పై ప్రమేయానికి గరిష్ఠ కనిష్ఠ విలువలు ఉండవు. కాని $[1, 2]$ మీద $x = 1$ వద్ద గరిష్ఠ విలువ $x = 2$ వద్ద కనిష్ఠ విలువ ఉంటుంది.

$(1, \infty)$ మీద $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ప్రమేయానికి గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు ఉండవు.

15.6.6 గరిష్ఠ - కనిష్ఠ సిద్ధాంతం: $I=[a,b]$ ఒక పరిబద్ధ సంవృతాంతరం $f: I \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం I మీద అవిచ్ఛిన్నం. అయిన I మీద f కి పరమ గరిష్ఠ, పరమ కనిష్ఠ విలువలు ఉంటాయి.

ఉపపత్తి: $f(I)=\{f(x)/x \in I\}$, f యొక్క వ్యాప్తి పరిబద్ధ సిద్ధాంతం ప్రకారం $f(I)$ పరిబద్ధ సమితి కావున f కి కనిష్ఠ ఎగువ, గరిష్ఠ దిగువ హద్దులు ఉంటాయి.

$s^* = \sup f(I)$, $s_* = \inf f(I)$ అనుకుందాం.

$s^* = f(x^*)$, $s_* = f(x_*)$ అయ్యేటట్లు x^*, x_* I లో ఉంటాయని నిరూపిద్దాం.

$s^* = \sup f(I)$ కావున $s^* - \dfrac{1}{n}$ అనేది $f(I)$ కి ఎగువ హద్దు కాదు. అప్పుడు $s^* - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \le s^*$ అయ్యేటట్లు x_n, I లో ఉంటుంది.

I పరిబద్ధం కావున అనుక్రమం (x_n) కూడా పరిబద్ధం బోల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం (x_n) యొక్క ఉప అనుక్రమం (x_{n_k}) అభిసరణ చెందుతుంది.

$x^* = \ell im\, x_{n_k}$ అనుకుంటే ప్రతి n_k కి $a \le x_{n_k} \le b$ కావున $a \le x^* \le b$ కాబట్టి $x^* \in I$.

x^* వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం మరియు $\ell im\, x_{n_k} = x^*$ కావున $\ell im\, f(x_{n_k}) = f(x^*)$.

$\mathbb{N}$ లోని ప్రతి k కి $s^* - \dfrac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le s^*$ కావున స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\ell im\; f(x_{n_k}) = s^*$.

అందుచేత $f(x^*) = \ell im\left(f(x_{n_k})\right) = s^* = \sup f(I)$

I మీద f కి x^* వద్ద పరమ గరిష్ఠ విలువ కలదు. ఇదే విధంగా పరమ కనిష్ఠ విలువ ఉంటుందని చూపవచ్చును.

15.6.7 మూలాలుండే ప్రాంతం తెలిపే సిద్ధాంతం (Location of Roots): అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం f మూలాలు కొరకు f రేఖా చిత్రం $X-$ అక్షాన్ని ఖండించే బిందువులను కనుగొనుట ముఖ్యం. అటువంటి x, $f(x)=0$ కి ఒక మూలం. ఒక ప్రమేయం f ఎప్పుడు శూన్యం అవుతుంది మనముందున్న ప్రశ్న. ఈ సందర్భంలో ముందుగా మధ్యంతర మూల్య సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించుదాం. దీనిని సమద్వి ఖండన పద్ధతి ప్రకారం నిరూపించుదాము. ఈ పద్ధతి సంఖ్యా విశ్లేషణంలో తరచుగా ఉపయోగిస్తారు.

15.6.8 మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం (మూలాల వ్యవస్థితా సిద్ధాంతం): $I = [a, b]$ మీద $f : I \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం. $f(a) < 0 < f(b)$ లేక $f(a) > 0 > f(b)$ అయిన $f(c) = 0$ అయ్యేటట్లు (a, b) లో c ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: $f(a) < 0 < f(b)$ అనుకుందాం. పారంపర్య సమద్వి ఖండన ద్వారా అంతరాల అనుక్రమాన్ని ఉత్పత్తి చేద్దాం.

$I_1 = [a_1, b_1]$, $a_1 = a, b_1 = b$ అనుకొనిన p_1 మధ్య బిందువు అయిన $p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$.

$f(p_1) = 0$ అయిన $c = p_1$ గా తీసుకుందాం.

$f(p_1) \neq 0$ అయిన $f(p_1) > 0$ లేక $f(p_1) < 0$

$f(p_1) > 0$ అయిన $f(a_1) < 0 < f(p_1) \cdot a_2 = a_1$, $b_2 = p_1$ గా తీసుకుందాం.

$f(p_1) < 0$ అయిన $f(p_1) < 0 < f(b_1)$ దీని నుండి $a_2 = p_1$, $b_2 = b_1$ గా తీసుకుందాం.

పై రెండు విభాగాల నుండి $I_2 = [a_2, b_2]$ సంవృతాంతం.

(i) $I_2 \subseteq I_1$ (ii) $f(a_2) < 0 < f(b_2)$, $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}[b_1 - a_1]$

సమద్విఖండన పద్ధతి ప్రకారం $I_1, I_2, \cdots, I_k$ అంతరాలు $I_k = [a_k, b_k]$, $f(a_k) < 0 < f(b_k)$ మరియు $p_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ అయ్యేటట్లుగా ఏర్పడినవనుకొందాం.

$f(p_k) = 0$ అయిన $c = p_k$ అనీ

$f(p_k) > 0$ అయిన $f(a_k) < 0 < f(p_k)$ కాబట్టి $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = p_k$ గా తీసుకుందాం.

$f(p_k) < 0$ అయిన $a_{k+1} = p_k$, $b_{k+1} = b_k$

$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ గా వ్రాస్తే $I_{k+1} \subset I_k$ మరియు

$$f(a_{k+1}) < 0,\ f(b_{k+1}) > 0;\quad b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$$

$f(p_n) = 0$ అయ్యేటట్లు ఒక బిందువు p_n ఉంటే ఈ పద్ధతి అంతమవుతుంది. ఈ పద్ధతి అంతం కాకపోతే ప్రతి n కి $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$ అయ్యేటట్లు $I_n = [a_n, b_n]$ ప్రతి అంతరంలో తరువాతది యిమిడి వుండే పరిబద్ధ సంవృత్తాంతరాల అనుక్రమాలు ఉంటాయి.

ఈ రీతిగా ఏర్పడే అంతరాల ధర్మం ప్రకారం ప్రతి n $a_n \le c \le b_n$ అయ్యేటట్లు c వుంటుంది.

$0 \le c - a_n \le b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$ మరియు

$0 \le b_n - c \le b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$ అయ్యేటట్లుగా ఉంటుంది.

సీక్వెజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారం, $\ell im\, a_n = c = \ell im\, b_n$. c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $\ell im\, f(a_n) = f(c) = \ell im(f(b_n))$ ప్రతి n కి $f(a_n) < 0$ అయిన మన $f(c) = \ell im\, f(a_n) \le 0$. అందుచేత $f(b_n) \ge 0$ కావున $f(c) = \ell im\, f(b_n) \ge 0$. $f(c) = 0$, $[a, b]$ అంతరంలోని c, f కి మూలం. $f(a) < 0 = f(c)$ కావున $a \ne c$. ఇదే విధంగా $c \ne b$ కావున $c \in (a, b)$.

ఇప్పటి వరకు మనం అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశం పరిబద్ధ సంవృతాంతరంగా మాత్రమే తీసుకున్నాం. పరిబద్ధం లేదా సంవృతం కాని అంతరాలు కొన్ని ఉంటాయి. అంతరం పరిబద్ధం కాకపోవచ్చు అప్పుడు ఒక చివరి బిందువు $+\infty$ లేక $-\infty$ లేక అంతరం లేక అర్థ వివృతం అవుతూ మరియు పరిబద్ధం అనగా ఒక తుది బిందువును పరిబద్ధ సంవృతాంతరం నుండి తొలగించగా వచ్చిన అంతరం కావచ్చు. సమితి I లో కనీసం రెండుండి $\alpha \in I, \beta \in I$, $\alpha < \beta \Rightarrow [\alpha, \beta] \subset I$. అయితే I అంతరమంటామని గుర్తు చేసుకుందాము.

15.6.9 బొల్జానో మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం: $f : I \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం అంతరం I మీద అవిచ్ఛిన్నం. $a, b \in I$. $f(a) < k < f(b)$ అయ్యేటట్లు k ఉంటే $f(c) = k$ అయ్యేటట్లు a, b ల మధ్య వ్యవస్థితం.

ఉపపత్తి: I ఒక అంతరం. ఇది పరిబద్ధం లేదా సంవృతాంతరం కానక్కర లేదు. $a < b$, $g(x) = f(x) - k$ అనుకొనిన $g(a) < 0 < g(b)$. మూలాల వ్యవస్థితా సిద్ధాంతం ప్రకారం $g(c) = 0$ అయ్యేటట్లు (a, b)లో ఒక c ఉంటుంది.

$f(c) - k = 0 \Rightarrow f(c) = k$

$b < a$ అయిన $h(x) = k - f(x)$ అయ్యేటట్లు $h(x)$ $[b, a]$ మీద నిర్వచిద్దాం.

$h(b) < 0 < h(a)$ కావున $h(c) = 0$ అయ్యేటట్లు (b, a) లో c ఉంటుంది. $\Rightarrow k - f(c) = 0$ కాబట్టి $f(c) = k$.

15.6.10 ఉప సిద్ధాంతం: $I = [a, b]$ ఒక పరిబద్ధ సంవృతాంతరం. $f : I \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం I మీద అవిచ్ఛిన్నం. గ.ది.హ. $f(I) \le k \le$ క.ఎ.హ. $f(I)$ అయితే $f(c) = k$ అయ్యేటట్లు I లో c ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: గరిష్ఠ - కనిష్ఠ సిద్ధాంతం ప్రకారం గ.ది.హ. $f(I) = f(c_*) \le k \le f(c^*) =$ క.ఎ.హ. $f(I)$ అయ్యేటట్లు c^*, c_* బిందువులు I లో ఉంటాయి. బొల్జానో సిద్ధాంతం ప్రకారం $f(c) = k$ అయ్యేటట్లు I లో c ఉంటుంది.

15.6.11 అనువర్తనం: $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అయిన $f(x) = x$ అయ్యేటట్లు x, $[0, 1]$ లో ఉంటుంది.

$g(x) = x - f(x)$ అనుకుందాం. $[0, 1]$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం. $0 \le f(0) \le 1$, $0 \le f(1) \le 1$ కావున $g(0) = 0 - f(0) \le 0$, $g(1) = 1 - f(1) \ge 0 \Rightarrow g(0) \le 0 \le g(1)$.

$g(0) = 0$ అయిన $f(0) = 0$; $g(1) = 0$ అయిన $f(1) = 0$.

$g(0) < 0 < g(1)$ అయిన మూలాల వ్యవస్థితా సిద్ధాంతం ప్రకారం $g(c) = 0$ అయ్యేటట్లు $(0, 1)$ లో c ఉంటుంది. $g(c) = 0$ కాబట్టి $f(c) = c$.

15.6.12 సముద్వి ఖండన సిద్ధాంతానికి అనువర్తనం: $[0, 1]$ మీద $f(x) \equiv x - e^x - 2 = 0$ ఒక సమీకరణం. $[0, 1]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం. $f(0) = -3 < 0, f(1) = e - 2 > 0$ కావున $f(x) = 0$ కి ఒక మూలం c, $(0, 1)$ లో ఉన్నది. కింద తయారు కాబడిన పట్టికలో n వ దశలోని $f(p_n)$ గుర్తు (+ లేదా -) $n+1$ దశలోని అంతరాన్ని నిర్ణయిస్తుంది.

$|p_n - c| \le \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^n}$ కావున మూలం c యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువకు p_n వ్రాస్తాం.

p_n యొక్క సుమారు విలువను 10^{-2} కంటే తక్కువ ఉండేటట్లు దోషాన్ని కనుగొంటాం.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{1}{2}(b_n - a_n)$
1	0	1	0.5	- 1.176	0.5
2	0.5	1	0.75	- 0.412	0.25
3	0.75	1	0.875	+ 0.099	0.125
4	0.75	0.875	0.8125	- 0.169	0.0625
5	0.8125	0.875	0.84375	- 0.0382	0.03125
6	0.84375	0.875	0.859375	+ 0.0296	0.03620
7	0.84375	0.859375	0.851675	------	0.0078125

$n = 7$ తో ఆపితే $c = p_7 = 0.8515625$ యొక్క విలువ దోషం 0.0078125 కంటే తక్కువ ఉంటుంది. దోషం 10^{-2} కంటే తక్కువగా వుండే మొదటి దశ. దాని నుండి $0.843 < c < 0.860$గా నిర్ణయించవచ్చు. ఇప్పుడు గుర్తులు ఏ విధంగా మారుతాయో పరీక్షించండి.

అంతరం	గుర్తు
$[p_2, p_3]$	$f(p_2) < 0 < f(p_3)$
$[p_3, p_4]$	$f(p_3) > 0 > f(p_4)$
$[p_5, p_6]$	$f(p_5) < 0 < f(p_6)$
$[p_6, p_7]$	$f(p_6) > 0 > f(p_7)$

15.6.13 సిద్ధాంతం: I ఒక పరిబద్ధ సంవృతాంతరం $f : I \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం. అయిన $f(I) = \{f(x)/x \in I\}$ సమితి పరిబద్ధ సంవృతాంతరం.

ఉపపత్తి: $m =$ గ.ది.హ. $f(I)$, $M =$ క.ది.హ. $f(I)$ అనుకుంటే గరిష్ఠ - కనిష్ఠ సిద్ధాంతం ప్రకారం m, Mలు $f(I)$లో ఉంటాయి మరియు $f(I) \subseteq [m, M]$.

$[m, M]$లో k ఒక మూలకం అయిన 15.6.10 ప్రకారం $f(c) = k$ అయ్యేటట్లు Iలో c ఉంటుంది.

$k \in I$ కావున $[m, M] \subseteq f(I)$ అందుచేత $f(I) = [m, M]$ పరిబద్ధ సంవృతాంతరం.

15.6.14 n+Õ á□\ qT , $T& ĭ d¾ ÈÔ ā: అంతరం I మీద $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం అయిన $f(I)$ ఒక అంతరం.

ఉపపత్తి: I ఏదైన ఒక అంతరం, $[a, b]$ రూపంలో ఉండనక్కరలేదు.

$f(I)$ ఒక అంతరం అని నిరూపించటానికి $f(I)$లో ఒకే ఒక మూలకం ఉంటుందని లేదా $\alpha \in f(I)$, $\beta \in f(I)$, $\alpha < \beta$ $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$ అని నిరూపిస్తే సరిపోతుంది.

$f(I)$లో ఒకే ఒక మూలకం k ఉంటే $f(I) = \{k\}$ అంతరం $f(I)$లో కనీసం రెండు మూలకాలు ఉన్నాయి అనుకొందాం. $\alpha, \beta \in f(I), \alpha < \beta$ అయితే $\alpha = f(a), \beta = f(b)$ అయ్యేటట్లు a, bలు Iలో ఉంటాయి.

15.6.9 ప్రకారం $k \in [\alpha, \beta]$ అయితే $f(c) = k \in f(I)$ అయ్యేటట్లు Iలో c ఉంటుంది.

కాబట్టి $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$ అందుచేత $f(I)$ ఒక అంతరం.

15.6.15 ఉదాహరణ: $I = [a, b]$ మీద $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం, I లోని ప్రతి xకి అనురూపంగా $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$ అయ్యేటట్లు y, Iలో ఉంటే $f(c) = 0$ అయ్యేటట్లు I లో c ఉంటుంది అని చూపండి.

సాధన: $x_0 \in I$ అనుకుందాం. దత్తాంశం నుండి $|f(x_1)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)|$. $|f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)|$ ఇట్లే ప్రతి nకి $|f(x_n)| \leq \frac{1}{2}|f(x_{n-1})|$ అయ్యేటట్లు $(x_n) \subseteq I$ ఉంటుంది. అందుచేత $|f(x_n)| \leq \frac{1}{2^n}|f(x_0)|$ అని స్పష్టం. ప్రతి nకి $a \leq x_n \leq b$ కాబట్టి (x_n) పరిబద్ధం. బోల్జానో వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం (x_n)లో, అభిసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం (x_{n_k}) ఉంటుంది. $x = \ell im\, x_{n_k}$ అయిన, ప్రతి n_kకి $a \leq x_{n_k} \leq b$. కాబట్టి $a \leq x \leq b$.

f అవిచ్ఛిన్నం, $\ell im\, x_{n_k} = x$ కావున $\ell im\, f(x_{n_k}) = f(x)$

కావున $|f(x)| = \ell im\, |f(x_{n_k})|$

$$|f(x_{n_k})| \leq \frac{1}{2^{n_k}}|f(x_0)| \leq \frac{1}{2^k}|f(x_0)|$$

కాబట్టి $|f(x)| = \ell im\, |f(x_{n_k})| \leq \ell im \frac{1}{2^k}|f(x_0)| = 0$ అందుచేత $f(x) = 0$.

15.6.16 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు:

(a) $f:[a, b]\rightarrow(0, \infty)$ అవిచ్ఛిన్నం అయిన $[a, b]$లో ప్రతి xకి $f(x)\geq\alpha$ అయ్యేటట్లు $\alpha>0$ ఉంటుందని చూపండి.

(b) $I=[a, b]$ మీద $f: I\rightarrow\mathbb{R}$, $g: I\rightarrow\mathbb{R}$ లు అవిచ్ఛిన్నాలు. $E=\{x\in I/f(x)=g(x)\}$ అయిన $(x_n)\subseteq E$, $x_n\rightarrow x_0\Rightarrow x_0\in E$ అనే ధర్మం Eకు ఉంటుందని చూపండి.

(c) $P(x)=x^4+7x^3-9$ అను బహుపదికి కనీసం రెండు వాస్తవ మూలాలు ఉంటాయని చూపండి. వాటిని గుర్తించండి.

(d) ఒక బహుపది యొక్క గుణకాలు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు దాని తరగతి బేసి సంఖ్య అయిన దానికి ఒక వాస్తవ మూలం ఉంటుందని చూపండి.

(e) $f:[a, b]\rightarrow\mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం. $f(a)<0<f(b)$ $W=\{x\in[a, b]/f(x)<0\}$. $w=$ క.ఎ.హ. W అయిన $f(w)=0$ అని చూపండి.

(f) ఏ వివృత (సంవృత) అంతరాలు $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ ప్రమేయం ద్వారా వివృత (సంవృత) అంతరాల మీదికి పంపబడతాయో పరిశీలించండి.

(g) $f:[0, 1]\rightarrow\mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం మరియు అకరణీయ విలువలు మాత్రమే పొందితే f స్థిర ప్రమేయం అని చూపండి.

15.7 ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నత (Uniform Continuity):

15.7.1 ఉదాహరణ: $g(x)=\frac{1}{x}$ ప్రమేయం $(0, \infty)$ మీద అవిచ్ఛిన్నం. $\lim\limits_{x\rightarrow0}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\rightarrow\infty}g(x)=0$ అని తెలియును.

$u\in(0, \infty)$ అయిన $g(x)-g(u)=\frac{1}{x}-\frac{1}{u}=\frac{u-x}{ux}$

$|x-u|<\frac{u}{2}$ అయిన $u-\frac{u}{2}<x<u+\frac{u}{2}$ కాబట్టి

$\frac{u}{2}<x<\frac{3u}{2}$ కాబట్టి $\frac{2}{3u}<\frac{1}{x}<\frac{2}{u}$

$$\Rightarrow \left|g(x)-g(u)\right| < \frac{|x-u|}{u}\cdot\frac{2}{u} = \frac{2}{u^2}\,|x-u|$$

$\in > 0$ అయితే $\frac{2}{u^2}\,|x-u| < \in \Rightarrow |x-u| < \frac{\in u^2}{2}$

$\therefore |x-u| <$ కనిష్ఠం $\left\{\frac{u}{2}, \frac{\in u^2}{2}\right\}$ అయిన $\left|g(x)-g(u)\right| < \in$

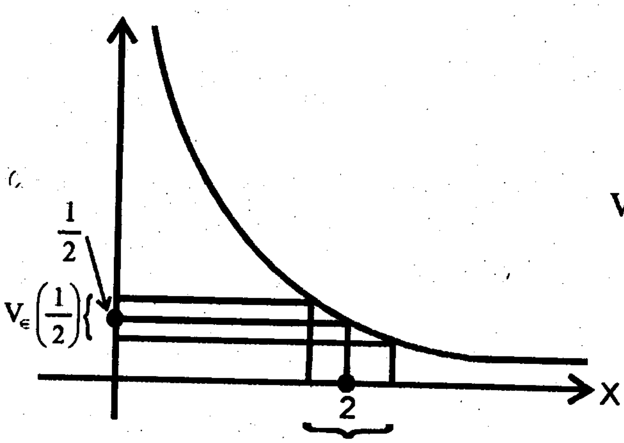
$\delta(\in) =$ కనిష్ఠం $\left\{\frac{u}{2}, \frac{\in u^2}{2}\right\}$ గా తీసుకుందాం.

$u = \frac{1}{2}$ అయిన $\delta(\in) =$ కనిష్ఠం $\left\{\frac{1}{4}, \frac{\in}{8}\right\}$

$u = 2$ అయిన $\delta(\in) =$ కనిష్ఠం $\{1, 2\in\}$

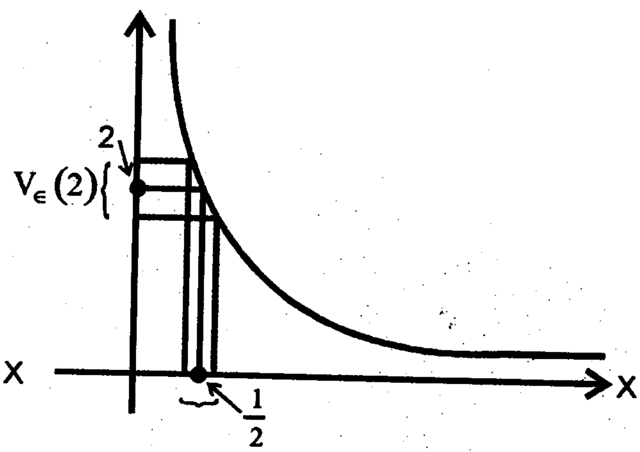
దీన్ని బట్టి $\in$, u ల మీద ఆధారపడి δ మారుతుంది అని గమనించ వచ్చును.

$\in$ మీద ఆధారపడి, u మీద ఆధారపడకుండా $\in$ మీద మాత్రమే ఆధారపడేటట్లుగా $\delta > 0$ కనుగొనుట అసంభవం. దీనిని కింది బొమ్మల నుండి గ్రహించవచ్చును.



δ- neighborhood

$g(x) = 1/x \quad (x>0)$



δ- neighborhood

$g(x) = 1/x \quad (x>0)$

15.7.2 నిర్వచనం: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం. ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా A లో x, y లకి $|x - y| < \delta(\in)$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - f(y)| < \in$ అయ్యేటట్లుగా $\delta(\in) > 0$ ఉంటే A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అంటాం.

15.7.3 ఉదాహరణ: ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $f(x) = x$ గా నిర్వచిస్తే $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అయితే $\delta = \in$ గా తీసికొందాం.

$\in > 0$ అయితే $\delta = \in$ గా తీసికొందాం. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $|x_1 - x_2| < \delta$ $\delta = \in$ అయితే

$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \delta = \in$ కాబట్టి $\mathbb{R}$ మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

15.7.4 సిద్ధాంతం: $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అయిన A మీద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

ఉపపత్తి: $\in > 0$ అనుకొనుము. A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం. కాబట్టి $x_1, x_2 \in A$, $|x_1 - x_2| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x_1) - f(x_2)| < \in$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

A లో a తీసికోండి. $x \in A$, $|x - a| < \delta$ అయిన $|f(x) - f(a)| < \in$

కాబట్టి $a \in A$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

A లో a యాదృచ్ఛికం కావున A మీద f అవిచ్ఛిన్నం.

గమనిక: 15.7.1 ప్రకారం ఈ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం నిజం కాదు. అంటే A మీద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కానక్కరలేదు.

15.7.5 ఉదాహరణ: ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ ను $f(x) = x^2$ గా నిర్వచింపబడిన $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమే కాని ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

15.4.10 (d) ప్రకారం f, $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం. $\in > 0$, $\delta > 0$ అనుకోండి.

$x_1 > 0$, $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2} \in \mathbb{R}$ అనుకుందాం. $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$

$$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2|\,|x_1 + x_2|$$

$$= \frac{\delta}{2}\left(2x_1 + \delta/2\right) = \delta x_1 + \frac{\delta^2}{4}$$

$$\Rightarrow \delta x_1 < \delta x_1 + \frac{\delta^2}{4} < \in \Rightarrow \delta x_1 < \in$$

$\delta > 0$ కావున ఆర్కిమెడియన్ ధర్మం ప్రకారం $n \cdot \delta > \in$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{N}$ లో n ఉంటుంది. ఇప్పుడు

$x_1 = n,\ x_2 = x_1 + \delta/2$ గా తీసుకుంటే $|f(x_1) - f(x_2)| \geq n\delta \ > \in$

అందుచేత $\in > 0$ ఏ సంఖ్య అయినా దాని అనురూపంగా $\delta > 0$ $x_1, x_2 \in$ అయినప్పుడు $|f(x_1) - f(x_2)| < \in$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం కాదు.

అనగా $\mathbb{R}$ మీద $f(x) = x^2$ ప్రమేయం ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

15.7.6 ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కాకుండా ఉండటానికి నియమం $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ ఒక ప్రమేయం అయిన కింది ప్రవచనాలు తుల్యాలు.

(i) A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

(ii) ప్రతి $\delta > 0$ కి అనురూపంగా A లో x_δ, u_δ వుంటూ $|x_\delta - u_\delta| < \delta$ మరియు $|f(x_\delta) - f(u_\delta)| \geq \in_0$ అయ్యేటట్లు ఒక $\in_0 > 0$ ఉంటుంది.

(iii) ఒక $\in_0 > 0$ మరియు A లో $(x_n), (u_n)$ రెండు అనుక్రమాలు, $\lim (x_n - u_n) = 0$ $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \in_0$ అయ్యేటట్లు వుంటాయి.

ఉదాహరణ: $g(x) = \frac{1}{x}$ యొక్క ప్రదేశం $A = \{x / x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$

$x_n = \frac{1}{n},\ y_n = \frac{1}{2n}$ అనుకుంటే $\lim (x_n - y_n) = \lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = \lim\left(\frac{1}{2n}\right) = 0.$

$0 < \in < 1$ అయితే $|g(x_n) - g(u_n)| = |n - 2n| = n > \in\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow A$ మీద g ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

15.7.7 ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నత సిద్ధాంతం: I ఒక పరిబద్ధ సంవృతాంతరం. I మీద $f : I \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం అయిన I మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: I మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కాదు అనుకుందాం. ప్రతి n కి $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$ అయ్యేటట్లు అనుక్రమాలు $(x_n), (y_n)$లు I లోనూ మరియు ఒక ధన సంఖ్య ϵ_0 ఉంటాయి.

I పరిబద్ధం కావున అనుక్రమం (x_n) కూడా పరిబద్ధం బొల్జానో - వైర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం అనుక్రమం (x_n)లో అభిసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం (x_{n_k}) ఉంటుంది. $\ell im\,(x_{n_k}) = z$ అనుకుంటే $z \in I$.

$$\left|x_{n_k} - y_{n_k}\right| \leq \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k},\ \ell im\,\frac{1}{k} = 0 \text{ కావున } \ell im\left(x_{n_k} - y_{n_k}\right) = 0$$

$$\ell im\, x_{n_k} = z \text{ కావున } \ell im\, u_{n_k} = \ell im\left(u_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k}\right)$$

$$= \ell im\left(u_{n_k} - x_{n_k}\right) + \ell im\left(x_{n_k}\right) = 0 + z = z$$

కాబట్టి (u_{n_k}) అనుక్రమం z కు అభినరణ చెందుతుంది. z వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $(f(x_{n_k})), (f(u_{n_k}))$ అనుక్రమాలు రెండు $f(z)$ కి అభిసరణ చెందుతాయి.

ప్రతి n కి $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \epsilon_0 > 0$ కాబట్టి ఇది అసంభవం. అందుచేత z వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు. ఇది దత్తాంశానికి విరుద్ధం. కాబట్టి I మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

15.7.8 సిద్ధాంతం: $A \subseteq \mathbb{R}$ మీద f, g లు ఏకరూప అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు అయిన $f+g, f-g, cf\ (c \in \mathbb{R})$లు ఏకరూప అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు.

ఉపపత్తి: ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కాబట్టి $x \in A,\ y \in A, |x-y| < \delta_1$ అయినప్పుడు $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ మరియు $|x - y| < \delta_2$ అయినప్పుడు $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ అయ్యేటట్లుగా $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$లు ఉంటాయి.

$\delta =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అనుకుంటే $|x-y| < \delta$ అయినప్పుడు పై రెండూ జరుగుతాయి.

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

ఇది ప్రతి $\epsilon > 0$ కి వర్తిస్తుంది కాబట్టి A మీద $f+g$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

ఇదే విధంగా $f-g$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని చూపవచ్చును. $c=0$ అయిన $cf=0 \Rightarrow$ శూన్య ప్రమేయం, ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం. $c \neq 0, \in > 0$ అనుకుందాం.

$x, y \in A, |x-y| < \delta$ అయినప్పుడు $|f(x)-f(y)| < \frac{\in}{|c|}$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది. ఇట్టి

x, y లకి $|(c \cdot f)(x)-(c \cdot f)(y)| = |c \cdot f(x) - c \cdot f(y)| = |c|\,|f(x)-f(y)| < |c| \cdot \frac{\in}{|c|} = \in$ కాబట్టి

A మీద $c\,f$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

15.7.9 సిద్ధాంతం: A మీద f, g లు ఏకరూప అవిచ్ఛిన్న పరిబద్ధ ప్రమేయాలు అయిన $f \cdot g$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: A మీద f, g లు పరిబద్ధాలు కావున ప్రతి x కి $|f(x)| < M, |g(x)| < M$ అయ్యేటట్లు $M > 0$ ఉంటుంది.

$x, y \in A$ అయిన $|(f\,g)(x) - (f\,g)(y)| = |f(x)\,g(x) - f(y)g(y)|$

$= |f(x)(g(x)-g(y)) + g(y)(f(x)-f(y))|$

$\leq |f(x)|\,|g(x)-g(y)| + |g(y)|\,|f(x)-f(y)| \cdots\cdots (1)$

$\in > 0$ అయిన $x, y \in A \quad |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\in}{2M}$ మరియు $|x-y| < \delta_2$

$\Rightarrow |g(x)-g(y)| < \in/2M$ అయ్యేటట్లు $\frac{\in}{2M}$ కి అనురూపంగా $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ లు ఉంటాయి.

$\delta(\in) =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అనుకోండి. పై అసమత (1) నుండి $x, y \in A, |x-y| < \delta(\in)$ అయిన $|(f\,g)(x) - (f\,g)(y)| < M \cdot \frac{\in}{2M} + M \cdot \frac{\in}{2M} = \in$ కాబట్టి A మీద $f\,g$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

గమనిక:

(1) A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అయిన A మీద f పరిబద్ధం కానక్కరలేదు. ఇందుకు ఉదాహరణ తత్సమ ప్రమేయం $I(x) = x (x \in \mathbb{R})$.

(2) $A = [a, \in]$ అయిన A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అయిన A మీద f అవిచ్ఛిన్నం కావున f పరిబద్ధం.

15.7.10 [illegible] పరిబద్ధ సమితి A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అయిన $\{f(x)/x \in A\}$ కూడా పరిబద్ధం అని చూపండి.

15.7.11 ఉదాహరణలు:

(1) $a > 0$ అయిన $[a, \infty]$ మీద $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం. $x \geq a,\ y \geq a$ అయిన

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{|x-y|}{a^2}$$

$\in > 0$ మరియు $\dfrac{|x-y|}{a^2} < \in$ అయిన $|f(x) - f(y)| < \in$ అందుచేత $x, y \in [a, \infty]$,

$|x-y| < a^2 \in$ అయిన $|f(x)-f(y)| < \in$

$\therefore [a, \infty)$ మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

(2) $a > 0$ అయిన $[a, \infty)$ మీద $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

$x \geq a,\ y \geq a,\ \in > 0$ అనుకుందాం.

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right|$$

$$= \frac{|x-y|}{|xy|}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leq \frac{2}{a}\,\frac{|x-y|}{a^2}$$

$|x-y| < \dfrac{a^3}{2} \in$ అయిన $|f(x)-f(y)| < \in$

$\therefore a > 0$ అయిన $[a, \infty)$ మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

గమనిక: $[a, \infty)$ మీద $g(x) = \dfrac{1}{x}$ పరిబద్ధం కాబట్టి 15.7.9 మరియు పై (i)ల నుండి

$f(x) = g^2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నమని నేరుగా రాబట్టవచ్చును.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం $x, y \in \mathbb{R}, \in > 0$ అనుకుందాం.

$$|f(x)-f(y)| = \frac{|x^2-y^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{|x-y||x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\le |x-y| \cdot \frac{|x|}{1+x^2} \cdot \frac{|y|}{1+y^2} \le |x-y|$$

$|x-y| < \in$ అయిన $|f(x)-f(y)| < \in$

$\therefore \mathbb{R}$ మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

15.8 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు జవాబులు:

15.4.11 (a) $\in = f(c)$ అనుకుందాం.

$|x-c| < \delta$ అయినప్పుడు $|f(x)-f(c)| < \in = f(c)$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\Rightarrow f(c)-f(c) < f(x) < f(c)+f(c)$

$\Rightarrow 0 < f(x) < 2\cdot f(c) \Rightarrow f(x) > 0$

$\therefore\ x \in V_\delta(c) \Rightarrow f(x) > 0$

(b) $Z(f)$లో (x_n) ఒక అనుక్రమం అయితే $f(x_n)=0$. $\ell im\ x_n = x$, x వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $\ell im\ f(x_n) = f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in Z(f)$

(c) $\in > 0, |x-y| < \dfrac{\in}{k}$ అయిన $|f(x)-f(y)| < k|x-y| < k\cdot\dfrac{\in}{k} = \in$ ప్రతి $y \in \mathbb{R}$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం $\Rightarrow \mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం.

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2\ (x \ne 2)$

$\mathbb{R} - \{2\}$ కు అవధి బిందువు $= 2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4$

$F(x) = f(x)\ (x \neq 2), F(2) = 4$ అయ్యేటట్లు F ను నిర్వచిస్తే 2 వద్ద F అవిచ్ఛిన్నం.

(e) $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం మరియు 'r' అకరణీయ సంఖ్య అయిన $f(r) = r$. c అకరణీయ సంఖ్య అయిన $c - \frac{1}{n} < r_n < c$ అయ్యేటట్లు (r_n) అనే అకరణీయ అనుక్రమం ఉంటుంది.

$\Rightarrow \lim r_n = c$.

c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $f(c) = \lim f(r_n) = \lim r_n = c$

$\therefore f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$

(f) $f : A \to \mathbb{R}, c \notin A$, A యొక్క అవధి బిందువు c మరియు $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$.

$F : A \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $F(x) = f(x) + (x \in A)$

$$= \ell \ (x = c)$$

గా నిర్వచిస్తే $A \cup \{c\}$ మీద F అవిచ్ఛిన్నం.

$a \in A$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన $|x - a| < \delta$ అయినప్పుడు $|f(x) - f(a)| < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\in > 0$ కు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$x \in A, f(x) = F(x),\ f(a) = F(a), |x - a| < \delta$ అయిన $|F(x) - F(a)| < \in$

$\Rightarrow a$ వద్ద F అవిచ్ఛిన్నం.

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$ కావున $0 < |x - c| < \delta,\ x \in A \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన $\in > 0$ కు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$x \in A \cup \{c\}$ అయిన $|F(x) - F(\ell)| = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ |f(x) - \ell| & (x \neq 0) \end{cases}$

$\therefore\ x \in A, |x-c| < \delta$ అయిన $|F(x) - F(\ell)| \le |f(x) - \ell| < \in$

$\Rightarrow$ c వద్ద F అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.2 S.A.Q.: $\in > 0$ అనుకొందాం.

c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం. కావున $|x-c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \in/2$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ మరియు c వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం కావున $|x-c| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(g)| < \in/2$ అయ్యేటట్లు $\delta_2 > 0, \frac{\in}{2}$ కి అనుకూలంగా ఉంటాయి.

$\delta =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అనుకొనిన $|x-c| < \delta$ అయితే

$$|(f+g)(x)-(f+g)(c)| = |f(x)-f(c)+g(x)-g(c)|$$

$$\le |f(x)-f(c)| + |g(x)-g(c)| < \in/2 + \in/2 = \in$$

$\Rightarrow$ c వద్ద f + g అవిచ్ఛిన్నం.

ఇదే విధంగా c వద్ద f – g అవిచ్ఛిన్నం అని చూపవచ్చును. c వద్ద b f అవిచ్ఛిన్నం అని చూపవచ్చును.

$\in > 0$ అనుకుందాం. $x \in A, |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \frac{\in}{1+|b|}$ అయ్యేటట్లు $\frac{\in}{1+|b|}$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$x \in A, |x - c| < \delta$ అనుకుందాం.

$$|(b\,f)(x) - (b\,f)(c)| = |b(f(x) - f(c))| = |b|\,|f(x) - f(c)|$$

$$< |b| \cdot \frac{\in}{|b|+1} < \in$$

$\therefore$ c వద్ద b f అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.13 (1) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} \ (x \in \mathbb{R})$

$f_1(x) = 1, f_2(x) = x$ అనుకొనిన $f_1, f_2, \mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నాలు.

$$\therefore f(x) = \frac{(f_1+f_2)^2(x)}{(f_1+f_2^2)(x)}$$

$f_1 + f_2, (f_1+f_2)^2, f_2^2, f_1+f_2^2$ లు $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నాలు. $(f_1+f^2)(x) \neq 0$ కావున $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం.

(2) $g(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right) \ (x \in \mathbb{R})$

$f_1(x) = 1, f_2(x) = x$ అనుకొనిన $\mathbb{R}$ మీద f_1, f_2 లు అవిచ్ఛిన్నాలు.

$\Rightarrow f_1 + f_2^2$ కూడా $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $(f_1+f_2^2)(x) \geq 0$

$h(x) = \left(\sqrt{f_1+f_2^2}\right)(x)$, $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

$k(y) = \cos y$, $\mathbb{R}$ మీద అవిచ్ఛిన్నం.

$\therefore g(x) = \cos\sqrt{1+x^2} = (koh)(x)$ కావున $\mathbb{R}$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.14 అకరణీయ సంఖ్య $x_n = c + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ అనుకుందాం. అప్పుడు x_n కరణీయ సంఖ్య మరియు $|x_n - c| = \dfrac{\sqrt{2}}{n}$

$$\Rightarrow \ell im\,|x_n - c| = 0 \Rightarrow \ell im\, x_n = c$$

కాని $\ell im\, f(x_n) = -1, f(c) = 1 \Rightarrow \ell im\, f(x_n) \neq f(c)$

కాబట్టి c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

c అకరణీయ సంఖ్య అనుకొందాం. $\mathbb{N}$ లోని ప్రతి n కి $c < y_n < c + \dfrac{1}{n}$ అయ్యేటట్లు y_n అను అకరణీయ సంఖ్య ఉంటుంది. $\ell im\, y_n = c$, ప్రతి 'n'కు $f(y_n) = 1$ కాబట్టి $\ell im\, f(y_n) = 1$, $f(c) = -1$.

కాబట్టి $\ell im\, f(y_n) \neq f(c)$ కాబట్టి c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు. అందుచేత ఏ బిందువు వద్దనూ f అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

కానీ ప్రతి n కి $|f(x)| = 1$ అయినందున $|f|$ అవిచ్ఛిన్నం.

15.5.15 x ఏదైన అకరణీయ సంఖ్య అనుకుందాం. ప్రతి n కి, $|x_n - x| < \dfrac{1}{n}$ అయ్యేటట్లు x_n అను అకరణీయ సంఖ్య ఉంటుంది. $\ell im\, x_n = x,\ f(x_n) = g(x_n)$.

x వద్ద f, g లు అవిచ్ఛిన్నాలు కావున $f(x) = \ell im\, f(x_n) = \ell im\, g(x_n) = g(x)$

కాబట్టి ప్రతి x కి $f(x) = g(x)$

15.5.16 $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం, $f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) = 0,\ (m \in Z,\ n \in N)$

అప్పుడు ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $f(x) = 0$ కాని $f(0) = 0$

$x > 0$ అనుకొనిన $0 < \dfrac{x}{m} < 1$ అయ్యేటట్లు $m \in \mathbb{N}$ ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{n}{m} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\Rightarrow \dfrac{m_0}{2^n} < x < \dfrac{m_0+1}{2^n}$ ఇది ప్రతి $m > m_0$ కి వర్తిస్తుంది. కావున $m > m_0$ అయిన $\dfrac{m}{2^{n_m}} < x < \dfrac{m+1}{2^{n_m}}$ అయ్యేటట్లు n_m ఉంటుంది.

$$\Rightarrow 0 \leq x - \frac{m}{2^{n_m}} < \frac{1}{2^{n_m}}$$

$$\Rightarrow \ell im\, \frac{m}{2^{n_m}} = x$$

f అవిచ్ఛిన్నం కావున $f(x) = \ell im\, f\left(\dfrac{m}{2^{n_m}}\right) = 0$

$x < 0$ అయిన ఇదే విధంగా నిరూపించవచ్చును.

15.6.16 (a) $f:[a, b] \to (0, \infty)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం కావున $f([a, b])$ ఒక పరిబద్ధ సంవృతాంతరం $[\alpha, \beta]$.

దీనిలో $\alpha =$ గ.ది.హ. $\{f(x)/a \le x \le b\}, \beta =$ క.ఎ.హ. $\{f(x)/a \le x \le b\}$

$\Rightarrow f(x_0) = \alpha$ అయ్యేటట్లు $[a, b]$లో x_0 ఉంటుంది.

$f(x_0) \in (0, \infty)$ కావున $\alpha = f(x_0) > 0$

$f(x_0) = 0$ గ.ది.హ. $\{f(x)/a \le x \le b\}$ కావున ప్రతి $a \le x \le b$ అయితే

$f(x) \ge f(x_0) = \alpha > 0$

(b) ప్రతి xకి $h(x) = f(x) - g(x)$ అని వ్రాయండి. I మీద h అవిచ్ఛిన్నం.

$E = Z(h) = \{x \in I / h(x) = 0\}$.

$(x_n) \subset E \subset I$ మరియు $x_n \to x_0$

$\Rightarrow a \le x_0 \le b$, ప్రతి nకి $a \le x_n \le b$ కావున $x_0 \in E$

E మీద h అవిచ్ఛిన్నం, $\ell im\, x_n = x_0$ కావున $h(x_0) = \ell im\, h(x_n) = 0$.

(c) $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9 = x^3(x+7) - 9 > 0$

$x < 0, x + 7 < 0$ అయిన $x^3(x+7) > 9$ లేక $x > 0, x + 7 > 0$ అయిన $x^3(x+7) > 9$.

$x < -7$ అయిన $x^3, x + 7$లు రెండు ఋణాత్మకం.

$x = -8$ అయిన $p(-8) = 8^3 - 9 > 0, p(-7) = -9 < 0$

$\therefore$ ఒక మూలం $(-8, -7)$ల మధ్య ఉంటుంది.

$p(1) < 0, p(2) > 0$ కావున ఒక మూలం $(1, 2)$ల మధ్య ఉంటుంది.

(d) $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_{2n-1}x^{2n-1}\ (a_{2n-1} > 0)$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{x^{2n-1}} = \frac{a_0}{x^{2n-1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \cdots\cdots + a_{2n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{x^{2n-1}} = a_{2n-1} > 0$$

ఇదే విధంగా $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$

$x \geq \delta_1 > 0 > \delta_2 \geq y$ అయిన $P(x) > 1 > -1 > P(y)$ అయ్యేటట్లు $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ ఉంటాయి.

$[\delta_2, \delta_1]$ మీద P అవిచ్ఛిన్నం మరియు $P(\delta_1) > 0 > P(\delta_2)$ కావున $P(C) = 0$ అయ్యేటట్లు $c \in [\delta_2, \delta_1]$ ఉంటుంది.

$a_{2n-1} < 0$ అయిన పై విధంగా నిరూపించవచ్చును.

(e) $x \in w \Rightarrow f(x) < 0$

$n \in \mathbb{N}$ అయిన $w - \frac{1}{n}$ ఎగువ హద్దు కాదు కావున $w - \frac{1}{n} \leq x_n \leq w$ అయ్యేటట్లు x_n, W లో ఉంటుంది. ప్రతి n కి $f(x_n) < 0, 0 < w - x_n < \frac{1}{n}$

కావున $\lim x_n = w \Rightarrow \lim f(x_n) = f(w)$

ప్రతి n కి $f(x_n) < 0$ కావున $f(w) \leq 0$

$f(w) < 0$ అయిన $f(b) > 0 > f(w)$

$\Rightarrow f(x_0) = 0$ అయ్యేటట్లు x_0 $[w, b]$లో ఉంటుంది.

$x_0 \in w \Rightarrow x_0 \leq w$ ఇది $n_0 > w$ కు విరుద్ధం. అందుచేత $f(w) = 0$.

(f) $f(x) = x^2$ అనుకుందాం.

$a > b > 0, f(x) = x^2$ కావున $f((b, a)) = (b^2, a^2)$ మరియు $f([b, a]) = [b^2 \ a^2]$.

$a < b < 0$ అయిన $f(a, b) = (b^2, a^2)$ మరియు $f([a, b]) = [b^2 \ a^2]$.

$a < 0 < b$ అయిన $f(a, b) = (0, c)$ మరియు $f([a, b]) = [0, c]$

దీనిలో $c = mn\{a^2, b^2\}$

(g) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం అయిన f యొక్క వ్యాప్తి $f([0, 1])$ పరిబద్ధ సంవృతాంతరం.

ఒక అంతరంలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ మూలకాలు ఉంటే ఆ అంతరంలో అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయి. కాని దత్తాంశం ప్రకారం ప్రతి x కి $f(x)$ అకణీయం కావున $f([0, 1])$లో ఒక్క మూలకం మాత్రమే ఉంటుంది. $[0, 1]$లోని ప్రతి x కి $f(x) = k$ అయ్యేటట్లు k అనే అకరణీయ సంఖ్య ఉంటుంది.

15.7.10 A మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కావున $x \in A, y \in A, |x - y| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1/2$ అయ్యేటట్లు $\in = \frac{1}{2}$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$\Rightarrow x \in A, y \in A, |x - y| < \delta$ అయిన $\left||f(x)| - |f(y)|\right| < \frac{1}{2}$

A మీద f పరిబద్ధకం కాదు కావున $|f(x_n)| >$ గరిష్ఠం $\{n, 1 + f(x_{n-1})\}$ · · · (1)

A లో x_n, n కి అనురూపంగా వుంటుంది.

$(x_n) \subseteq A$, A పరిబద్ధకం కావున (x_n)లో అభిసరణ చెందే ఉప అనుక్రమం (x_{n_k}) ఉంటుంది.

$x_{n_k} = y_k$ గా వ్రాయండి.

(y_k) అభిసరణ చెందుతుంది కావున (y_k) కోషీ అనుక్రమ $r > s \geq k$ అయిన $|y_r - y_s| < \delta$ అయ్యేటట్లు δ కు అనురూపంగా $\mathbb{N}$ లో k ఉంటుంది. $r > s > k$ అయితే

$\left||f(y_r)| - |f(y_s)|\right| < \frac{1}{2}$

(1) నుండి $n > m$ అయిన $|f(x_n) - f(x_m)| > 1$

$\therefore 1 < \left||f(y_r)| - |f(y_s)|\right| < \frac{1}{2}$ ఇది విరుద్ధం.

$\therefore$ A మీద f పరిబద్ధం.

15.9 సారాంశము:

అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం నిర్వచనం, అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు కొన్ని బీజీయ ధర్మాలు మరియు పరిబద్ధ సంవృతాంతరం మీద f యొక్క వ్యాప్తి స్వరూపం తెలుసుకున్నాం. డిరిస్లే ప్రమేయం, థోమే ప్రమేయాల గురించి చర్చించాం. విచ్ఛిన్న ప్రమేయాలను ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నత గూర్చి కూడా చర్చించాం.

15.10 సాంకేతిక పదాలు:

అవిచ్ఛిన్నత

విచ్ఛిన్నత

ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నత

మధ్యమ మూల్య ధర్మం

15.11 అభ్యాసం:

అభ్యాసం 15.11.A:

1. $a<b<c, [a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం, $[b, c]$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం మరియు $f(b)=g(b)$, $x \in [a, b]$ అయిన $h(x)=f(x)$, $x \in [b, c]$ అయిన $h(x)=g(x)$ గా ఉండేటట్లు $[a, c]$ మీద h అనే ప్రమేయం నిర్వచింపబడినది. $[a, c]$ మీద h అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

2. $x \in \mathbb{R}$ అయిన $[x]=n$, $(n \in Z,\ n \le x < n+1)$ $x \to [x]$ ప్రమేయాన్ని సోపాన ప్రమేయం అంటాం. కింది ప్రమేయాలకు అవిచ్ఛిన్నత బిందువులను కనుక్కోండి.

   (a) $g(x)=x[x]$ (b) $h(x)=[\sin\ x]$ (c) $k(x)=\left[\dfrac{1}{x}\right]$ $(x \ne 0)$

3. $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in A$ వద్ద $f : A \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం. $x, y \in A \cap V_\delta(c)$ అయినప్పుడు $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\epsilon > 0$ కి $V_\delta(c)$ అనే సామీప్యం c కు ఉంటుందని చూపండి.

4. c వద్ద $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం, $f(c) > 0$ అయితే $x \in V_\delta(c)$ అయిన $f(x) > 0$ అయ్యేటట్లు c చుట్టూ δ – సామీప్యం $V_\delta(c)$ ఉంటుందని చూపండి.

5. $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $f : B \to \mathbb{R}$, A లోని ప్రతి x కి $g(x) = f(x)$ అయ్యేటట్లు g ఒక ప్రమేయం, $c \in A$.

(a) c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన c వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం.

(b) c వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం అవుతూ c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కానట్లుగా ఒక ఉదాహరణ ద్వారా తెలపండి.

6. $A = (0, \infty)$ $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $f(x) = 0$ (x కరణీయ సంఖ్య)

$= n$ (x అకరణీయ సంఖ్య $x = \frac{m}{n}$, $(m, n) = 1$ గా నిర్వచింపబడినది. ప్రతి వివృతాంతరంలోను f పరిబద్ధం కాదు అని నిరూపించండి. f, A లోని ప్రతి బిందువు వద్ద విచ్ఛిన్నమని చూపండి.

(సూచన: $a < b$ అయిన (a, b) అంతరంలో ఉండే అకరణీయ సంఖ్యల లోని హారాలు n లకు అనంత విలువలు ఉంటాయి.)

అభ్యాసం 15.11.B:

1. క్రింది ప్రమేయాలకు అవిచ్ఛిన్నతా బిందువులను కనుక్కోండి.

(a) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 + |\sin x|}}{x}$ $(x \neq 0)$

2. n సహజ సంఖ్య. $A \subseteq \mathbb{R}$ మీద $f : A \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం అయిన A లోని ప్రతి x కి $f^n(x) = (f(x))^n$ గా నిర్వచింపబడిన, f^n, A మీద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

3. c వద్ద $f + g$ అవిచ్ఛిన్నం, c వద్ద $f\,g$ అవిచ్ఛిన్నం అయ్యేటట్లు c వద్ద f, g లు రెండు అవిచ్ఛిన్నం కాకుండా ఉండేటట్లు ఉదాహరణలు ద్వారా చూపండి.

4. ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $f(x) = x - [x]$ గా నిర్వచింపబడిన f యొక్క అవిచ్ఛిన్న బిందువులను కనుక్కోండి.

5. $g(1) = 0$, $g(x) = 2$ $(x \neq 1)$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{R}$ మీద g ఒక ప్రమేయం. ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $f(x) = x + 1$ అయిన $\lim\limits_{x \to 0} (gof)(x) \neq (gof)(c)$ అని చూపండి. ఇది 15.5.9 సిద్ధాంతానికి విరుద్ధంగా ఎందుకు ఉంటుందో తెల్పండి.

6. f, g లు $\mathbb{R}$ మీద నిర్వచింపబడినాయి. $c \in \mathbb{R}$ అనుకోండి. $\lim_{x \to c} f(x) = b$, b వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం అయిన $\lim_{x \to c} (gof)(x) = g(b)$ అని చూపండి.

7. $[0, 1]$ మీద f విచ్ఛిన్నం. f^2 అవిచ్ఛిన్నం అయ్యేటట్లు ఉదాహరణను తెల్పండి.

8. $\mathbb{R}$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం. $P = \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\}$. $c \in P$ అయిన $V_\delta(c) \subseteq P$ అయ్యేటట్లు δ-సామీప్యం $V_\delta(c)$ ఉంటుందని చూపండి.

9. $\mathbb{R}$ మీద f, g అవిచ్ఛిన్నాలు. $S = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq g(x)\}$. $(s_n) \subseteq S$, $\lim(s_n) = s$ అయిన $s \in S$ అని చూపండి.

10. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం ప్రతి x, y లకి $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$ అయితే

(a) $g(0) = 0$ లేక 1, $g(0) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \ (\forall\ x)$ అని చూపండి.

(b) $x \neq 0$ అయిన $g(-x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ అని చూపండి.

(c) $n \in Z$ అయిన $g(n) = (g(1))^n$ అని చూపండి.

(d) $\frac{m}{n}$ అకరణీయం అయిన $g\left(\frac{m}{n}\right) = (g(1))^{m/n}$ అని చూపండి.

(e) '0' వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం అయిన ప్రతి c వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

(f) ఏదైన ఒక $a \in \mathbb{R}$ కు $g(a) = 0$ అయిన ప్రతి x కి $g(x) = 0$ అని చూపండి.

11. c వద్ద f, g అవిచ్ఛిన్నాలు. ప్రతి x కి $h(x) =$ క.ఎ.హ. $\{f(x), g(x)\}$ అయిన $h(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$ c వద్ద h అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

అభ్యాసం 15.11.C:

1. $[0, 1]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం. $f(0) = f(1)$ అయిన $f(c) = f\left(c+\frac{1}{2}\right)$ అయ్యేటట్లు $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ఉంటుందని చూపండి.

2. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ అంతరంలో $x = \cos x$ సమీకరణానికి సాధన ఉంటుందని చూపండి. సమద్వి ఖండన పద్ధతి ప్రకారం దీని సాధనను ఉజ్జాయింపుగా దోషం 10^{-3} కంటే తక్కువ ఉండేటట్లు కనుక్కోండి.

3. $[1, 2]$ అంతరంలో $f(x) = 2\log x + \sqrt{x} - 2$కు మూలం ఉంటుందని చూపండి. దోషం 10^{-2} కంటే తక్కువ ఉండేటట్లు ఆ మూలాన్ని సమద్వి ఖండన పద్ధతి ద్వారా కనుక్కోండి.

4. $[0, 7]$ అంతరంలో $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$కు 5 మూలాలు ఉంటాయని చూపండి. సమద్వి ఖండన పద్ధతి ద్వారా ఈ అంతరంలో ఎన్ని మూలాలు గుర్తించవచ్చు.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

   (a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ అయిన $[0, \infty]$ మీద f పరిబద్ధం అని చూపండి.

   (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ అయిన $[-\infty, 0]$లో f పరిబద్ధం అని చూపండి.

   (c) (a), (b)లు రెండు జరిగితే $\mathbb{R}$ మీద f పరిబద్ధం అని చూపండి.

   (d) (c) నిజం అయినప్పుడు f కు గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలు ఉంటాయని చూపండి.

   (e) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ అయిన పై నియమాలను f తృప్తిపరుస్తుందని చూపి గ.ది.హ. $f(x)$, క.ఎ.హ. $f(x)$ కనుక్కోండి. $\mathbb{R}$ మీద f గరిష్ఠ దిగువ హద్దు, కనిష్ఠ ఎగువ హద్దులను f తీసుకుంటుందో లేదో పరిశీలించండి.

6. ప్రతి x కి $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ప్రమేయం $\mathbb{R}$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

7. ఇచ్చిన సమితుల మీద క్రింది ప్రమేయాలు ఏకరూప అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు కాదు అని చూపండి.

   (a) $f(x) = x^2,\ A = [0, \infty)$

   (b) $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ B = (0, \infty)$

8. $f(x) = x,\ g(x) = \sin x$ అయిన $\mathbb{R}$ మీద f, g ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నాలని చూపండి. కాని $\mathbb{R}$ మీద $f \cdot g$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం కాదు అని చూపండి.

9. $f, g, \mathbb{R}$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నాలు అయిన fog కూడా $\mathbb{R}$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

10. $A \subseteq \mathbb{R}$ మీద f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం A లోని ప్రతి x కి $|f(x)| \geq k > 0$ అయిన A మీద $\frac{1}{f}$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

అభ్యాసం 15.11.D:

(a) $\cos A - \cos B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$ సూత్రం ప్రకారం $0 \leq x < y \leq \pi/2$ అయిన $\cos y < \cos x$ అని చూపండి.

(b) $f(c) < 0$, x_0 వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన $x \in V_\delta(c)$ అయినప్పుడు $f(x) < 0$ అను ఫలితంనుపయోగించి $x_0 \in (0, \pi/2)$ కు $x_0^2 < \cos x_0$ అయిన $V_\delta(x_0) \leq \left(0, \pi/2\right)$ లో $x^2 < \cos x$ అని చూపండి.

(c) $h(x) =$ కనిష్ఠం $\left\{x^2, \cos x\right\}$ అయిన $\left[0, \pi/2\right]$ లో h అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

(d) x_0 వద్ద h కి కనిష్ఠ విలువ ఉంటే $0 < x_0 \leq \pi/2$ అని చూపండి.

$h(x_0) =$ కనిష్ఠం $\left\{h(x)/0 \leq x \leq \pi/2\right\}$, $h(x_0) = \cos x_0$ అయిన $h(x) = \cos x$ అయ్యేటట్లు $(0, \pi/2)$ లో $V_\delta(x_0)$ సామీప్యం ఉంటుందని చూపండి.

(e) పై దాని నుండి $x_0^2 \not< \cos x_0$ అని చూపండి.

(f) ఇదే విధంగా $x_0^2 \not> \cos x_0$ అని చూపండి.

(g) $h(x_0) =$ కనిష్ఠం $\left\{h(x)/0 \leq x \leq \pi/2\right\}$ అయిన $x_0^2 = \cos x_0$ అని చూపండి.

(h) $\left[0, \pi/2\right]$ అంతరంలో $f(x) = x^2 - \cos x$ ప్రమేయానికి మాధ్యమిక స్థాన సిద్ధాంతంనుపయోగించి $x_0^2 = \cos x_0$ అయ్యేటట్లు $\left(0, \pi/2\right)$ లో x_0 ఉంటుందని చూపండి.

15.12 నమూనా ప్రశ్నలు:

1. $f : A \to \mathbb{R},\ c \in A$. c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం

   $: x \in V_\delta(c) \Rightarrow f(x) \in V_\epsilon(f(c))$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\epsilon > 0$ కు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

2. $g(x) = [x] = n,\ n \in Z,\ n \le x < n+1$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం g ప్రతి పూర్ణాంకం వద్ద విచ్ఛిన్నం అని మిగిలిన సంఖ్యల వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

3. $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$

   $$g(0) = k \quad (k \in \mathbb{R})\text{గా నిర్వచిస్తే}$$

   '0' వద్ద g అవిచ్ఛిన్నం కాదు అని చూపండి.

4. $g(x) = 2x$ (x అకరణీయ సంఖ్య)

   $= x + 3$ (x కరణీయ సంఖ్య)గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం g అవిచ్ఛిన్నం అయ్యే x విలువలను కనుక్కోండి.

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}\ (x \ne 2) \cdot f$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అయ్యేటట్లు $f(2) = L$ వ్యవస్థితమవుతుందా?

6. A మీద f, g లు నిర్వచింపబడినాయి. $c \in A$ వద్ద f, g లు అవిచ్ఛిన్నాలు అయిన

   (a) c వద్ద f g అవిచ్ఛిన్నం అని,

   (b) $g(x) \ne 0\ (x \in A)$ అయిన c వద్ద $\dfrac{f}{g}$ అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

7. $f : A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $c \in A$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం. $f(A) \subseteq B, f(c)$ వద్ద $g : B \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం అయిన $h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$ గా నిర్వచింపబడిన $h = A \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం c వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

8. $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = \ell im\left(\dfrac{1}{x}\right)\quad (x \ne 0)$. $g(0) = 0$ గా నిర్వచిస్తే $(0, \infty)$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

9. $f(x) = x+1,\ g(1) = 0, g(x) = 2 \quad (x \neq 1)$ గా f, g లు $\mathbb{R}$ మీద నిర్వచింపబడితే 0 వద్ద gof అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

10. క్రింది ప్రమేయాలకు అవిచ్ఛిన్నతా బిందువులను కనుక్కోండి.

(i) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$

(ii) $g(x) = \cos\sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $f(x) = -1$ (x కరణీయ సంఖ్య)

$= 1$ (x కరణీయ సంఖ్య)

గా నిర్వచిస్తే ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య వద్ద f విచ్ఛిన్నమనీ, $|f|$ అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

12. $I = [a, b]$ ఒక పరిబద్ధ సంవృతాంతరం మీద f అవిచ్ఛిన్నం. I మీద f పరిబద్ధం అని చూపండి.

13. బొల్జానో ఇంటర్మీడియట్ మూల్య సిద్ధాంతాన్ని వ్రాసి నిరూపించండి.

14. $f : [0, 1] \to [0, 1]$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం. అయిన $f(x) = x$ అయ్యేటట్లు $[0, 1]$ లో ఒక x ఉంటుందని చూపండి.

15. I ఒక అంతరం. $f : I \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం అయిన $f(I)$ ఒక అంతరం అని చూపండి.

16. $P(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ బహుపదికి కనీసం రెండు వాస్తవ మూలాలు ఉంటాయని చూపండి. వాటి స్థానాలను గుర్తించండి.

17. ఏ వివృతాంతరాలకు $f(x) = x^2 \ (x \in \mathbb{R})$ ప్రమేయం వివృతాంతరాలకు పంపుతుందో పరిశీలించండి.

18. A మీద $f : A \to \mathbb{R}$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అయిన అది A మీద అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి. దీని విపర్యయం నిజమా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

19. $a > 0$ అయిన $[a, \infty)$ అంతరంలో $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

20. ఒక పరిబద్ధ సంవృతాంతరం I మీద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన అది I మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం అని చూపండి.

15.13 మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య - సాధన:

సమస్య: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ వ్యవస్థితం కాదు కాని $x \neq 0$ అయినప్పుడు $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ మరియు $g(0) = 0$ గా నిర్వచితమైన ప్రమేయం 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నమని చూపుము.

లక్ష్యం: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ వ్యవస్థితం కాదు. g, 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నం.

నిర్వచనాలు:

(1) $E \subseteq \mathbb{R}$, E కి c అవధి బిందువు. $f : E \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. ప్రతి ధన సంఖ్య $\in$ కి అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$, $x \in E$, $0 < |x - c| < \delta(\in)$ అయినప్పుడు $|f(x) - \ell| < \in$ అగునట్లుగా వుంటే $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అంటాము. దీనిని $x \to c$ అయినప్పుడు $f(x) \to \ell$ అని వ్రాస్తాము.

(2) $E \subseteq \mathbb{R}$, $c \in E$; $f : E \to \mathbb{R}$ ప్రతి ధన సంఖ్య $\in$ కి అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$, $x \in E$, $|x - c| < \delta(\in)$ అయినప్పుడు $|f(x) - f(c)| < \in$ అగునట్లుగా వుంటే c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అంటాము.

ఉపయోగపడే సిద్ధాంతాలు:

(1) $E \subseteq \mathbb{R}$, E కి c అవధి బిందువు. $f : E \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \ell$ అయితే c కి అభిసరించే E లోని ప్రతి అనుక్రమం (x_n) కి $\lim\limits_{n} f(x_n) = \ell$.

(2) **ఆర్కిమెడిస్ సూత్రం:** $x \in \mathbb{R}$ అయితే $nx > x$ అగునట్లు $\mathbb{N}$ లో n వుంటుంది.

సాధన:

(i) $\in > 0$, $N_\in > \frac{1}{\pi \in}$ అగునట్లు $\mathbb{N}$ లో $N_\in$ ఒక సంఖ్య (2 బట్టి) అనుకొనుము.

$n \geq N_\in \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\in} < \pi \in$. అందుచేత $\frac{1}{n\pi} < \in \qquad (n \geq N_\in)$

కాబట్టి $\lim \frac{1}{n\pi} = 0$.

(ii) $\in > 0,\ N_{\in}^{1} > \dfrac{1}{2\pi\in}$ అగునట్లు సహజ $N_{\in}^{1}$ అయితే $n \in \mathbb{N},\ n \geq N_{\in}^{1}$ అయినప్పుడు $n > \dfrac{1}{2\pi\in}$.

అందుచేత $4n + 1 > 4n > \dfrac{2}{\pi\in}$

$$\Rightarrow (4n+1)\frac{\pi}{2} > \frac{1}{\in} \Rightarrow \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}} < \in \cdot \left(n \geq N_{\in}^{1}\right)$$

అందుచేత $\ell im \dfrac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}} = 0$

$f(x) = \sin\dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ అనుకుంటే $\underset{n}{\ell im}\, f\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = 0$

మరియు $f\left(\dfrac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}\right) = \sin\,(4n+1)\dfrac{\pi}{2} = 1$ కనుక

$$\underset{n}{\ell im}\ f\left(\frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

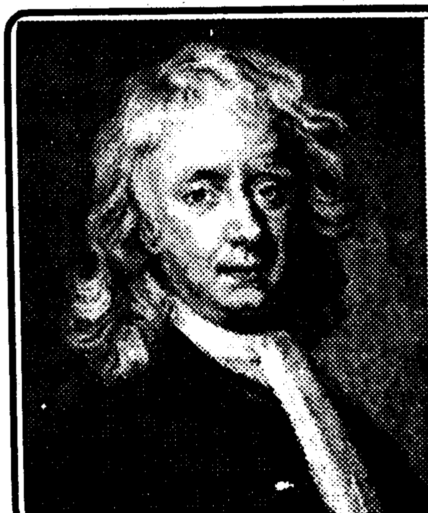
సిద్ధాంతము (1) నుండి $\underset{x \to 0}{\ell im}\, f(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

(ii) ప్రతి x కి $|g(x)| \leq |x|$ కాబట్టి $|x| < \in$ అయితే $|g(x) - g(0)| = |g(x)| < \in$

అందుచేత g, 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నం.

పాఠ్యభాగ రచయిత

K. సాంబశివరావు



సర్ ఐజాక్ న్యూటన్ (1643 - 1727):

ఐజాక్ న్యూటన్ తన తరానికి చెందిన మహోన్నత బ్రిటీష్ గణిత శాస్త్రవేత్త. అవకలన మరియు సమాకలన కలన గణితాలకి ఆయన పునాది వేసారు. కాంతి విజ్ఞాన శాస్త్రము మరియు గురుత్వాకర్షణలలో ఆయన సాధించిన ఫలితాల వలన ఆయన ప్రపంచ ప్రఖ్యాతి గాంచిన శాస్త్రవేత్తలలో ఒకరిగా పేర్కొనబడ్డారు.

పాఠము - 16

అవకలనం - I

16.1 లక్ష్యము:

ఈ అధ్యాయంలో అవకలనం భావన ప్రవేశపెట్టుట జరిగినది. అది అవిచ్ఛిన్నం మీద ఏ విధంగా ఆధారపడినదో , పరేఖీయ ధర్మాలు, గొలుసు నియమం, గరిష్ట, కనిష్ట మూల్యము, మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం, అవకలనానికి మధ్యంతర సిద్ధాంతం చర్చించబడుతుంది. ఉదాహరణల ద్వారా అవకలన అనువర్తనాలు చర్చించబడినవి.

16.2 అంశాలక్రమము:

16.3 ఉపోద్ఘాతము

16.4 నిర్వచనం మరియు ప్రాథమిక ధర్మాలు

16.5 కేరథోడరీ సిద్ధాంతం మరియు గొలుసు నియమం

16.6 మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాలు

16.7 ఉదాహరణలు మరియు అనువర్తనాలు

16.8 S.A.Q.ల సమాధానాలు

16.9 సారాంశము

16.10 సాంకేతిక పదాలు

16.11 అభ్యాసం మరియు సమాధానాలు

16.12 నమూనా ప్రశ్నలు

16.13 ప్రయోగాత్మక నమూనా ప్రశ్న - జవాబు

సర్ ఐజాక్ న్యూటన్ (1643 - 1727):

ఐజాక్ న్యూటన్ తన తరానికి చెందిన మహోన్నత బ్రిటీష్ గణిత శాస్త్రవేత్త. అవకలన మరియు సమాకలన కలన గణితాలకి ఆయన పునాది వేసారు. కాంతి విజ్ఞాన శాస్త్రము మరియు గురుత్వాకర్షణలలో ఆయన సాధించిన ఫలితాల వలన ఆయన ప్రపంచ ప్రఖ్యాతి గాంచిన శాస్త్రవేత్తలలో ఒకరిగా పేర్కొనబడ్డారు.

పాఠము - 16

అవకలనం - I

16.1 లక్ష్యము:

ఈ అధ్యాయంలో అవకలనం భావన ప్రవేశపెట్టుట జరిగినది. అది అవిచ్ఛిన్నం మీద ఏ విధంగా ఆధారపడినదో , సరేఖీయ ధర్మాలు, గొలుసు నియమం, గరిష్ట, కనిష్ట మూల్యము, మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం, అవకలనానికి మధ్యంతర సిద్ధాంతం చర్చించబడుతుంది. ఉదాహరణల ద్వారా అవకలన అనువర్తనాలు చర్చించబడినవి.

16.2 అంశాలక్రమము:

16.3 ఉపోద్ఘాతము

16.4 నిర్వచనం మరియు ప్రాథమిక ధర్మాలు

16.5 కేరథోడరీ సిద్ధాంతం మరియు గొలుసు నియమం

16.6 మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాలు

16.7 ఉదాహరణలు మరియు అనువర్తనాలు

16.8 S.A.Q.ల సమాధానాలు

16.9 సారాంశము

16.10 సాంకేతిక పదాలు

16.11 అభ్యాసం మరియు సమాధానాలు

16.12 నమూనా ప్రశ్నలు

16.13 ప్రయోగాత్మక నమూనా ప్రశ్న - జవాబు

1.3 ఉపోద్ఘాతము:

వక్రాలను కొన్ని జ్యామితీయ నియమాలను పాటించే బిందు పథంగాను, స్పర్శరేఖని జ్యామితీయ నిర్మాణం ద్వారాను వర్ణించడం పరిపాటి. ఒక అంతరం I మీద ప్రమేయం f రేఖా చిత్రం మీది బిందువు $(c, f(c))$తో దీని ప్రక్కన గల బిందువు $(x \ \ f(x)) \quad (x \in I)$లను కలిపే జ్యా యొక్క వాలు

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ప్రమేయం ϕకి c వద్ద Rలో అవధి వుంటే fకి c వద్ద స్పర్శరేఖ వుందంటాము.

$\lim\limits_{x \to c} \phi(x) = \ell$ అయితే ℓ వాలుగా $(c, f(c))$ నుండి పోయే సరళరేఖని c వద్ద f స్పర్శరేఖ అంటాము. ఈ జ్యామితీయ వివరణ అవకలనం నిర్వచనాన్కి దారితీస్తుంది.

ఒక వక్రం గరిష్ట, కనిష్ట బిందువులను కనుగొనుటలో అవకలనం ఆవశ్యకత పై రీ - డి - ఫెర్మా వివరించగా 1660 దశకంలోని రెండో భాగంలో వక్రానికి స్పర్శరేఖలకు చరరాశి వేగంకి మధ్య గల సంబంధం సర్ ఇజాక్ న్యూటన్ చాటి చెప్పారు. వక్రాల కింది విస్తీర్ణాల గణనానికి ఆవకలనానికి విలోమ ప్రక్రియగా వుపయోగించే విశిష్టమైన పద్ధతిని పరస్పరం స్వతంత్రంగా న్యూటన్ లెబ్నిజ్‌లు కనుగొనుట అతి ముఖ్యమైన అంశం. ఈ భావనే అవకలన సమాకలన వాదాలకి పునాది వేసినది.

16.4 నిర్వచనాలు, ప్రాథమిక ధర్మాలు:

16.4.1 నిర్వచనం: Rలో I అంతరం, $c \in I, f : I \to R, L \in R$. ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా, $0 < |x - c| < \delta$ పాటించే I లోని ప్రతి xకి

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \in$$

అగునట్లు $\delta(\in) > 0$ వ్యవస్థితమైతే c వద్ద f అవకలనీయమనీ, L, c వద్ద f అవకలనమనీ అంటాము.

L బదులుగా $f^1(c)$ అని వ్రాస్తాము.

$\phi : I - \{c\} \to R, \ \phi(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$గా నిర్వచించిన c వద్ద f అవకలనీయత c వద్ద ϕ అవధి వ్యవస్థతకి తుల్యము. ఈ సందర్భంలో $f^1(c) = L = \lim\limits_{x \to c} \phi(x)$.

I లోని ప్రతి x వద్ద f అవకలనీయమైతే I మీద f అవకలనీయమనీ $x \to f^1(x)$ f వ్యుత్పన్న ప్రమేయమనీ అవకలని అనీ అంటాము.

సంకేతం: $f^1(c)$ ని $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=c}$, $D(f)(c)$ లతో సూచిస్తాము.

16.4.2 ఉదాహరణ:

(a) $f(x) = x^2$ అని $f : R \to R$ నిర్వచిద్దాము.

R లోని ప్రతి x కి $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + 0) = 2x$$

అందుచేత R లో f అవకలనీయం, $f^1(x) = 2x$.

(b) $k \in R$, ప్రతి x కి $f(x) = k$ అను స్థిర ప్రమేయం అవకలనీయం మరియు $f^1(x) = 0 \ \forall \ x \in R$,

$c \in R$, $x \neq c$ అయిన $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{k - k}{x - c} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$$

$\therefore$ స్థిర ప్రమేయం R మీద అవకలనీయం మరియు ప్రతి $x \in R$ కు $f^1(x) = 0$

(c) $x > 0$ అయిన $h(x) = \sqrt{x}$

$c \neq 0$, $0 < x \neq c$ అయిన $\frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x - c} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c}\left(\frac{h(x)-h(c)}{x-c}\right)=\lim_{x\to c}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

$\therefore$ c వద్ద h అవకలనీయం మరియు $h^1(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$

(d) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ (x>0)$

$c>0,\ x>0,\ x\neq c$ అయిన

$$\frac{h(x)-h(c)}{x-c}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{c}}}{x-c}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{x}}{\sqrt{cx}\,(x-c)}=-\frac{1}{\sqrt{cx}\left(\sqrt{x}+\sqrt{c}\right)}$$

$$h^1(c)=\lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}-\frac{1}{\sqrt{cx}\left(\sqrt{x}+\sqrt{c}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{c^2}\cdot 2\sqrt{c}}=-\frac{1}{2c\sqrt{c}}$$

16.4.3 సిద్ధాంతం: I ఒక అంతరం. $c\in I$ వద్ద $f:I\to \mathbb{R}$ అవకలనీయ ప్రమేయం అయితే c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

ఉపపత్తి: $x\in I,\ x\neq c$ అయిన $\phi(x)=\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$\Rightarrow I-\{c\}$ మీద ϕ నిర్వచింపబడినది మరియు c బిందువు $I-\{c\}$కి అవధి బిందువు.

$\Rightarrow \phi(x)(x-c)=f(x)-f(c)$ మరియు $\lim_{x\to c}\phi(x)=\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=f^1(c)$

మరియు $\lim_{x\to c}(x-c)=0$

కావున $\lim_{x\to c}\left(f(x)-f(c)\right)=\lim_{x\to c}\phi(x)\,(x-c)$

$$= \lim_{x \to c} \phi(x) \cdot \lim_{x \to c} (x - c) = f^1(c) \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$\Rightarrow$ c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం

16.4.4 ఉప సిద్ధాంతం: $f : I \to R$ ప్రమేయం అంతరం I మీద అవకలనీయం అయితే f అవిచ్ఛిన్నం.

గమనిక: సిద్ధాంతము 16.4.3 యొక్క విపర్యము నిజము కాదు.

c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన c వద్ద f అవకలనీయం కానక్కరలేదు.

ఉదాహరణ: $f(x) = |x| \ \forall \ x \in R$.

$|x| < \in > 0$ అయినప్పుడు $|f(x) - f(0)| = |x| < \in$

అందుచేత ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా $\delta(\in) = \in$ గా తీసుకోవచ్చును.

$\Rightarrow 0$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

$x \neq 0$ అయిన $\phi(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} \phi(x) = 1, \ \lim_{h \to 0-} \phi(x) = -1$$

$\Rightarrow 0$ వద్ద f అవకలనీయం కాదు.

ఉదాహరణ: $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\frac{1}{x}$$

$x \neq 0$ అయినప్పుడు $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ప్రమేయం '0'కు అభిసరణ చెందదు కావున '0' వద్ద f అవకలనీయం కాదు.

$\in > 0,\ f(\in) = \in, \left|x - 0\right| < \delta(\in)$ అనుకుందాం.

మరియు $\lim\limits_{x \to c} (x - c) = 0$ కావున $\lim\limits_{x \to c} f(x) - f(c) = \lim\limits_{x \to c} \phi(x)(x - c)$

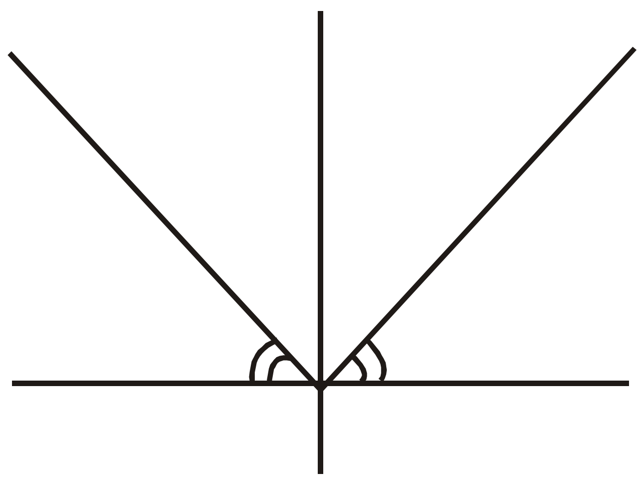
$= \lim\limits_{x \to c} \phi(x) \lim\limits_{x \to c} (x - c) = f^1(c) \cdot 0 = 0 \cdot \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ కావున c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము.

16.4.4 ఉప సిద్ధాంతము: $f : I \to R,\ I$ మీద అవకలనీయమైతే అవిచ్ఛిన్నము.

ఉపపత్తి: స్పష్టము

గమనిక: **16.4.3** విలోమం నిజం కాదు, ఒక బిందువు c వద్ద ప్రమేయం f అవిచ్ఛిన్నమైనప్పటికీ అవకలనీయం కానక్కరలేదని కింది వుదాహరణ ద్వారా గమనించవచ్చును.

16.4.4 (a) ఉదాహరణ: $f(x) = |x|,\ 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం. అవకలనీయం కాదు.



g = | x |

$\in > 0, |x| < \in \Rightarrow |x| < \in$ కావున ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta(\in) = \in$ గా ఎంపిక చేస్తే $0 \le |x| < \delta(\in) \Rightarrow |x| < \in$ దీన్నించి $|x|$ ప్రమేయం 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నము.

$x > 0$ అయితే $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1,\ x < 0$ అయితే $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{-x}{x} = -1$

కావున $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ మరియు $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$

దీన్నిబట్టి $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ వ్యవస్థితం కాదు కావున 0 వద్ద అవకలనీయం కాదు.

16.4.4 (b) ఉదాహరణ: $x \neq 0$ అయితే $f(x) = x \sin \frac{1}{x} \left(x \neq 0 \right),\ f(0) = 0$ అని వ్రాయుము.

$x \neq 0$ అయితే $\frac{f(x)}{x} = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ వ్యవస్థితం కానందున 0 వద్ద

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ 0 వద్ద సమ అవకలనీయం కాదు

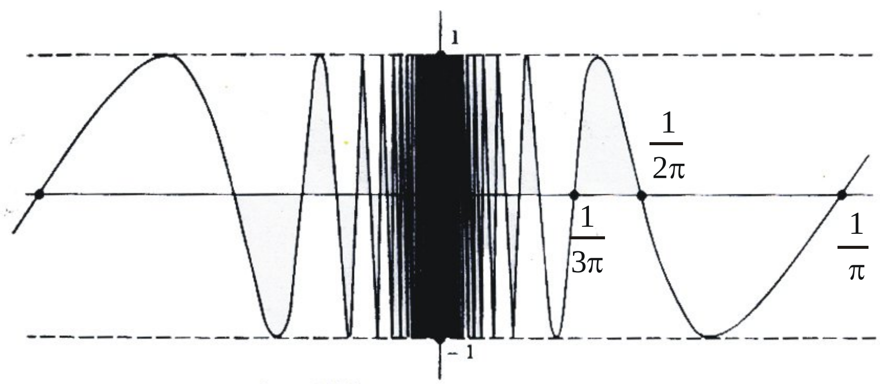


Figure 16.4.4(b) $g(x) = \sin(1/x) \ (x \neq 0)$

$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$ అయినందున

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x > 0 \text{ అయితే } 1 \\ x < 0 \text{ అయితే } -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1, \ \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

$\lim_{x \to 0 \pm} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ వ్యవస్థితం కాదు.

$$\Rightarrow \left| f(x) - f(0) \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \in$$

కావున '0' వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

16.4.5 సిద్ధాంతం: c వద్ద $f : I \to R, \ g : I \to R$ లు అవకలనీయ ప్రమేయాలు అయిన $f + g, f - g$ $'c'$ వద్ద అవకలనీయం మరియు

(i) $(f + g)^1 (c) = f^1 (c) + g^1 (c)$

(ii) $(f - g)^1 (c) = f^1 (c) - g^1 (c)$

ఉపపత్తి: f, g c వద్ద అవకలనీయం కావున

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^1(c), \ \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = g^1(c)$$

$x \neq c, \ x \in I$ అయిన $\frac{(f + g)(x) - (f + g)(c)}{x - c}$

$$= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(c)}{x - c}$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

$$= f^1(c) + g^1(c)$$

$\Rightarrow$ 'c' వద్ద $f + g$ అవకలనీయం మరియు $(f+g)^1(c) = f^1(c) + g^1(c)$

ఇదే విధంగా (ii)ను నిరూపించవచ్చును.

16.4.6 ఉప సిద్ధాంతం: $n \in \mathbb{N}$ ప్రతి $f_i : I \to R \; (1 \le i \le n)$, $c \in I$ వద్ద అవకలనీయం అయితే $f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_n$ ప్రమేయం c వద్ద అవకలనీయం మరియు

$$(f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_n)^1(c) = f_1^1(c) + f_2^1(c) + \cdots\cdots + f_n^1(c)$$

ఉపపత్తి: n మీద గణితాను గమనం ఉపయోగించి నిరూపిస్తాం. $n = 2$ కి ఈ ప్రతిపాదన నిజం.

$f_1, f_2, \cdots\cdots, f_{n+1}$ ప్రమేయాలలో ప్రతి ప్రమేయం c వద్ద అవకలనీయమైనప్పుడు

$g = f_2 + \cdots\cdots + f_{n+1}$ అనుకోండి. గణితాను గమనం ప్రకారం, c వద్ద g అవకలనీయం మరియు $g^1(c) = (f_2 + \cdots\cdots + f_{n+1})^1(c) = f_2^1(c) + \cdots\cdots + f_n^1(c)$, f_1, g, c వద్ద అవకలనీయం కావున **16.4.5** ప్రకారం, $f_1 + g = f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_{n+1}$. c వద్ద అవకలనీయం మరియు

$$(f_1 + \cdots\cdots + f_{n+1})^1(c) = (f_1 + g)^1(c) = f_1^1(c) + g^1(c)$$

$$= f_1^1(c) + f_2^1(c) + \cdots\cdots + f_n^1(c)$$

n కి ఇచ్చిన ప్రతిపాదన నిజమైతే $(n+1)$ ప్రమేయం $n+1$కు నిజం కాబట్టి

గణితాను గమనం ప్రకారం ప్రతి n కి నిజం .

16.4.7 ఉప సిద్ధాంతం: $f_i : I \to R \; (1 \le i \le n)$ ప్రమేయం I మీద అవకలనీయం అయిన $f_1 + \cdots\cdots + f_n$ I మీద అవకలనీయం మరియు $(f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_n)^1 = f_1^1 + \cdots\cdots + f_n^1$.

ఉపపత్తి: I లో ప్రతి c వద్ద ప్రతి f_i అవకలనీయం అయినందన పై ఉప సిద్ధాంతం ప్రకారం, $f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_n$ ప్రతి c వద్ద అవకలనీయం కాబట్టి $f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_n$, I మీద అవకలనీయం.

$x \in I$ అయిన $(f_1 + \cdots\cdots + f_n)^1(n) = f_1^1(n) + \cdots\cdots + f_n^1(n)$

$$= \left(f_1^1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + f_n^1\right)(x).$$

ఇది ప్రతి $x \in I$కు నిజం కావున $\left(f_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + f_n\right)^1 = f_1^1 + f_2^1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + f_n^1$

గమనిక: 16.4.6లో ఒక బిందువు వద్ద అవకలనీయత చర్చిస్తే 16.4.7 ప్రమేయాల అవకలనీయత వివరిస్తుంది.

16.4.8 సిద్ధాంతం: $c \in I$ ఎవద్ద $f : I \to R$ అవకలనీయం, $k \in R$ అయిన $k \; f$ $'c'$ వద్ద అవకలనీయం మరియు $(k \; f)^1 (c) = k \cdot f^1 (c)$

ఉపపత్తి: $x \neq c$ అయిన $\phi(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ అని వ్రాయుము.

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \phi(x) = f^1(c) \text{ కావున } \Rightarrow \lim_{x \to c} k \; \phi(x) = k \cdot f^1(c)$$

అందుచేత $$\lim_{x \to c} \frac{k\, f(x) - k\, f(c)}{x - c} = k \cdot f^1(c)$$

కావున c వద్ద $k \; f$ అవకలనీయం మరియు $(k \; f)^1 (c) = k \cdot f^1 (c)$

16.4.9 సిద్ధాంతం: Iలో c వద్ద $f : I \to R$, $g : I \to R$ అవకలనీయం అయిన c వద్ద $f \; g$ అవకలనీయం మరియు $(f \; g)^1 (c) = f(c) \cdot g^1(c) + f^1(c) \cdot g(c)$.

ఉపపత్తి: $x \neq c$, $x \in I$ అయిన

$$\frac{(f \; g)(x) - (f \; g)(c)}{x - c} = \frac{f(x)\left(g(x) - g(c)\right)}{x - c} + \frac{g(c)\left(f(x) - f(c)\right)}{x - c}$$

c వద్ద f, g అవకలనీయం కావున

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^1(c), \quad \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = g^1(c)$$

c వద్ద f అవకలనీయం కావున c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

అందుచేత $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

కావున $\lim_{x \to c} \dfrac{(f\ g)(x) - (f\ g)(c)}{x - c} = f(c)\, g^1(c) + g(c) \cdot f^1(c)$

$\Rightarrow c$ వద్ద $f\ g$ అవకలనీయం మరియు $(f\ g)^1(c) = f(c) \cdot g^1(c) + g(c) \cdot f^1(c)$

16.4.10 ఉప సిద్ధాంతం: $n \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n, f_i : I \to R$ ప్రమేయం c వద్ద అవకలనీయం అయిన $f_1\ f_2 \cdots\cdots f_n$ c వద్ద అవకలనీయం మరియు

$$(f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n)^1(c) = \sum_{i=1}^{n} \left(f_1(c) \cdot f_2(c) \cdots\cdots f_i^1(c) \cdots\cdots f_n(c)\right)$$

సూచన: 16.4.6లో వలె గణితాను గమనం ఉపయోగించి నిరూపించవలెను. (అభ్యాసం 16.12లో 8వ లెక్క చూడుము.)

16.4.11 ఉప సిద్ధాంతం: $n \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n, f_i : I \to R$ ప్రమేయం I మీద అవకలనీయం అయిన $f_1\ f_2 \cdots\cdots f_n$ కూడ I మీద అవకలనీయం.

సూచన: 16.4.10 ఉపయోగించుము. (అభ్యాసం 16.12లో 9వ లెక్కచూడుము.)

16.4.12 ఉప సిద్ధాంతం: I వద్ద $f : I \to R$ అవకలనీయం $n \in \mathbb{N}$ అయిన c వద్ద f^n అవకలనీయం మరియు $(f^n)^1(c) = n \cdot f^{n-1}(c) \cdot f^1(c)$.

ఉపపత్తి: 16.4.10లో $f_1 = f_2 = \cdots\cdots = f_n = f$ గా తీసుకోండి.

16.4.13 సిద్ధాంతం: Iలోని c వద్ద $f : I \to R$ అవకలనీయం, $f(c) \ne 0$ అయినప్పుడు $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ గా

$V_\delta(c) \cap I$ మీద నిర్వచిస్తే c వద్ద $\dfrac{1}{f}$ అవకలనీయం మరియు $\left(\dfrac{1}{f}\right)^1(c) = \dfrac{-f^1(c)}{(f(c))^2}$

ఉపపత్తి: c వద్ద f అవకలనీయం కావున c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం $f(c) \ne 0$ కావున $x \in V_\delta(c) \cap I$ అయినప్పుడు $f(x) \ne 0$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

కాబట్టి $V_\delta(c) \cap I$ మీద $\dfrac{1}{f}$ నిర్వచింపగలము. $x \in V_\delta(c) \cap I,\ x \ne c$ అయిన

$$\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(c)}{x-c}=\frac{f(c)-f(x)}{(x-c)\,f(x)\cdot f(c)}$$

$$=-\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\frac{1}{f(x)\cdot f(c)}$$

c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కావున $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

$f(c)\neq 0$ కావున $\lim\limits_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(c)}$

కాబట్టి $\lim\limits_{x\to c}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(c)}{x-c}=\lim\limits_{x\to c}-\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{f(c)}$

$$=-\frac{1}{f(c)}\cdot f^1(c)\cdot\frac{1}{f(c)}$$

$$=-\frac{f^1(c)}{(f(c))^2}$$

16.4.14 సిద్ధాంతం: $c\in I$ వద్ద $f:I\to R$, $g:I\to R$ లు అవకలనీయాలు, $g(c)\neq 0$ అయిన c యొక్క సామీప్యంలో నిర్వచింపబడిన $q=\frac{f}{g}$ ప్రమేయం c వద్ద అవకలనీయం మరియు

$$q^1(c)=\left(\frac{f}{q}\right)^1(c)=\frac{f^1(c)\,g(c)-f(c)\cdot g^1(c)}{(g(c))^2}$$

ఉపపత్తి: $g(c)\neq 0$ కావున $x\in V_\delta(c)\cap I$ అయినప్పుడల్లా $g(x)\neq 0$ కావున $x\in V_\delta(c)\cap I$ అయినప్పుడల్లా $g(x)\neq 0$ అయ్యేటట్లు $V_\delta(c)$ ఉంటుంది.

$x\in V_\delta(c)\cap I$ అయిన $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\in R$

$$\frac{q(x)-q(c)}{x-c}=\frac{\left(\frac{f}{q}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(c)}{x-c}=\frac{f(x)\cdot g(c)-f(c)\cdot g(x)}{(x-c)\,g(x)\cdot g(c)}$$

$$=\frac{f(x)\left[g(c)-g(x)\right]+g(x)\left[f(x)-f(c)\right]}{(x-c)\,g(x)\cdot g(c)}$$

$$=\frac{f(x)}{g(x)\cdot g(c)}\cdot\frac{g(c)-g(x)}{x-c}+\frac{1}{g(c)}\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}\cdot\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f^1(c)$$

$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}=g^1(c)$ కావున

$$\lim_{x\to c}\frac{q(x)-q(c)}{x-c}=\frac{f(c)}{\left(g(c)\right)^2}\left(-g^1(c)\right)+\frac{1}{g(c)}\cdot f^1(c)$$

$$=\frac{f^1(c)\cdot g(c)-f(c)\cdot g^1(c)}{\left(g(c)\right)^2}$$

$\Rightarrow q=\dfrac{f}{g}$ ప్రమేయం c వద్ద అవకలనీయం మరియు $\left(\dfrac{f}{g}\right)^1(c)=\dfrac{f^1(c)\;g(c)-f(c)\cdot g^1(c)}{\left(g(c)\right)^2}$

16.4.15 అనువర్తనం: $G(x)=\sin x,\ C(x)=\cos x$ అనుకోండి.

$G^1(x)=\cos x,\ C^1(x)=-\sin x$ అని అంగీకరించి,

$$\left.\begin{array}{r}D(\tan x)=\sec^2 x\\ D(\sec x)=\sec x\cdot\tan x\end{array}\right\}\ x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in Z$$ మరియు

$$\left.\begin{aligned} D(\cot x) &= -(\operatorname{cosec} x)^2 \\ D(\operatorname{cosec} x) &= -\operatorname{cosec} x \cot x \end{aligned}\right\} x \neq k\pi,\ k \in Z$$ అని చూపండి.

$$D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(D \sin x)\cos x - \sin x\, D(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = (\sec x)^2,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$D(\sec x) = D\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{0 - 1(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \sec x \cdot \tan x\ ;\ x \neq (2k+1)\pi/2$$

ఇదే విధంగా $$\left.\begin{aligned} D(\cot x) &= -(\operatorname{cosec} x)^2 \\ D(\operatorname{cosec} x) &= -\operatorname{cosec} x \cot x \end{aligned}\right\} x \neq k\pi$$

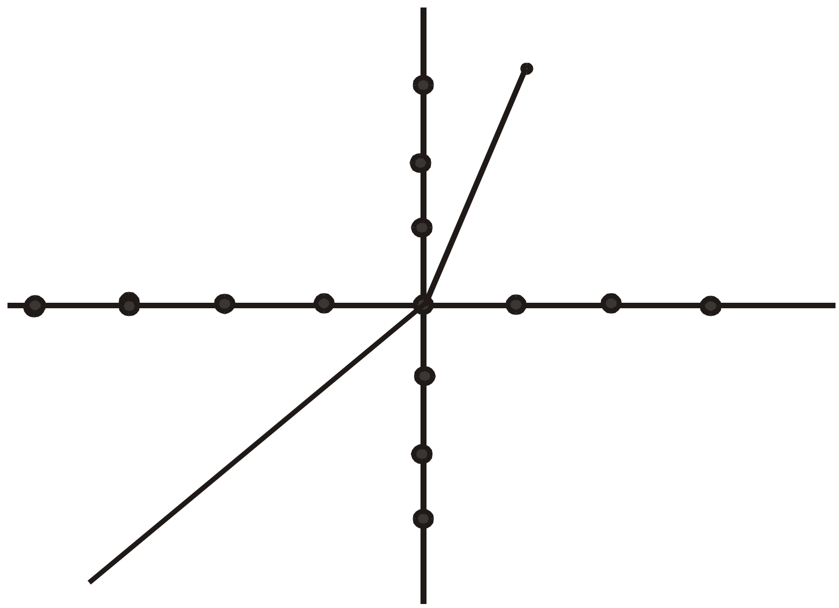
అని నిరూపించవచ్చును.

16.4.16 ఉదాహరణలు:

(a) $g(x) = 2x + |x|$ రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి మరియు '0' తప్ప మిగిలిన విలువల వద్ద g అవకలనీయం అని చూపండి. $x \neq 0$ అయిన $g^1(x)$ కనుక్కోండి.

$$g(x) = \begin{cases} 3x & (x > 0) \\ x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

మూల బిందువు 0 వద్ద g మలుపు తిరగడం సరళంగా లేదని ప్రక్క పేజీలోని రేఖా చిత్రంలో గమనించండి.



$g(x)$ రేఖా చిత్రం

$x > 0$ అయిన $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 3$

$x < 0$ అయిన $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 1$

$\Rightarrow$ 0 వద్ద g అవకలనీయం కాదు. మిగిలిన బిందువుల వద్ద g అవకలనీయమని తేలికగా చూపవచ్చును. $x > 0$ అయితే, $g^1(x) = 3$, $x < 0$ అయితే $g^1(x) = 1$ అని చూపవచ్చును.

(b) $r > 0$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = x^r \sin\dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$, $g(0) = 0$ గా నిర్వచిస్తే r యొక్క ఏ విలువలకు 0 వద్ద g అవకలనీయం?

$x \neq 0$ అయిన $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x^{r-1} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

$r > 1$ అయిన $\lim\limits_{x \to 0} x^{r-1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} x^{r-1} \cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow$ 0 వద్ద g అవకలనీయం మరియు $g^1(0) = 0$

$r = 1$ అయిన $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ వ్యవస్థితం కాదు కాబట్టి 0 వద్ద g అవకలనీయం కాదు.

$0 < r < 1$ అయిన $\lim\limits_{x \to 0+} x^{r-1} = \infty$ మరియు

$x_n = \dfrac{1}{(4n+1)\pi/2}$ అయిన $\sin y_{x_n} = 1$ కావున

$$\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r-1} \left(\frac{1}{4n+1}\right)^{r-1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-r} (4n+1)^{1-r}$$

$$\Rightarrow \lim_{x_n \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-r} (4n+1)^{1-r} = \infty$$

$y_n = \dfrac{1}{n\pi}$ అయిన $\dfrac{g(y_n) - g(0)}{y_n - 0} = \left(\dfrac{1}{n\pi}\right)^{r-1} \cdot \sin n\pi = 0$

$$\Rightarrow \lim_{y_n \to 0} \frac{g(y_n) - g(0)}{y_n - 0} = 0$$

$\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ అవధి బిందువు '0' వద్ద అభిసరణ చెందదు.

కావున 0 వద్ద g అవకలనీయం కాదు.

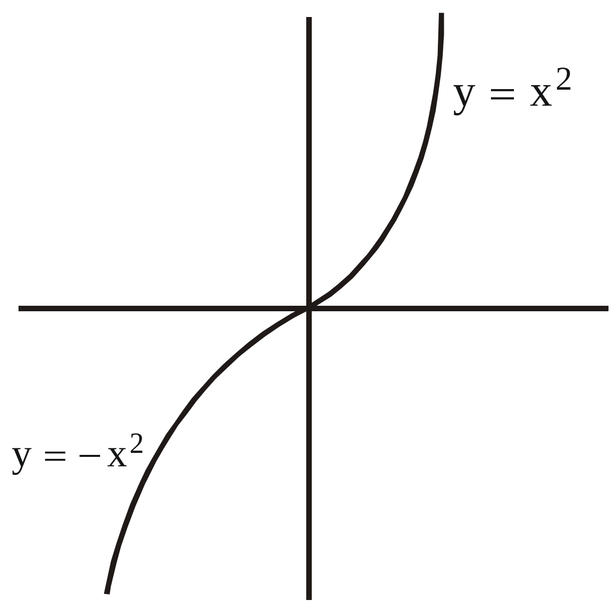
(c) $h(x) = x\,|x|$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం h యొక్క రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి. దాని అవకలనీయతను పరిశీలించండి.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

$x > 0$ అయిన $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = x$

$x < 0$ అయిన $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = -x$

$x \neq 0$ అయిన $\left|\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}\right| = |x|$



$h(x)$ రేఖా చిత్రం

$\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ కావున $\lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}\right| = 0$

$\Rightarrow 0$ వద్ద h అవకలనీయం

$$h^1(x) = \begin{cases} 2x & (x > 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$$

అని తేలికగా చూపవచ్చును.

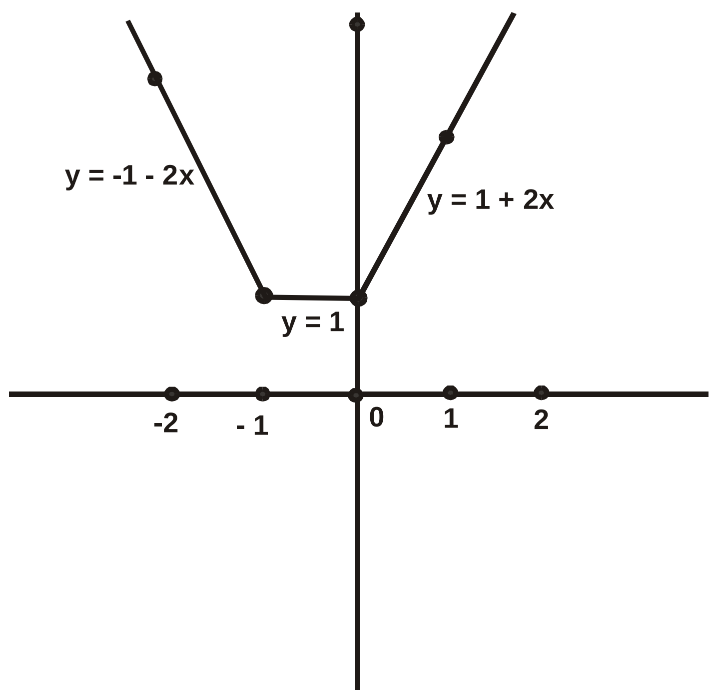
R మీద h అవకలనీయం మరియు $h^1(x) = 2|x|$.

(d) $f(x) = |x| + |x+1|$ యొక్క అవకలనీయతను పరిశీలించండి.

$x \geq 0$ అయిన $f(x) = 2x + 1$

$-1 \leq x \leq 0$ అయిన $f(x) = -x + x + 1 = 1$

$x < -1$ అయిన $f(x) = -x - 1 - x = -1 - 2x$



f రేఖా చిత్రం

గ్రాఫ్ నుండి 0, -1ల వద్ద రేఖా చిత్రం గమనం మారుతుంది.

$x > 0$ అయిన $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{2x + 1 - 1}{x} = 2$

$-1 < x < 0$ అయిన $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1 - 1}{x} = 0$

$-1 < x < \infty,\ x \neq 0$ అయిన $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} 2 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

కావున $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2,\ \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ అవధి బిందువు 0 కు అభిసరణ చెందదు. కావున 0 వద్ద f అవకలనీయం కాదు.

$-1 < x < 0$ అయిన $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{1-1}{x+1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -1+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = 0$

$n < -1$ అయిన $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{-1-2x-1}{x+1} = -2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -1-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = -2$

$\therefore\ -1$ వద్ద f అవకలనీయం కాదు. మరియు మిగిలిన బిందువుల వద్ద f అవకలనీయం.

$f^1(x) = \begin{cases} 2 & (x > 0) \\ 0 & (-1 < x < 0) \\ -2 & (x < -1) \end{cases}$ అని తేలికగా చూపవచ్చును.

16.5 కేరథోడరీ సిద్ధాంతం మరియు గొలుసు నియమం:

16.5.1 కేరథోడరీ సిద్ధాంతం: అంతరం I మీద f నిర్వచింపబడి Iలో c వద్ద f అవకలనీయం కావటానికి c వద్ద అవిచ్ఛిన్నమౌతూ Iలోని ప్రతి xకి $\phi(x)(x-c) = f(x) - f(c)$ అయ్యేటట్లు ప్రమేయం $\phi : I \to R$ వ్యవస్థితం కావడం ఆవశ్యకం, పర్యాప్తం. ఈ సందర్భంలో $\phi(c) = f^1(c)$.

ఉపపత్తి: సందర్భం 1: c వద్ద f అవకలనీయం అనుకుందాం.

$x \in I - \{c\}$ అయిన $\phi(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ మరియు $\phi(c) = f^1(c)$గా వ్రాయండి.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to c} \phi(x) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^1(c) = \phi(c)$ కావున c వద్ద ϕ అవిచ్ఛిన్నం.

సందర్భం 2: $x \in I$ అయిన $\phi(x)(x - c) = f(x) - f(c)$ అయ్యేటట్లు ϕ అను ప్రమేయం ఉంటుంది అనుకుందాం.

c వద్ద ϕ అవిచ్ఛిన్నం కావున $\phi(c) = \lim\limits_{x \to c} \phi(x)$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

కావున c వద్ద f అవకలనీయం మరియు $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{\phi(x) - \phi(c)}{x - c} = f^1(c)$

అందుచేత c వద్ద f అవకలనీయం మరియు $f^1(c) = \phi(c)$.

16.5.2 ఉదాహరణ: $f(x) = x^3,\ c \in \mathsf{R}$ అయితే

$f(x) - f(c) = \left(x^3 - c^3\right)\left(x^2 + x\,c + c^2\right)$

ϕ ప్రతి xకి $\phi(x) = x^2 + x\,c + c^2$ అని వ్రాయుము.

$\lim\limits_{x \to c} \phi(x) = c^2 + c^2 + c^2 = 3c^2 = \phi(c)$ కాబట్టి c వద్ద ϕ అవిచ్ఛిన్నం

మరియు $\phi(x)(x - c) = f(x) - f(c)$ కావున **16.5.1** నుండి c వద్ద f అవకలనీయం.

అంతేకాక $f^1(c) = \phi(c) = 3c^2$

16.5.3 ఉదాహరణ: $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$, c వద్ద అవకలనీయము మరియు $f(c) = 0$ అని ఇచ్చినప్పుడు c వద్ద $|f|$ అవకలనీయం కావడాన్కి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $f^1(c) = 0$ అని చూపుము.

సాధన: c వద్ద f అవకలనీయం, $f(c)=0$ కావున 16.5.1 నుండి R మీద ఒక ప్రమేయం ϕ, c వద్ద అవిచ్ఛిన్నమౌతూ $x \neq c$ అయినప్పుడు $(x-c)\ \phi(x)=f(x)-f(c)=f(x)$ అగునట్లుగా వ్యవస్థితం. అంతేకాక $\phi(c)=f^1(c)$.

$f^1(c)=0$ అయితే $x \neq c$ అయినప్పుడు $\psi(x)=\dfrac{|f(x)|}{x-c}$, $\psi(c)=0$ అని వ్రాయండి.

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x-c} = \lim_{x\to c} \phi(x)=\phi(c)=f^1(c)=0$$ కాబట్టి,

$$\lim_{x\to c} \psi(x) = \lim_{x\to c} \frac{|f(x)|}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{|f(x)-f(c)|}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{|f(x)-f(c)|}{|x-c|}\cdot\frac{|x-c|}{x-c}=0$$

$\lim\limits_{x\to c} \psi(x)=0=\psi(c)$ కాబట్టి c వద్ద ψ అవిచ్ఛన్నము.

16.5.1 లోని ϕ నియమాలు ψ పాటిస్తోంది కాబట్టి $|f|$, c వద్ద అవకలనీయం మరియు $(|f|)^1(c)=\psi(c)=0$.

విలోమంగా c వద్ద $|f|$ అవకలనీయమనుకొనుము. 16.5.1 నుండి R మీద ఒక ప్రమేయం ψ, c వద్ద అవిచ్ఛిన్నవౌతూ $\psi(x)(x-c)=|f|(x)=|f(x)|$ అగునట్లుగా వుంటుంది. అంతేకాక $\psi(c)=(|f|)^1(c)$. పై మాదిరిగా $\lim\limits_{x\to c} \psi(x)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{|f(x)|}{x-c}=0$ కాబట్టి ψ అవిచ్ఛినత నుండి $\psi(c)=\lim\limits_{x\to c}\psi(x)=0$ అందుచేత

$$0=\lim_{x\to c}\frac{|f(x)|}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{|f(x)|}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{|f(x)-f(c)|}{x-c}=|f^1(c)|$$

$|f^1(c)|=0$ కాబట్టి $f^1(c)=0$

16.5.4 గొలుసు నియమం: I, J లు R లో రెండు అంతరాలు. $f:J\to R$, $g:I\to R$ లు రెండు ప్రమేయాలు మరియు $c\in J$, $f(J)\subseteq I$. $f(c)$ వద్ద g అవకలనీయం, c వద్ద f అవకలనీయం అయితే c వద్ద (gof) అవకలనీయం మరియు $(gof)^1(c)=g^1(f(c))\ f^1(c)$

ఉపపత్తి: $h = gof,\ d = f(c)$ అనుకుందాం. c వద్ద f అవకలనీయం కావున కింది నియమాలను తృప్తిపరిచే ϕ ఉంటుంది.

(i) c వద్ద $\phi : I \to R$ అవిచ్ఛిన్నం.

(ii) $\phi(x)(x-c) = f(x) - f(c), \qquad (x \in J)$

(iii) $\phi(c) = f^1(c)$

$d = f(c)$ వద్ద g అవకలనీయం కావున కింది నియమాలను తృప్తిపరిచే $\psi : I \to R$ వుంటుంది.

(iv) d వద్ద ψ అవిచ్ఛిన్నం

(v) I లోని ప్రతి y కి $\psi(y)(y-d) = g(y) - g(d)$

(vi) $\psi(d) = g^1(d)$

$x \in J$ అయిన $\theta(x) = \psi(f(x)) \cdot \phi(x)$ గా తీసుకుంటే c వద్ద θ అవిచ్ఛిన్నం.

$x \in J$ అయితే $y = f(x) \in f(J) \subseteq I$ కావున

$$\theta(x)(x-c) = \psi(f(x)) \cdot \theta^1(x) \cdot (x-c)$$

$$= \psi(f(x)) \cdot (f(x) - f(c)) \qquad (\text{ii నుండి})$$

$$= \psi(y) \cdot (y-d)$$

$$= g(y) - g(d) \qquad (\text{iii నుండి})$$

$$= g(f(x)) - g(f(c))$$

$$= h(x) - h(c)$$

16.5.1 ప్రకారం c వద్ద h అవకలనీయం మరియు $h^1(c) = \theta(c) = \psi \cdot (f(c)) \cdot \theta(c) = g^1(f(c)) \cdot f^1(c).$

సంకేతం: I మీద g అవకలనీయం, J మీద f అవకలనీయం, $f(I) \subseteq J$ కావున గొలుసు నియమం ప్రకారం $(gof)^1(x) = (g^1of)(x) \cdot f^1(x) \Rightarrow (gof)^1 = (g^1of) \cdot f^1.$

అవకలనానికి $(\ )^1$ బదులు D ను ఉపయోగిస్తే $D(gof) = (Dgof)(DF).$

16.5.5 గొలుసు నియమం అనువర్తనాలు:

(a) I మీద f అవకలనీయం అయిన f^n కూడ అవకలనీయం మరియు I లోని ప్రతి x కి

$$(f^n)^1(x) = n \cdot f^{n-1}f(x) \cdot f^1(x)$$

కారణం: $y \in R,\ g(y) = y^n,\ h = gof$ గా వ్రాయండి.

$$\Rightarrow h(x) = g(f(x)) = (f(x))^n$$

గొలుసు నియమం ప్రకారం $h^1(x) = g^1(f(x)) \cdot f^1(x) = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f^1(x)$

(b) I మీద f అవకలనీయం I లోని ప్రతి x కి $f(x) \neq 0$ అయిన I మీద $\frac{1}{f}$ అవకలనీయం మరియు

$$\left(\frac{1}{f}\right)^1(x) = \frac{-f^1(x)}{(f(x))^2} \qquad (x \in I).$$

కారణం: $y \in R - \{0\}$ అయిన $h(y) = \frac{1}{y}$

$R - \{0\}$ మీద h అవకలనీయం మరియు $h^1(y) = -\frac{1}{y^2}$ గొలుసు నియమం ప్రకారం I మీద hof అవకలనీయం మరియు $(hof)^1(x) = h^1(f(x)) \cdot f^1(x) \Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)^1(x) = \frac{-f^1(x)}{f^2(x)}.$

(c) $x \neq 0$ అయిన $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. $R - \{0\}$ మీద f అవకలనీయం మరియు

$f^1(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (x \neq 0)$ అని చూపండి. $g(x) = \frac{1}{x}$, $\delta(x) = \sin\ x$ గా

తీసుకుందాం. $x \neq 0$ అయ్యే అన్ని విలువల వద్ద g అవకలనీయం మరియు $g^1(x) = -\frac{1}{x^2}$.

ప్రతి x వద్ద δ అవకలనీయం మరియు $\delta^1(x) = \cos\ x$.

కావున $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \delta(g(x)) = (\delta o g)(x)\ (x \neq 0)$. గొలుసు నియమం ప్రకారం,

x వద్ద f అవకలనీయం మరియు $f^1(x) = \delta^1(g(x)) \cdot g^1(x)$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}$$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం R మీద అవకలనీయం మరియు

$f^1(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x} \cdot (x \neq 0)$, $f^1(0) = 0$ అని చూపండి.

(c) నుండి, $D\left(\sin \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$ మరియు $D\left(x^2\right) = 2x$

కావున $x \neq 0$ అయినపుడు $D((f)x) = D\left(x^2\right) \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot D \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right)$

$$= 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$(D\ f)(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow (D\ f)(0) = 0$$

(e) $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \ (x \neq 0),\ g(0) = 0$ అయిన

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \cdot \sin \frac{1}{x^2} \cdot (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(x) - g(0)}{x - c} \right| = \left| x \cdot \sin \frac{1}{x^2} \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq |x|$$

$\in > 0,\ 0 < |x| < \in$ అయిన $\left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} - 0 \right| \leq |x| < \in$

కావున $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$ కావున 0 వద్ద g అవకలనీయం మరియు $g^1(0) = 0$

$x \neq 0$ అయిన $t^2, \frac{1}{t^2}, \sin t$లు x వద్ద అవకలనీయాలు

కావున $g^1(x) = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right) + 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2}$

$$= 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}$$

$n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$ అయిన $\frac{1}{x_n^2} = (2x+1)\pi$

$\Rightarrow \sin \frac{1}{x_n^2} = 0,\ \cos \frac{1}{x_n^2} = -1$ మరియు $g^1(x_n) = 2 \cdot \sqrt{(2n+1)\pi}$

$\ell im \left(g^1(x_n) \right) = \infty$ కావున g^1 పరిబద్ధం కాదు.

16.6 మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాలు:

ప్రమేయాల విలువలకు వాటి అవకలన విలువలకు మధ్య సంబంధాన్ని తెలిపేది మధ్యమమూల్య సిద్ధాంతం. ఈ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి ప్రమేయం యొక్క సహజ గుణాలను వాటి అవకలనాల ద్వారా తెలిసికోవచ్చు, మరియు అవకలనం శూన్యమయినప్పుడు దాని సాపేక్ష గరిష్ట, కనిష్ట విలువల వివరాలను తెలిసికొనవచ్చును.

జ్యామితీయంగా $y = f(x)$ వక్రం యొక్క ప్రతి జ్యాకు అనురూపంగా ఒక సమాంతర స్పర్శరేఖ ఉంటుందని ఈ సిద్ధాంతం ద్వారా తెలుస్తుంది. దీని వలన చాలా ఉపయోగాలు ఉండుటచే దీనిని అవకలన గణితం యొక్క ప్రాథమిక సిద్ధాంతం అని కూడా అంటారు.

16.6.1 నిర్వచనం: ఒక అంతరం I లో c అంతర బిందువు $x \in V \cap I$ అయినప్పుడు $f(x) \le f(c)$ అయ్యేటట్లు చుట్టూ $V = V_\delta(c)$ అనే $\delta -$ సామీప్యం ఉంటే c వద్ద $f : I \to R$ ప్రమేయాన్ని సాపేక్ష గరిష్టత పొందినది అంటాము.

$x \in V \cap I$ అయినప్పుడు $f(c) \le f(x)$ అయ్యేటట్లు c చుట్టూ ఒక సామీప్యం $V = V_\delta(c)$ ఉంటే c వద్ద $f : I \to R$ సాపేక్ష కనిష్టత పొందినది అంటాము. c వద్ద f సాపేక్ష గరిష్టత లేక కనిష్టత పొందితే c వద్ద f సాపేక్ష అత్యంతత పొందినది అంటాం. I లోని ప్రతి x కి $f(x) \le f(c)$, $(f(x) \ge f(c))$ అయిన c వద్ద f కు పరమ గరిష్ట (కనిష్ట) విలువ ఉంటుంది అంటాం.

$x \in I,\ y \in I,\ x < y$ అయినప్పుడు $f(x) \le f(y)$ అయితే f ను I మీద ఏకదిష్ట ఆరోహణం అంటాం. $x \in I,\ y \in I,\ x < y$ అయినప్పుడు $f(x) < f(y)$ అయితే f ను I మీద శుద్ధ ఏకదిష్ట ఆరోహణ ప్రమేయం అంటాం.

ఇదే విధంగా ఏకదిష్ట అవరోహణం, శుద్ధ ఏకదిష్ట అవరోహణ ప్రమేయాలను నిర్వచిస్తాం. ఇప్పటి నుండి ఏకదిష్ట ఆరోహణ లేక అవరోహణ ప్రమేయాలను ఆరోహణ లేక అవరోహణ ప్రమేయాలుగా పిలుస్తాం.

16.6.2 అంతర్విస్తరణ (Interior Extension) సిద్ధాంతం: I లోని ఒక అంతర బిందువు c వద్ద $f : I \to R$ ప్రమేయం సాపేక్ష అత్యంతత పొంది, c వద్ద f అవకలనీయమైతే $f^1(c) = 0$.

ఉపపత్తి: c వద్ద f సాపేక్ష గరిష్ఠత పొందినదనుకుందాం. I లో c అంతర బిందువు కాబట్టి $(c - \delta_1, c + \delta_1) \subseteq I$ అగునట్లు $\delta_1 > 0$ వుంటుంది. c వద్ద f సాపేక్ష గరిష్ఠత పొందినందున I లోని ఒక అంతరం $(c - \delta_2\ , c + \delta_2)$ లోని ప్రతి x కి $f(x) \le f(c)$ కావలె. $f^1(c) > 0$ అయితే I లో ఒక అంతరం $(c - \delta_3,\ c + \delta_3)$ లోని ప్రతి $x \ne c$ కి

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f^1(c) \right| < \frac{f^1(c)}{2} \text{ కావలె. ఇట్టి } x \text{ కి } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{f^1(c)}{2} > 0.$$

$\delta =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1 , \delta_2, \delta_3\}$ అనుకుంటే $(c-\delta,\ c+\delta)$ పై మూడు $c-$ సామీప్యాలలోను వుంటుంది, కావున $x \in (c-\delta, c+\delta), x \neq c$ అయితే $x \in I, f(x) \leq f(c), \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$

కాని $c < x < c + \delta$ అయితే $x - c > 0$ మరియు $f(x) - f(c) \leq 0$ కాబట్టి $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ ఇది పై అసమత $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$కి విరుద్ధం. అందుచేత $f^1(c) \not> 0$. ఇదే రీతిగా (లేదా f బదులు - f పరిగణించి) $f^1(c) \not< 0$ అని చూపగలము. అందుచేత $f^1(c) = 0$.

c వద్ద f సాపేక్ష కనిష్ఠత పొందినప్పుడు ఇదే రీతిగా $f^1(c) = 0$ అని చూపవచ్చును.

16.6.3 ఉప సిద్ధాంతం: Iలోని అంతర బిందువు c వద్ద $f : I \to R$ సాపేక్ష అత్యంతత పొందితే

(i) c వద్ద f అవకలనీయం కాకపోవచ్చు లేదా

(ii) c వద్ద f అవకలనీయమై $f^1(c) = 0$ కావచ్చు

గమనిక: 16.6.2 ప్రకారం ఒక అంతర బిందువు వద్ద ప్రమేయం సాపేక్ష అత్యంత పొందినప్పటికి అక్కడ అవకలనీయం కానక్కర్లేదు.

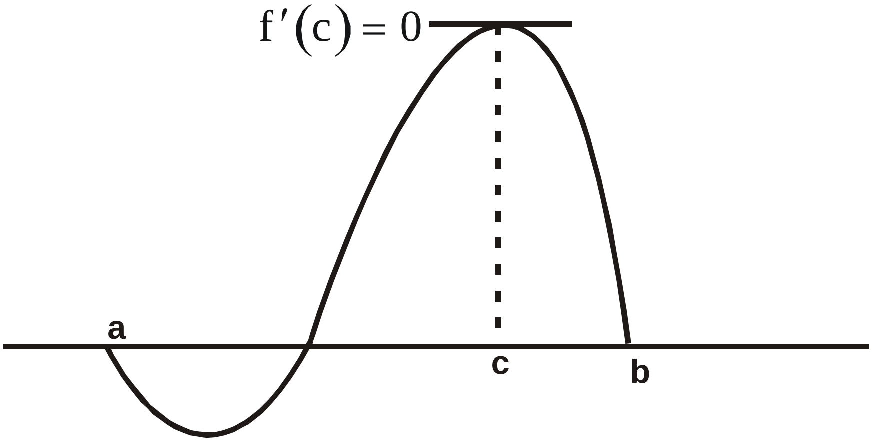
ఉదాహరణకి $|x|$ ప్రమేయం 0 వద్ద (సాపేక్ష) కనిష్ఠత పొందినప్పటికీ 0 వద్ద అవకలనీయం కాదు.

16.6.4 రోల్ సిద్ధాంతం: $I = [a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం, (a, b) మీద అవకలనీయం మరియు $f(a) = f(b) = 0$ అయిన $f^1(c) = 0$ అయ్యేటట్లు (a, b)లో కనీసం ఒక c వుంటుంది.

ఉపపత్తి: Iలో ప్రతి xకి $f(x) = 0$ అయిన $f^1(x) = 0$. ఒక x_0కి $f(x_0) \neq 0$ అనుకొందాము. $f(x_0) > 0$ అయితే $[a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం కావున f పరిబద్ధం మరియు గరిష్ఠత పొందుతుంది. కాబట్టి $[a, b]$ లోని ప్రతి xకి $f(c) \geq f(x)$ అయ్యేటట్లు ఒక c, $[a, b]$లో వుంటుంది. $f(c) \geq f(x_0) > 0$, $f(a) = f(b) = 0$ కావున $a \neq c \neq b$. కావున $c \in (a, b)$. c వద్ద fకు పరమ గరిష్ఠ విలువ ఉన్నది కావున c వద్ద fకు సాపేక్ష గరిష్ఠత పొందును. c వద్ద f అవకలనీయం కావున $f^1(c) = 0$.

ఇదే విధంగా $f(x_0) < 0$ అయిన fకు బదులు $-f$ తీసుకొని నిరూపించవచ్చును.

గమనిక: రోల్ సిద్ధాంతం నుండి f అవకలనీయం అయితే $f(x) = 0$ యొక్క ప్రతి రెండు మూలాల మధ్య $f^1(x) = 0$కు ఒక మూలము ఉంటుంది అని చెప్పవచ్చును.

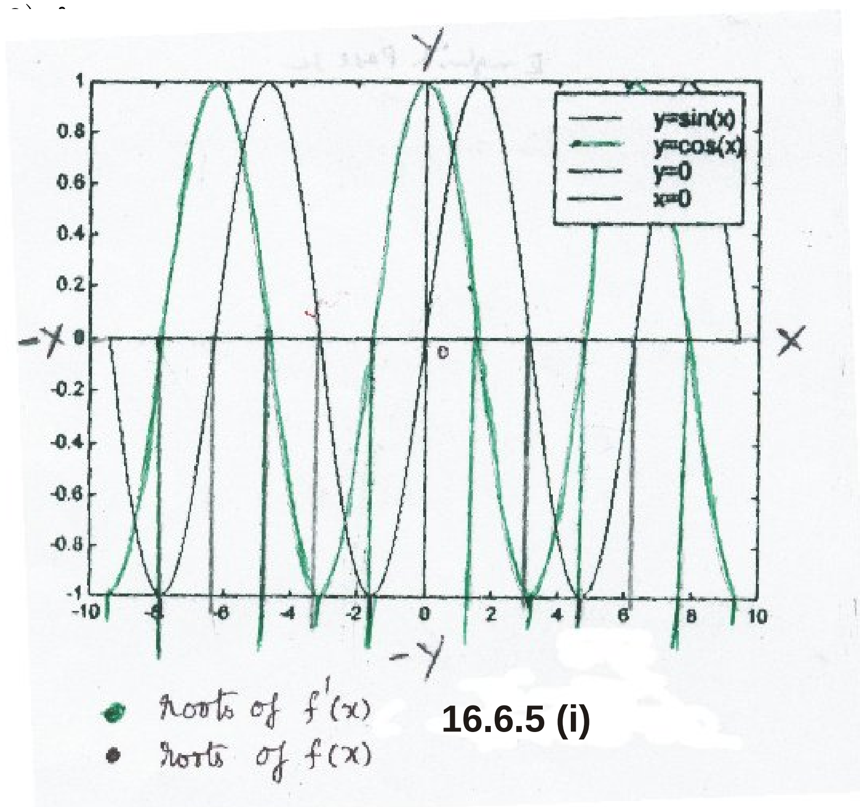


16.6.5 అనువర్తనం:

(i) రోల్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి ప్రమేయాల మూలాలుండే ప్రాంతాలు కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ - 1: $\sin x$ యొక్క ఏ రెండు మూలాల మధ్యనైనా $\cos x$ యొక్క ఒక మూలం ఉంటుంది. అదే విధంగా $\cos x$ యొక్క ఏ రెండు మూలాల మధ్యనైనా $\sin x$ మూలం ఉంటుందని రోల్ సిద్ధాంతం ద్వారా చూపవచ్చును.

$\sin\alpha = \sin\beta = 0$, $\alpha < \beta$ అయిన రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\cos\gamma = D \sin\gamma = 0$ అయ్యేటట్లు $(\alpha,$



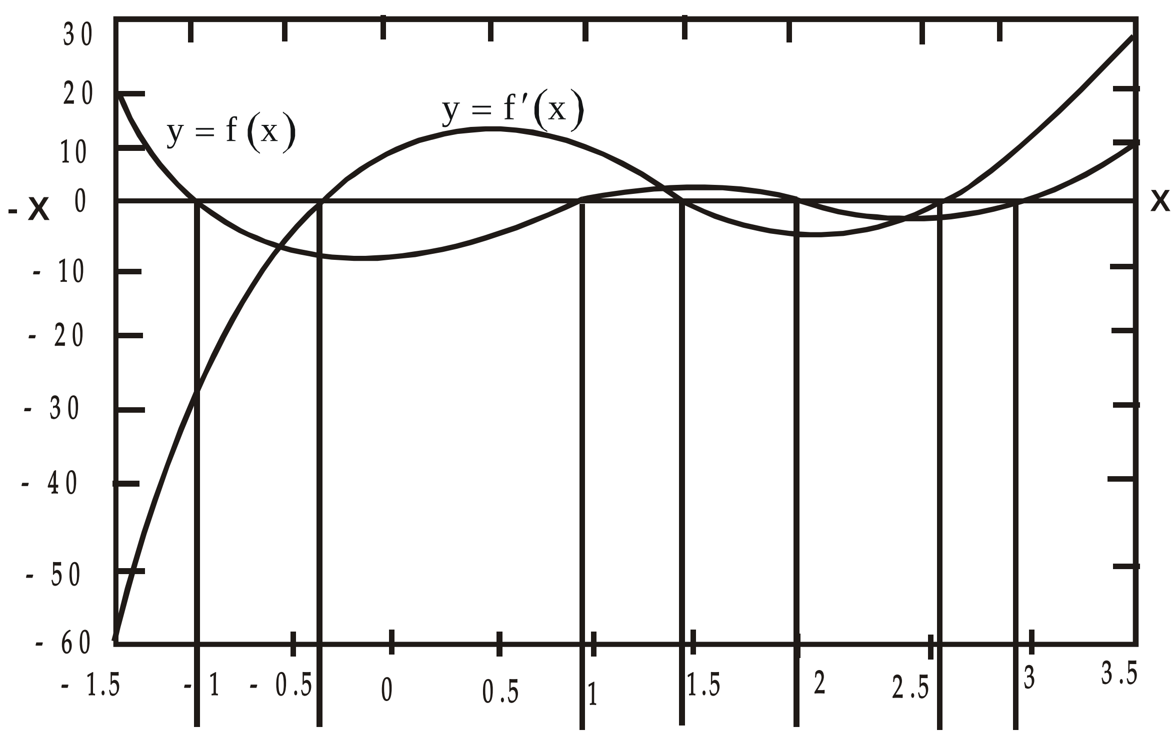
16.6.5 (i)

(ii) f అనేది $n\,(>1)$వ తరగతి వాస్తవ గుణకాల బహుపది మరియు $\alpha < \beta,\ f(\alpha) = f(\beta) = 0$ అయితే $f^1(\gamma)$ అయ్యేటట్లు (α, β)లో γ ఉంటుంది.

$c_0, c_1, \cdots\cdots\cdots, c_n$ వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $\dfrac{c_0}{1} + \dfrac{c_1}{2} + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{c_n}{n+1} = 0$ అయిన $(0,1)$లో $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots\cdots + c_nx^n$ కి ఒక మూలం ఉంటుంది. దీనిని నిరూపించటానికి $g(x) = c_0x + c_1\dfrac{x^2}{n} + \cdots\cdots\cdots + c\dfrac{x^{n+1}}{n^{n+1}}$ గా తీసుకుందాం.

$g(0) = g(1) = 0$ కావున రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $g^1(\alpha) = 0$ అయ్యేటట్లు $(0, 1)$లో α ఉంటుంది. కాని $g^1(x) = f(x)$ కావున $(0, 1)$లో f కు ఒక మూలం ఉంటుంది.

(iii) ఉదాహరణ - $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ అనుకొనిన $f^1(x) = 2x(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 1)(2x - 5)$ కింద f, f^1 ల రేఖా చిత్రాలు ఇవ్వబడినవి. పటం నుండి $f(x) = 0$ యొక్క వరుస మూలాల మధ్య $f^1(x) = 0$ యొక్క మూలం ఉంటుంది అని గమనించవచ్చును.



16.6.6 మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం (లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం): $I = [a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం మరియు (a, b) మీద f అవకలనీయం అయిన $f(b) - f(a) = f^1(c)(b - a)$ అయ్యేటట్లు (a, b)లో కనీసం ఒక c ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: $g : I \to R$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$గా నిర్వచింపుము.

$[a, b]$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం (a, b) మీద g అవకలనీయం, మరియు $g(a) = 0 = g(b)$ కావున రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం (a, b)లో ఒక , $g^1(c) = 0$ అయ్యేటట్లు ఉంటుంది.

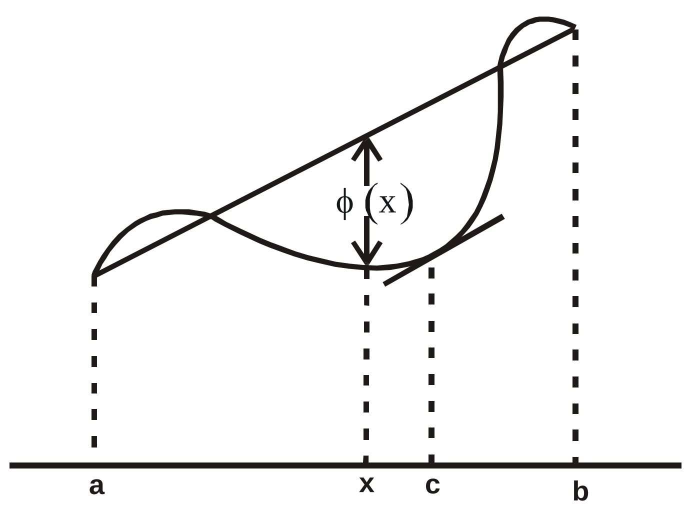
$$g^1(x) = f^1(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ కావున

$$f^1(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

అందుచేత $f(b) - f(a) = (b - a) f^1(c)$

జ్యామితీయ వివరణ:

$y = f(x)$ వక్రానికి $(a, f(a)), (b, f(b))$ అంత్య బిందువులుగా గల జ్యాకు సమాంతరంగా ఒక స్పర్శ రేఖ ఉంటుందని గమనించవచ్చును.



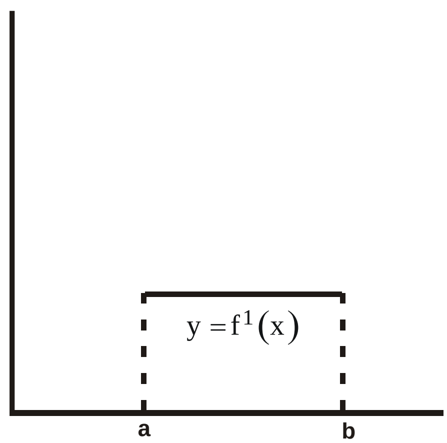
16.6.7 సిద్ధాంతం: $I=[a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం, (a, b) మీద అవకలనీయం మరియు (a, b)లోని ప్రతి xకి $f^1(x)=0$ అయిన I మీద f స్థిర ప్రమేయం.

ఉపపత్తి: ప్రతి $a \leq x \leq b$ అయినప్పుడు $f(x)=f(a)$ అని చూపుదాం.

$a < x \leq b$ అనుకుందాం $\Rightarrow [a, x]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం (a, x) మీద f అవకలనీయం కాబట్టి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $f(x)-f(a)=(x-a)\, f^1(c)= (x-a)\cdot 0=0$ అయ్యేటట్లు $c \in (a, x)$లో ఉంటుంది. కావున $f(x)=f(a)$.

$a < x \leq b$ అయ్యేటట్లు ప్రతి xకి ఇది జరుగుతుంది. కావున $f(x)=f(a) \cdot \forall\ x \in I$

$\Rightarrow I$ మీద f స్థిర ప్రమేయం.

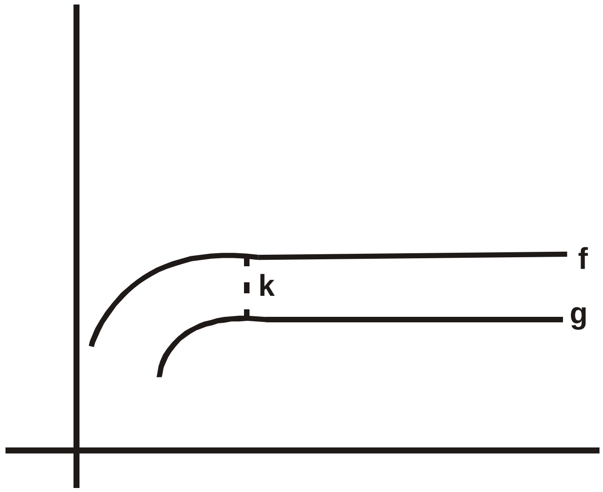


16.6.7

16.6.8 ఉప సిద్ధాంతం: $I=[a, b]$ మీద f, g అవిచ్ఛిన్నం. (a, b) మీద అవకలనీయం మరియు (a, b)లోని ప్రతి xకు $f^1(x)=g^1(x)$ అయిన ఒక స్థిర సంఖ్య k, $[a, b]$లోని ప్రతి xకి $f(x)=g(x)+k$ అయ్యేటట్లు ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: $h(x)=f(x)-g(x)$గా నిర్వచింపబడిన $h: I \to \mathsf{R}$ ప్రమేయం $[a, b]$ మీద అవిచ్ఛిన్నం, (a, b) మీద అవకలనీయం (a, b)లోని ప్రతీ xకి $h^1(x)=f^1(x)-g^1(x)=0$.

పై సిద్ధాంతం ప్రకారం $[a, b]$లో h స్థిర ప్రమేయం. $k \in \mathsf{R}$ $[a, b]$లోని ప్రతి xకి $h(x)=k$ అయితే ప్రతి xకి $f(x)=g(x)+k$.



16.6.9 సిద్ధాంతం: $f : I \rightarrow R$ ప్రమేయం I మీద అవకలనీయమైతే

(i) I మీద f ఆరోహణమగుటకు $(x) \geq 0$ అగుట తుల్యము.

(ii) I మీద f అవరోహణమగుటకు $f^1(x) \leq 0$ అగుట తుల్యము.

ఉపపత్తి: (i) I లోని ప్రతి x కి $f^1(x) \geq 0$ అనుకుందాం.

$x \in I,\ y \in I,\ x < y$ అయితే

$[x, y]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం (x, y) మీద అవకలనీయం కావున మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f^1(Z)$ అయ్యేటట్లు $Z, (x, y)$ లో ఉంటుంది.

$y - x > 0,\ f^1(Z) \geq 0$ కావున $(y - x)\, f^1(Z) \geq 0$

$\Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

కావున I మీద f ఆరోహణం.

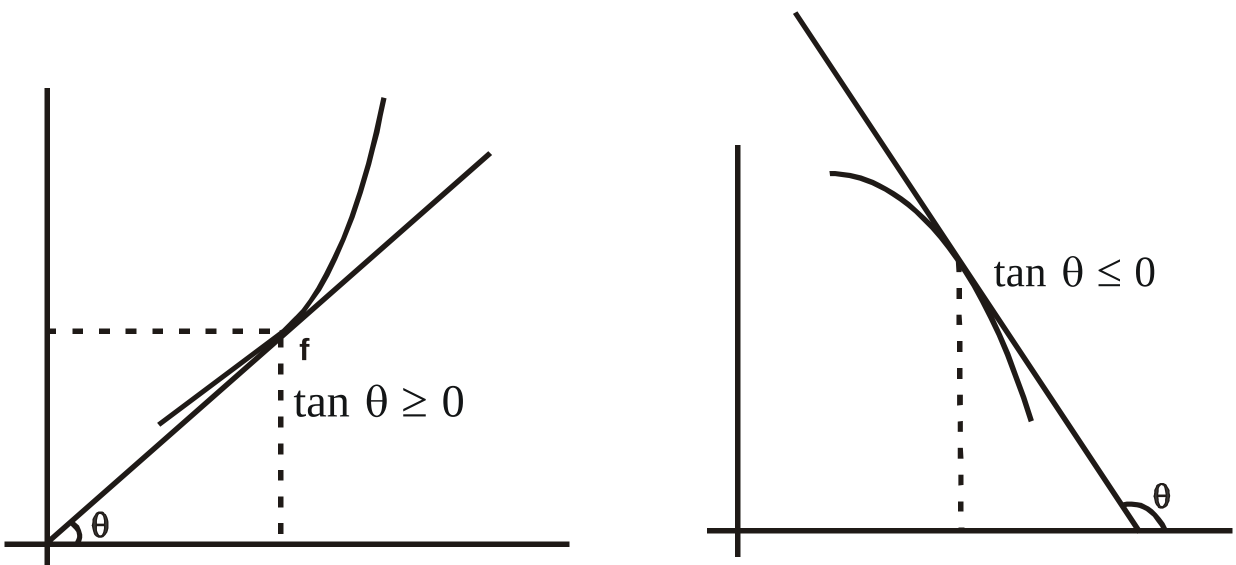
విపర్యయంగా I మీద f ఆరోహణం మరియు $c \in I$ అనుకుందాం. $x \in I, x > c$ అయిన $x - c > 0$, $f(x) \geq f(c)$ కాబట్టి $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

$x < c$ అయిన $x - c < 0$ మరియు $f(x) \le f(c)$ కావున $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^1(c) \ge 0 \Rightarrow$ ప్రతి $x \in I$కు $f^1(x) \ge 0$

$\Rightarrow I$ మీద $f^1(x) \ge 0$

f కు బదులు $-f$ వ్రాసి (ii) నిరూపించవచ్చును.



(i) (ii)

గమనిక: $(c - \delta, c+\delta)$లో f ఆరోహణం అయ్యేటట్లు c యొక్క సామీప్యం $(c - \delta, c + \delta) \subseteq I$ ఉంటే $f : I \to R$ ప్రమేయం c వద్ద ఆరోహణం అంటాం.

ఇదే విధంగా ఒక బిందువు వద్ద అవరోహణత నిర్వచిస్తాం.

$f^1(c) > 0$ అయిన c వద్ద f తప్పనిసరిగా ఆరోహణం కానక్కరలేదు.

16.6.10 ఉదాహరణ: $g(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

$x \neq 0$ అయిన $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1+2x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$ కావున $g^1(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1$

$\Rightarrow g^1(0) > 0$ అయినప్పటికి 0 చుట్టూ ఏ అంతరంలోనూ g ఆరోహణం కాదు అని చూపుదాం.

$\delta > 0$ అయితే $0 < \dfrac{1}{n\pi} < \delta$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{N}$లో n ఎన్నుకుందాం.

$$g\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi} + 0 = \frac{1}{n\pi} > 0$$

$$g\left(-\frac{1}{n\pi}\right) > 0 > g\left(-\frac{1}{n\pi}\right)$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{1}{n\pi}\right) > 0 > g\left(-\frac{1}{n\pi}\right)$$

$\Rightarrow$ '0' యొక్క సామీప్యం $(-\delta, \delta)$లో g ఆరోహణము కాదు.

16.6.11 అంత్యమ విలువలకు మొదటి అవకలన పరీక్ష: $[a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం. $c \in [a, b] \cdot f : [a, b] \to \mathsf{R}$ ప్రమేయం (a, c) మరియు (c, b)ల మీద అవకలనీయం అనుకొనుము.

(i) $(c-\delta, c+\delta) \subseteq I$ మరియు $c-\delta < x < c$ అయినప్పుడు $f^1(x) \geq 0$ మరియు $c < x < c+\delta$ అయినప్పుడు $f^1(x) \leq 0$ అగునట్లు $\delta > 0$ ఉంటే c వద్ద f సాపేక్ష గరిష్టత పొందును.

(ii) $(c-\delta, c+\delta)$, $c-\delta < x < c$ అయినప్పుడు $f^1(x) \leq 0$ మరియు $c < x < c+\delta$ అయినప్పుడు $f^1(x) \geq 0$ అగునట్లు $\delta > 0$ వుంటే c వద్ద f సాపేక్ష కనిష్టత పొందును.

ఉపపత్తి: (i) (1)ను తృప్తిపరిచేటట్లు c యొక్క సామీప్యం $V = (c-\delta, c+\delta)$ ఉంది అనుకుందాం.

$c-\delta < x < c$ కావున $[x, c]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం మరియు (x, c) మీద f అవకలనీయం.

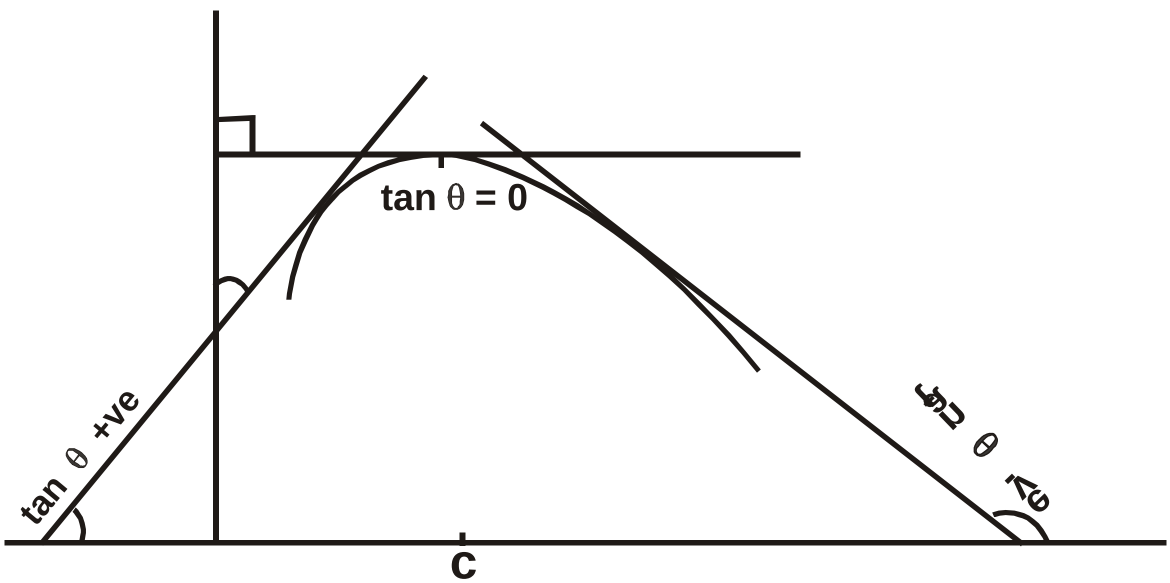
$\therefore$ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారము $f(x)-f(c)=(x-c)\,f^1(\alpha)$ అయ్యేటట్లు (x, c)లో α ఉంటుంది. $x-c<0$ కావున (i) నుండి $f^1(\alpha)\geq 0$ కావున

$f(x)-f(c)=(x-c)\,f^1(\alpha)\leq 0$ అందుచేత $c-\delta<x<c$ అయినప్పుడు $f(x)\leq f(c)\cdots\cdots\cdots(A)$ $c<x<c+\delta$ అయిన $[c, x]$ మీద f కు మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $f(x)-f(c)=(x-c)\,f^1(\beta)$ అయ్యేటట్లు $\beta\in(c, x)$ ఉంటుంది.

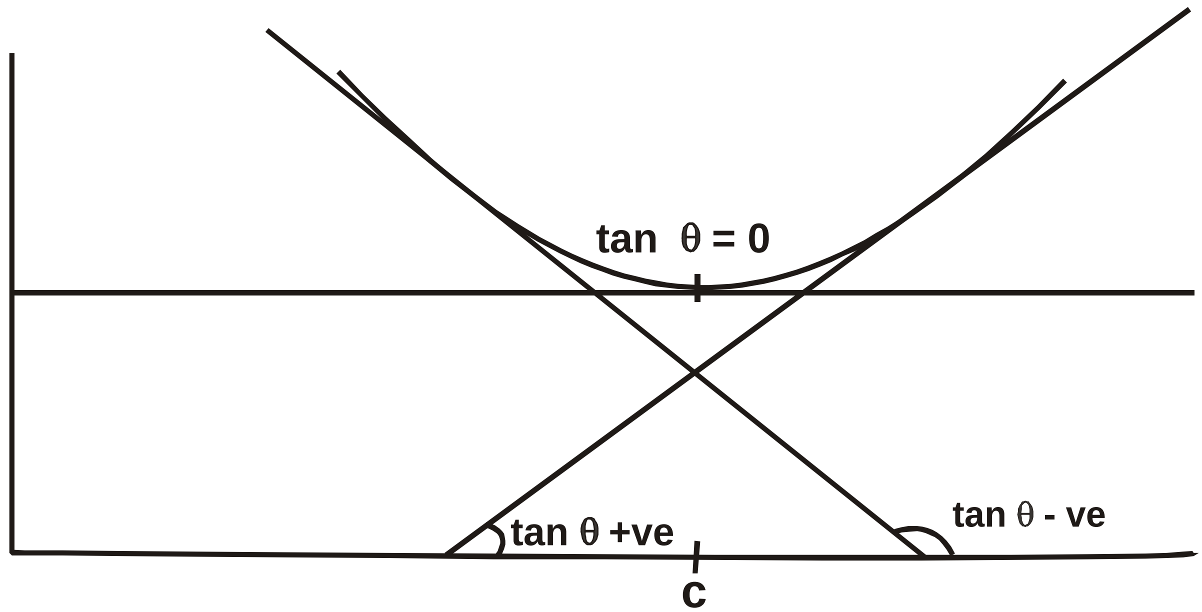
$x-c>0, f^1(\beta)\leq 0$ కావున $f(x)-f(c)\leq 0$

$\Rightarrow c<x<c+\delta$ అయిన $f(x)\leq f(c)\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad(B)$

$(A), (B)$ల నుండి $c-\delta<x<c+\delta$ అయిన $f(x)\leq f(c)$ కావున c వద్ద f కు సాపేక్ష గరిష్ట విలువ ఉంటుంది. ఇదే విధంగా (ii) నిరూపించవచ్చును.



c వద్ద f గరిష్టత పొందును. వాలు ఋణాత్మకత నుండి ధనాత్మకమగును.



c వద్ద f కనిష్టత పొందును. వాలు ధనాత్మకత నుండి ఋణాత్మకమగును.

15వ పాఠంలో $[a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం అయిన f పరిబద్ధం మరియు $[a, b]$ అంతరంలో f గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలను పొందునని మరియు $a \le x \le b$, $a < y \le b$, $f(x) < \lambda < f(y)$ అయిన $f(c) = \lambda$ అయ్యేటట్లు x, y ల మధ్య c ఉండునని నిరూపించాము.

ఇప్పుడు ఈ మధ్యంతర మూల్య ధర్మాన్ని అవకలనాలకు విస్తరించుదాం. ఈ మధ్యంతర సిద్ధాంతం దత్తాంశంలో $[a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం అని ఉంటుంది. కాని కింది ఉదాహరణ ద్వారా ప్రమేయపుటవకలని అవిచ్ఛిన్నం కానక్కరలేదు అని చూడవచ్చును.

16.6.12 ఉదాహరణ: $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \ (x \ne 0),\ f(0) = 0$

$x \ne 0$ వద్ద f అవకలనీయం మరియు $f^1(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$x \ne 0$ అయిన $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow f^1(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$x_n = \dfrac{1}{2n\,\pi}$ అయిన $\ell im\ \cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = 1$ మరియు $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi/2}$ అయిన

$\ell im\ \cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = 0$ కావున $f^1(x)$, '0'కు అభిసరణ చెందదు. కావున ప్రమేయపు అవకలనం, అవిచ్ఛిన్నం కానక్కరలేదు.

ప్రమేయపుటవకలనానికి మధ్యంతర మూల్య ధర్మాన్ని నిరూపించే ముందు ఒక సహాయక సిద్ధాంతంను నిరూపించుదాం.

16.6.13 సహాయక సిద్ధాంతం: R లో I ఒక అంతరం. $c \in I$, $f : I \to R$, c వద్ద అవకలనీయం అయిన

(a) $f^1(c) > 0$ అయినచో $x \in I,\ c < x < c + \delta$ అయినప్పుడు $f(x) > f(c)$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

(b) $f^1(c) < 0$ అయినచో $x \in I,\ c - \delta < x < c$ అయినప్పుడు $f(x) > f(c)$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: $f^1(c) > 0$ అయితే $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I,\ x \neq c$ అయినప్పుడు

$\left|\dfrac{f(x) = f(c)}{x - c} - f^1(c)\right| < f^1(c)$ అయ్యేటట్లు $(\in =)\ f^1(c)$కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > f^1(c) - f^1(0) = 0$$

$\therefore c < x < c + \delta$ అయిన $0 < x - c < \delta$ కావున $f(x) - f(c) = (x - c) \cdot \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$

$\Rightarrow x \in I,\ c < x < c + \delta$ అయిన $f(x) > f(c)$

$f^1(c) < 0$ అయిన $\in = -f^1(c) > 0$గా తీసుకుంటే పై రీతిగా $c - \delta < x < c + \delta,\ x \in I,\ x \neq c$ అయినప్పుడు $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$c - \delta < x < c$ అయిన $x - c < 0$ కావున $x \in I,\ c - \delta < x < c$ అయిన $f(x) > f(c)$

16.6.14 డార్ బూక్స్ సిద్ధాంతం: $[a, b]$ మీద f అవకలనీయం $f^1(a), f^1(b)$ల మధ్య k ఒక సంఖ్య అయిన $f^1(c) = k$ అయ్యేటట్లు కనీసం ఒక $c, (a, b)$లో ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: $f^1(a) < k < f^1(b)$ అనుకుందాం.

$g : [a, b] \to R$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = kx - f(x)$గా నిర్వచిద్దాం. $[a, b]$ మీద f అవకలనీయం మరియు $g^1(x) = k - f^1(x)$,

కావున $g^1(a) = k - f^1(a) > 0 > k - f^1(b) = g^1(b)$ **16.6.13** ప్రకారం

$x \in [a, b]$, $a < x < a + \delta$ అయిన $g(x) > g(a)$ అయ్యేటట్లు ఒక $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$[a, b]$ మీద g అవిచ్ఛిన్నం కావున g పరిబద్ధమై గరిష్టత పొందును. అందుచేత ప్రతి xకి $g(x) \le g(x_0)$ అయ్యేటట్లు ఒక $x_0, [a, b]$లో ఉంటుంది.

$x \in [a, b], a < x < a + \delta$ అయినప్పుడు $g(x) > g(a)$ కావున $x_0 \ne a \quad \cdots \quad (1)$

ఇదే రీతిగా $g^1(b) = k - f^1(b) < 0$ కావున $x \in [a, b]$, $b - \delta < x < b$ అయినప్పుడు $g(x) > g(b)$ అయ్యేటట్లు ఒక $\delta > 0$ ఉంటుంది.

పై మాదిరిగా $x_0 \ne b$ అందుచేత $a < x_0 < b$

x_0 వద్ద g గరిష్టత పొందుతూ అవకలనీయం కావున $g^1(x_0) = 0$ అనగా $f^1(x_0) = k$.

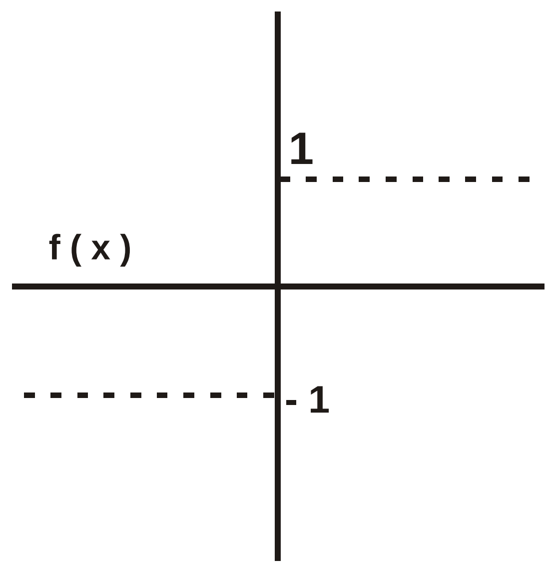
నిరూపణ పూర్తి అయినది.

16.6.15 ఉదాహరణ:

$g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ ప్రమేయాన్ని

$$g(x) = \begin{cases} -1 & (-1 \le x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (0 < x \le 1) \end{cases}$$

గా నిర్వచిస్తే $f^1(x) = g(x)$ అయ్యేటట్లు $[-1, 1]$ లో f వ్యవస్థితం కాదు. ఎందుకనగా అటువంటి f వ్యవస్థితం అయితే f^1 మధ్యంతరం మూల్య ధర్మాన్ని పాటించాలి. కాని g కు ఈ ధర్మం ఉండదు.



16.6.16 మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం అనువర్తనాలు:

(1) ఉజ్జాయింపు విలువలను మరియు దోషాలను లెక్కించటానికి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం వుపయోగిస్తుంది. $\sqrt{105}$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ కనుగొనవలెననుకోండి $x > 0$ కి $f(x) = \sqrt{x}$ అని వ్రాయుము.

$$f^1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\sqrt{100} < \sqrt{104} < \sqrt{121}$ కావున $10 < \sqrt{105} < 11$

కాని 10, 11లు $\sqrt{105}$ కు "చాలా" దూరం. $a = 100$, $b = 105$ అనుకొని మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతంను ఉపయోగిస్తే, $\sqrt{105} - \sqrt{100} = 5 \cdot f^1(c) = \dfrac{5}{2\sqrt{c}}$ అయ్యేటట్లు c, 100, 105ల మధ్య ఉంటుంది.

$$\Rightarrow 10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < 11 \Rightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{22} < \frac{5}{2\sqrt{c}} < \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{22} < \sqrt{105} - \sqrt{100} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 10 + \frac{5}{22} < \sqrt{105} < \frac{1}{4} + 10$$

$\Rightarrow 10.2272 < \sqrt{105} < 10.25$ ఈ రీతిగా (10, 11)తో ప్రారంభించి $\sqrt{105}$ ను కలిగి వుండే అంతరానికి $(10.2272, 10.25)$ కుదించ కలిగాము. ఈ అంతరాన్ని ఇంకా మెరుగుపరచవచ్చును.

$\sqrt{105} < 10.25,\ 10 < \sqrt{c} < \sqrt{105}$ కావున $\sqrt{c} < 10.25 \Rightarrow \frac{5}{2\sqrt{c}} > \frac{5}{2(10.25)} = \frac{5}{20.50}$

$$= \frac{5 \times 2}{41} > 0.2439$$

$$\therefore \quad 0.2439 < \frac{5}{2\sqrt{c}} = \sqrt{105} - 10$$

$$\Rightarrow 10.2439 < \sqrt{105} < 10.25$$

$(10.2439,\ 10.25)$ అంతరం $(10.2272, 10.25)$ అంతరంలో ఉంది కదా.

(ii) మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $e^x > 1 + x$ అని నిరూపించండి.

$f(x) = e^x$ అనుకుంటే $f^1(x) = e^x$

$x > 0$ అయిన $[0, x]$ మీద f అవకలనీయం (మరియు అవిచ్ఛిన్నం) కావున మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f^1(c)$ అయ్యేటట్లు $(0, x)$లో c ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \frac{e^x - e^0}{x} = e^c$$

$f^1(x) = e^x > 0$ కావున f ఆరోహణం.

కావున $\dfrac{e^x - e^0}{x} = e^c > e^0 = 1 \Rightarrow e^x > x + e^0 = 1 + x$

$x < 0$ అయిన $\dfrac{e^x - e^0}{x} = e^c$ అయ్యేటట్లు $c \in (x, 0)$ ఉంటుంది.

$\Rightarrow \dfrac{e^x - 1}{x} = e^c = \dfrac{1}{e^{-c}} < 1$

$\Rightarrow e^x - 1 > x$ ($x < 0$ కావున)

$\Rightarrow e^x > 1 + x$

$e^0 = 1$ కావున ప్రతి x కి $e^x \geq 1 + x$

(iii) మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతంనుపయోగించి $x > 1$ అయిన $\dfrac{x-1}{x} < \ell n\, x < x - 1$ అని చూపండి.

సాధన: $x > 1$ అయిన $f(x)$

$\ell n\, x$ ప్రమేయం $[1, x]$ మీద అవిచ్ఛిన్నం $(1, x)$ మీద అవకలనీయం. మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f^1(c) = \dfrac{1}{c}$ అయ్యేటట్లు $(1, x)$లో c ఉంటుంది.

$\Rightarrow \dfrac{\ell n\, x - \ell n\, 1}{x - 1} = \dfrac{1}{c}$

$1 < c < x$ కావున $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{c} < 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{\ell n\, x}{x - 1} < 1 \Rightarrow \dfrac{x - 1}{x} < \ell n\, x < x - 1$

(iv) $a > 0,\ b > 0,\ 0 < \alpha < 1$ అయితే $a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha) b$ అని మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ఉపయోగించి నిరూపించండి.

$x \geq 0$ అయిన $g(x) = \alpha\, x - x^{\alpha}$ అనుకుందాం.

$g'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha\left(1 - x^{\alpha-1}\right)$

$0 < x < 1$ అయిన $\frac{1}{x} > 1, \left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} > 1$

$\Rightarrow x^{\alpha-1} > 1 \Rightarrow 0 < x < 1$ అయినప్పుడు $g^1(x) = \alpha\left(1 - x^{\alpha-1}\right) < 0$

$x > 1$ అయిన $0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow 0 < \left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} < 1 \Rightarrow x^{\alpha-1} < 1$

అనగా $x^{1-\alpha} > 1$

$1 - x^{\alpha-1} > 0$ కావున $x > 1$ అయిన $g(x) > 0$

$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g^1(c) > 0$ అయ్యేటట్లు $(1, x)$లో c ఉంటుంది.

$x - 1 > 0$ కావున $g(x) - g(1) > 0,\ g(x) > g(1) = \alpha - 1$

కాబట్టి $x > 1$ అయిన $\alpha x - x^{\alpha} > \alpha - 1,\ x^{\alpha} < \alpha x + (1-\alpha)$

ఇప్పుడు $b > 0$ అయిన $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} < \alpha \cdot \frac{a}{b} + (1-\alpha)$

$\Rightarrow a^{\alpha} \cdot b^{1-\alpha} < \alpha a + (1-\alpha) b$

(v) బెర్నోలీ అసమత

$\alpha > 1,\ x > -1$ అయిన $(1+x)^{\alpha} > 1 + \alpha x$

ఉపపత్తి: గణితాను గమనం ఉపయోగించి ఈ అసమత $\alpha \in \mathbb{N}$ అయినపుడు నిరూపిద్దాం.

(1) $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha > 1$ అయిన $(1+x)^{\alpha+1} = (1+x)^{\alpha}\ (1+x)$

$(1+x)^{\alpha} > 1+x\alpha$ అనుకొనిన

$(1+x)^{\alpha+1} > (1+x\alpha)(1+x)$

$= 1+(\alpha+1)x+x^2\alpha > 1+x(\alpha+1)$

$(1+x)^1 = 1+x \cdot 1,\ (1+x)^2 = 1+x^2+2x > 1+2x$

$\alpha = 2$ అయిన పై అసమత నిజం. గణితానుగమనం ప్రకారం $(1+x)^{\alpha} > (1+x\alpha),\ \alpha \in N,$ $\alpha > 1.$

(2) సార్వత్రికంగా $h(x) = (1+x)^{\alpha}$ అనుకుందాం.

$\Rightarrow h^1(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$x > 0$ అయిన మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం

$h(x) - h(0) = (x-0)\, h^1(c)$ అయ్యేటట్లు $(0, x)$లో c ఉంటుంది.

$\Rightarrow h(x) - h(0) = x \cdot h^1(c) = x \cdot \alpha \cdot (1+c)^{\alpha-1} > x^{\alpha}$

$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} - 1 > x^{\alpha}$

$\Rightarrow x > 0$ అయిన $(1+x)^{\alpha} > 1+x\alpha$

$x < 0$ అయిన $[x, 0]$ మీద మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం అనువర్తించిన $(0-x)h^1(c) = h(0) - h(x)$ అయ్యేటట్లు $(x, 0)$లో c లభిస్తుంది.

$h(x) - h(0) = x \cdot h^1(c)$ కాబట్టి

$(1+x)^{\alpha} - 1 = x \cdot \alpha \cdot (1+c)^{\alpha-1} > x\alpha$ కాబట్టి

$(1+x)^{\alpha} > 1+x\alpha$

16.6.17 ఉదాహరణలు:

(i) $f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$

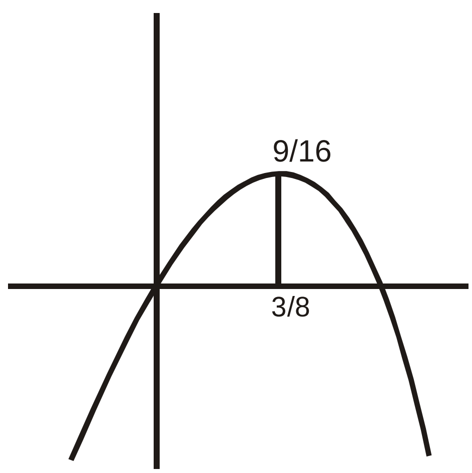
$x = \pm 1$ అయిన $f^1(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$f^1(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{x^2}$ i.e. $|x| > 1$ మరియు $f^1(x) < 0 \Leftrightarrow |x| < 1$

$\therefore$ $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$లో f ఆరోహణం మరియు $(-1, 1)$లలో f అవరోహణం.

$f(-x) = -f(x)$ కావున f బేసి ప్రమేయం.

(ii) $g(x) = 3x - 4x^2 = -\left(4x^2 - 3x\right) = \frac{9}{16} - \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2$



$x = \frac{8}{3}$ అయిన $g^1(x) = 3 - 8x = 0$

$g^{11}(x) = -8 < 0$

$x = \frac{3}{8}$ వద్ద g గరిష్టత పొందును.

ఆ గరిష్ట విలువ $= g\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{9}{16}$

$x > 3/8$ అయిన $g^1(x) < 0$ కావున $\left(\frac{3}{8}, \infty\right)$లో g ఆరోహణం మరియు $\left(-\infty, \frac{3}{8}\right)$లో g అవరోహణం.

(iii) $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$

$$k^1(x) = 4x^3 + x = 4x(x^2+1) = 0 \qquad (x=0)$$

$$> 0 \qquad (x>0)$$

$$< 0 \qquad (x<0)$$

$y = k(x)$ వక్రం $(0, \infty)$లో ఆరోహణం, $(-\infty, 0)$లో అవరోహణం.

ప్రతి xకి $k(x) = (x^2+1)^2 - 5 \geq 1 - x = -4$

కావున $x = 0$ వద్ద $k(x)$ కనిష్టత పొందును.

(iv) $f(x) = x^5 + 4x + 3$ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నం, ఏకదిష్ట ఆరోహణం మరియు $c = 1$ వద్ద విలోమ ప్రమేయం g అవకలనీయం, $g^1(8) = \frac{1}{9}$ అని చూపండి.

సాధన: f బహుపది కావున అవిచ్ఛిన్నం మరియు ప్రతి xకి $f^1(x) = 5x^4 + 4 > 0$ కావున R మీద f ఆరోహణం అందుచేత f ద్విగుణ ప్రమేయం.

$g = f^{-1}$ అయిన $g(f(x)) = x$, g అవకలనీయం మరియు $g^1(f(x)) \cdot f^1(x) = 1$.

$$\Rightarrow g^1(f(x)) = \frac{1}{f^1(x)}$$

$x = 1$ అయిన $f(x) = 8$, $g^1(8) = \frac{1}{5+4} = \frac{1}{9}$

16.6.18 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (S.A.Q.):

(a) c వద్ద $f : R \to R$ అవకలనీయం అయిన $\lim\limits_{n}\left(n\left(f\left(c+\frac{1}{n}\right)-f(c)\right)\right)=f^{1}(c)$ అని చూపండి.

(b) R లో $\lim\limits_{n}\left(n\left(f\left(c+\frac{1}{n}\right)-f(c)\right)\right)$ వ్యవస్థితం అవుతూ c వద్ద అవకలనీయం కాకుండా $f : R \to R$ ప్రమేయం R లో c ఉంటుందని చూపండి.

(c) $f(x)=x^{1/3}\ (x \in R)$ ప్రమేయానికి 0 వద్ద అవకలనీయతను పరిశీలించండి.

(d) $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ 0 & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య}) \end{cases}$

అయిన '0' వద్ద అవకలనీయతను పరిశీలించండి.

(e) R మీద f అవకలనీయం అయిన $f(x) \neq 0$ అయినప్పుడు $|f|$ అవకలనీయం అని చూపి $|f|^{1}(x)$ గణించండి.

(f) అవకలనం చేయండి

(i) $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, x \in R$ అయిన $\left(\sin\left(x^{k}\right)\right)^{m}$

(ii) $|x| < \pi/2$ అయిన $\tan\left(x^{2}\right)$

(g) $L^{1}(x)=\frac{1}{x}$ అయ్యేటట్లు $L : (0, \infty) \to R$ ప్రమేయం వ్యవస్థితం అవుతుంది అనుకుందాం.

(i) $L(2x+3)$ (ii) $\left(L\left(x^{2}\right)\right)^{3}$ (iii) $L(ax)\ (a>0, x>0)$

(iv) $L(L(x)),\ (x>0, L(x)>0)$ల అవకలజాలను కనుక్కోండి.

(h) స్ట్రాడుల్ సిద్ధాంతాన్ని నిరూపించండి.

$c \in I$ వద్ద $f : I \to R$ అవకలనీయం. $\in > 0$ అయిన $c - \delta(\in) < u \le c \le v < c + \delta(\in)$ అయినప్పుడల్లా $\left|f(v) - f(u) - (u-v) f^1(c)\right| < \in (v - u)$ అయ్యేటట్లు $\delta(\in) > 0$ ఉంటుంది.

(i) $x \ge 0$ అయిన $-x \le \sin x \le x$, ప్రతి xకి $-|x| \le \sin x \le |x|$ అని మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతంనుపయోగించి నిరూపించండి.

(j) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ అని చూపండి.

(k) $f : [a, b] \to R$ అవిచ్ఛిన్నం మరియు (a, b) మీద అవకలనీయం, $\lim\limits_{x \to a} f^1(x) = A$ అయిన 'a' వద్ద f అవకలనీయం అని $f^1(a) = A$ అని చూపండి.

(ℓ) $x^2 - 3x + 5$ ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను మరియు f ఆరోహణం, అవరోహణం అయ్యే అంతరాలను కనుక్కోండి.

(m) $h(x) = x^3 - 3x - 4$ యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను మరియు ఆరోహణం, అవరోహణం అయ్యే అంతరాలను కనుక్కోండి.

16.7 16.6.18 లోని S.A.Q.ల సాధనలు:

(a) **సాధన:** $0 < |x - c| < \delta$ అయినప్పుడు $\left|\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} - f^1(c)\right| < \in$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన $\in > 0$ కు అనురూపం ఒక $\delta > 0$ ఉంటుంది. $n \in \mathbb{N}, n > \dfrac{1}{\delta}$ అయిన $\dfrac{1}{n} < \delta, n = c + \dfrac{1}{n}$ కనుగొనిన

$$\left|\frac{f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)}{\frac{1}{n}} - f^1(c)\right| < \in .$$

$$\therefore \quad n > \frac{1}{\delta},\ n \in \mathbb{N} \text{ అయిన } \left|n\left(f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right) - f^1(c)\right| < \in$$

$$\therefore \ \lim \left\{n\left(f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c)\right)\right\} = f^1(c)$$

(b) **సాధన:** $f(x) = x \cdot \sin\frac{\pi}{x}\ (x \neq 0)$

$$= 0 \quad (x = 0)$$

$n \in \mathbb{N}$ అయిన $n\left\{f\left(0+\frac{1}{n}\right) - f(0)\right\}$

$$= n\left\{\frac{1}{n}\sin n\pi\right\} = \sin n\pi = 0$$

$$\Rightarrow \ell im\left(n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right)\right) = 0$$

$x \neq 0$ కాని $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\frac{1}{x}$ మరియు $\sin\frac{1}{x}$, δకు అభిసరణ చెందదు.

కావున '0' వద్ద f అవకలనీయం కాదు.

(c) **సాధన:** $f(x) = x^{1/3} \quad (x \in R)$

$x \neq 0$ అయితే $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{1/3}}{x} = \frac{1}{x^{2/3}}$

$\ell im\frac{1}{n} = 0,\ f\left(\frac{1}{n}\right) = n^{1/3} \Rightarrow \ell im\, f\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$

అందుచేత '0' వద్ద f అవకలనీయం కాదు.

(d) **సాధన:** $f(x) = x^2$ (x అకరణీయ సంఖ్య)

$=0$ (x కరణీయ సంఖ్య)

$x \neq 0$ అయిన $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 0}{x - 0} = x$ (x అకరణీయ సంఖ్య)

$$= \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$ (x కరణీయ సంఖ్య)

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-0}\right| \le |x|$$

$\in > 0, |x| < \in$ అయినప్పుడు $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| < \in$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

$\therefore$ '0' వద్ద f అవకలనీయం మరియు $f^1(0) = 0$

(e) **సాధన:** R మీద f అవకలనీయం అయిన $f(x) \ne 0$ అయ్యే x ల వద్ద $|f|$ అవకలనీయం. అటువంటి 'x'లకు

$$|f|^1(x) = (\text{sgn } f(x)) \cdot f^1(x) = \begin{cases} f^1(x) & (f(x) > 0) \\ -f^1(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

$x \ne 0$ అయ్యే విలువల వద్ద $g(x) = |x|$ అవకలనీయం.

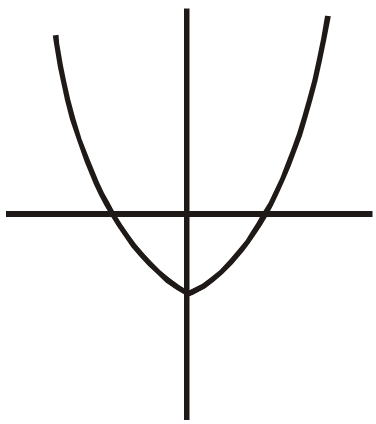
$$g^1(x) = \left\{\begin{matrix} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{matrix}\right\} = \text{sgn}(x)$$

$h(x) = |f(x)|$ అనుకొనిన $h = gof$

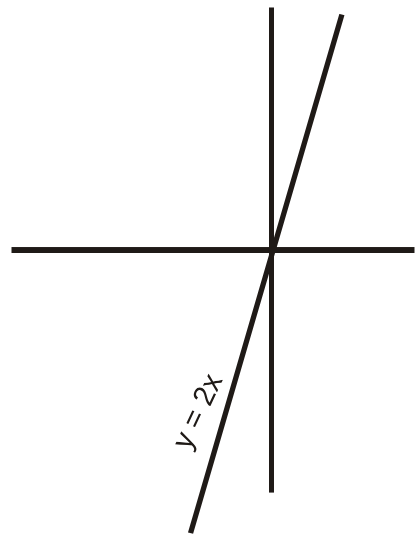
R మీద f అవకలనీయం, R $- \{0\}$ మీద g అవకలనీయం

కావున $f(x) \ne 0$ అయ్యే విలువల వద్ద h అవకలనీయం

$$|f|^1(x) = h^1(x) = g^1(f(x)) \cdot f^1(x) = (\text{sgn } f(x))\, f^1(x)$$



$f(x) = x^2 - 1$



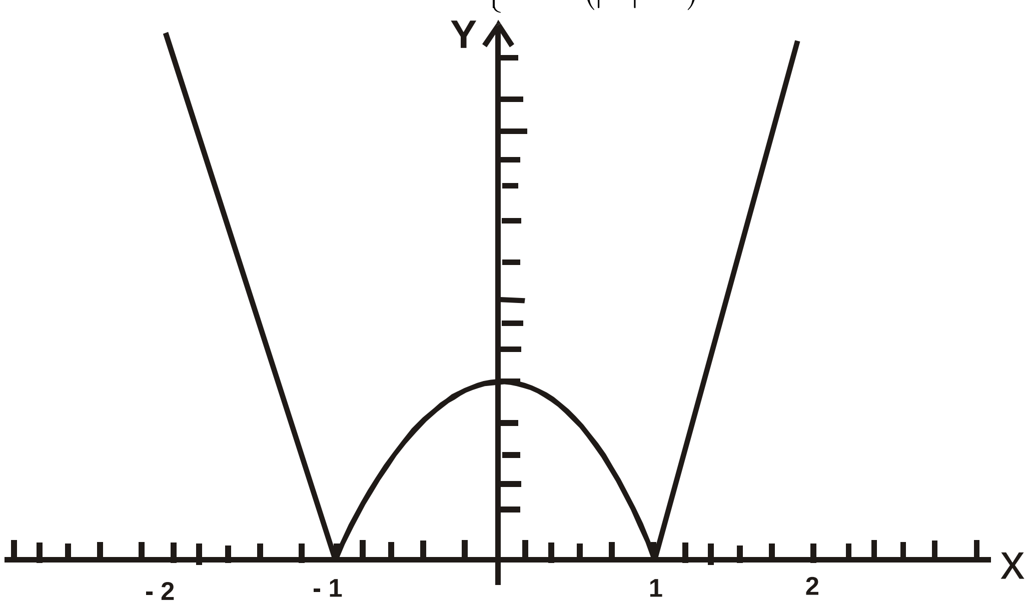
$f^1(x) = 2x$

$x \in R$ అయిన $f(x) = x^2 - 1$ అనుకుందాం.

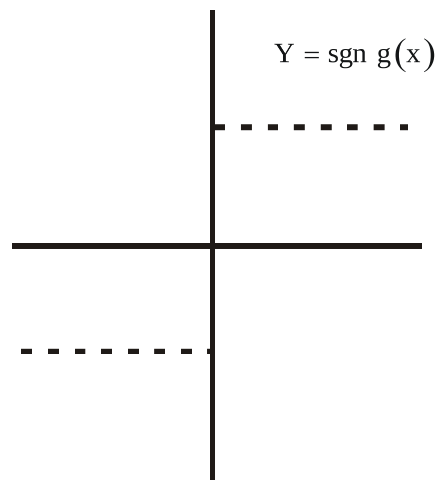
$$\left| f(x) \right| = \left| x^2 - 1 \right| = \begin{cases} x^2 - 1 & (|x| > 1) \\ 1 - x^2 & (|x| < 1) \end{cases}$$

$f^1(x) = 2x$ కావున

$$|f|^1(x) = (\text{sgn } f(x)) \cdot f^1(x) = \begin{cases} 2x & (|x| > 1) \\ -2x & (|x| < 1) \end{cases}$$



$|f|(x) = \left| x^2 - 1 \right|$



$f'(x) = \text{sgn } x$

(g) $x > 0$ అయిన $L^1(x) = \frac{1}{x}$ అయ్యేటట్లు $L : (0, \infty) \to R$ ఒక ప్రమేయం అనుకుందాం.

(i) $x > 0$ అయిన $f(x) = L(2x+3)$ గొలుసు నియమం ప్రకారం

$$f^1(x) = L^1(2x+3)\cdot 2 = \frac{2}{2x+3}$$

(ii) $x > 0$ అయిన $g(x) = \left(L\left(x^2\right)\right)^3$

$$g^1(x) = 3\left(L\left(x^2\right)\right)^2 \cdot L^1\left(x^2\right)\cdot 2x$$

$$= 3\left(L\left(x^2\right)\right)^2 \cdot \frac{2x}{x^2} = \frac{6}{x}\left(L\left(x^2\right)\right)^2$$

(iii) $a > 0,\ x > 0$ అయిన $h(x) = L(ax)$

$$h^1(x) = L^1(ax)\cdot a = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

(iv) $x > 0,\ L(x) > 0$ అయిన $k(x) = L(L(x))$

$$k^1(x) = L^1(L(x))\cdot L^1(x) = \frac{1}{L(x)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\cdot h(x)}$$

(h) **స్ట్రాడుల్ సిద్ధాంతం:**

ఉపపత్తి: c వద్ద f అవకలనీయం కావున $0 < |x-c| < \delta(\in)$ అయియినప్పుడల్లా $\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f^1(c)\right| < \in$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\in > 0$ 8కు అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$ ఉంటుంది.

$c - \delta(\in) < u < c$ అయిన $\left|\frac{f(u)-f(c)}{u-c}\right| < \in \quad (c-u)$

ఇదే విధంగా $c < u < c + \delta(\in)$ అయిన $|f(u) - f(c) - f^1(c)(u-c)| < \in (u-c)$

$\Rightarrow |f(v) - f(u) - (u-v)f^1(c)|$

$= |f(v) - f(c) - f^1(c)\cdot(v-c) + f(c) - f(u) - f^1(c)(u-c)|$

$\leq |f(v) - f(u) - f^1(c)(v-c)| + |f(u) - f(c) - f^1(c)(u-c)|$

$< \in (c-u+v-c) = \in \cdot (v-u)$

(j) $f(x) = \sin x$ అనుకొనిన $f^1(x) = \cos x$

$x < y$ అయిన $[x, y]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నం, (x, y) మీద అవకలనీయం కావున మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f^1(Z)$ అయ్యేటట్లు (x, y)లో Z ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \cos Z \Rightarrow \frac{|\sin x - \sin y|}{|x-y|} = |\cos Z| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$

(i) $g(x) = \sin x$ అయిన $g^1(x) = \cos x,\ x > 0$ అయిన మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g^1(c)$ అయ్యేటట్లు $c \in (0, x)$ ఉంటుంది.

$\Rightarrow \dfrac{\sin\ x}{x} = \cos\ c \Rightarrow -1 \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$

$\Rightarrow -x \le \sin\ x \le x$

$x = 0$ అయిన $\sin\ x = x$

$x < 0$ అయిన $-x > 0$ కావున $-(-x) \le \sin\ (-x) \le -x$

$\Rightarrow x \le -\sin x \le -x \Rightarrow -x \le \sin x \le x$

ప్రతి $x \in \mathrm{R}$ కు $-|x| \le \sin x \le |x|$

(k) $\lim\limits_{x \to a} f^1(x) = A$ కావున $0 < \delta < b-a,\ a \le x < a+\delta$ అయినప్పుడు $|f^1(x) - A| < \in$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది. $a < y < a+\delta$ అయిన మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a} = f^1(x_0)$ అయ్యేటట్లు $(a,\ y)$లో x_0 ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(a)}{y-a} - A\right| = \left|f^1(x_0) - A\right| < \in$$

$$\Rightarrow f'(A) = \lim_{y \to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = A$$

(ℓ) $f(x) = x^2 - 3x + 5 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{4}{5}$

$f^1(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$f^{11}(x) = 2 > 0$ కావున $x = \frac{3}{2}$ వద్ద f కనిష్టత పొందుతుంది.

$x > \frac{3}{2}$ అయిన $f^1(x) > 0,\ x < \frac{3}{2}$ అయిన $f^1(x) < 0$

$\therefore \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$లలో f ఆరోహణం మరియు $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$లో f అవరోహణం.

గమనిక: $a \neq 0$ అయిన $x = -\dfrac{1}{2a}$ వద్ద $f(x) = ax^2 + bx + c$ అంత్యమ విలువలు ఉంటాయి.

$a > 0$ అయిన అది కనిష్టం, $a < 0$ అయిన గరిష్టమవుతుంది. ఈ రెండు సందర్భాలలో అంత్యమ విలువ $\dfrac{4ac - b^2}{4(1)}$

(m) $h(x) = x^3 - 3x - 4$

$h^1(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

$x = \pm 1$ అయిన $h^1(x) = 0$

$x^2 < 1$ అనగా $|x| < 1$ అయిన $h^1(x) < 0$

$x^2 > 1$ అనగా $|x| > 1$ అయిన $h^1(x) > 0$

$(-\infty, -1)$ అంతరంలో h ఆరోహణం, $(-1,1)$ అంతరంలో h అవరోహణం.

$h(-1) = -1+3-4 = -2,\ h(1) = 1-3-4 = -6$

$h(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right)$

కావున $x\ y - \infty$ అయిన $h(x) \to -\infty$ మరియు $x \to +\infty$ అయిన $h(x) \to +\infty$.

16.9 సారాంశము:

ప్రమేయాన్ని ఒక బిందువు వద్ద అవకలన భావాన్ని ప్రవేశపెట్టిన తరువాత ప్రమేయపు అవకలన భావాన్ని గురించి చర్చించి తరువాత కేరథోడోరీ సిద్ధాంతం మరియు గొలుసు నియమాలను చర్చించడం జరిగినది. తదనంతరం మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాలను వాటి అనువర్తనాలను చర్చించడం జరిగినది. అవకలనం గురించి అవగాహన కొరకు తగినన్ని ఉదాహరణలు, అనువర్తనాలు పొందుపరచడం జరిగింది.

16.10 సాంకేతిక పదాలు:

అవకలనీయత

అవకలనం

మధ్యంతర మూల్యం

గరిష్ఠత

కనిష్ఠత

అంత్యమ విలువలు

16.11 అభ్యాసం:

1. నిర్వచనం ఉపయోగించి కింది ప్రమేయాల అవకలనాన్ని కనుక్కోండి.

(i) $f(x)=\begin{cases} x^3 & (x>0) \\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$ (ii) $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$

(iii) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x>0) \\ \dfrac{1}{x^2} & (x\le 0)\end{cases}$ (iv) $h(x)=|x|^3 \ (x\in \mathsf{R})$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x^5}\ (x\ne 0),\ f(0)=0$ ప్రమేయం '0' వద్ద అవకలనీయమవుతుందా? ఎందుకు?

3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ 0 & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య})\end{cases}$

అయిన '0' f వద్ద f అవకలనీయమని చూపి, $f^1(0)$ను కనుక్కోండి.

4. కింది వాటిలో ఏది నిజం? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.

(a) $c\in \mathsf{R}$ వద్ద f అవకలనీయం అయిన $|f|$ కూడ అవకలనీయం

(b) $c\in \mathsf{R}$ వద్ద $|f|$ అవకలనీయం అయిన f అవకలనీయం

5. కింది వాటిని అవకలనం చేయండి.

(a) $g(x)=\sqrt{5-2x+x^2}$

(b) $k(x)=\tan(x^2),\ |x|<\pi/2$

6. ప్రతి $x \in R$ కు $f(x) = f(-x)$ అయిన f సరి ప్రమేయం.

ప్రతి $x \in R$ కు $f(-x) = -f(x)$ అయిన f బేసి ప్రమేయం.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ -x & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య}) \end{cases}$

అయిన f సరి ప్రమేయం అని చూపండి.

(b) $g(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ x & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య}) \end{cases}$

అయిన g బేసి ప్రమేయం అని చూపండి.

(c) f బేసి మరియు అవకలనీయం అయిన f^1 సరి ప్రమేయం అని చూపండి.

(d) సరి మరియు అవకలనీయం అయిన f^1 బేసి ప్రమేయం అని చూపండి.

(e) అవకలనీయం కాని సరి మరియు బేసి ప్రమేయాలకు ఉదాహరణలు ఇవ్వండి.

7. $h(x) = x^3 + 2x + 1 \quad (x \in R)$ మరియు hకు విలోమం వ్యవస్థితం అయితే h^{-1} అవకలనీయం అని మరియు $y = 0,\ y = 2$ అయినప్పుడు $\left(h^{-1}(y)\right)$ విలువను కనుక్కోండి.

8. ఉప సిద్ధాంతం 16.4.10ను నిరూపించండి.

9. ఉప సిద్ధాంతం 16.4.11ను నిరూపించండి.

10. $f(x) = \sin x,\ \ x \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$ అయిన f ఆరోహణం మరియు అన్వేకం అని చూపండి.

11. $f(x) = \begin{cases} x^n & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

$n \in \mathbb{N}$ అయిన $x \neq 0$ వద్ద f అవకలనీయం అని చూపండి. '0' వద్ద f అవకలనీయమవుతుందా?

x యొక్క ఏ విలువలకు f^1 అవకలనీయం.

12. కింది వాని అవకలనాలను కనుక్కోండి.

(a) $\sqrt{5-2x+x^2}$ (b) $\left(\sin x^k\right)^m$ $(m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$

13. కింది ప్రమేయాలు ఏ బిందువుల వద్ద అవకలనీయాలవుతాయో కనుగొని అక్కడ అవకలనాన్ని కనుక్కోండి.

(a) $|x+1|+|x-1|$ (b) $2x+|x|$ (c) $x|x|$ (d) $|\sin x|$

16.12 నమూనా ప్రశ్నలు:

1. అవకలనంలో గొలుసు నియమాన్ని వ్రాసి నిరూపించండి.
2. (a, b) మీద f అవకలనీయం అయిన $[a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నమని చూపండి. దీని విపర్యయం నిజమా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.
3. రోల్ సిద్ధాంతము ప్రవచించి నిరూపించండి.
4. మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.
5. కేర్దాడోరా సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.
6. డార్‌బో సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.
7. (a, b) మీద f అవకలనీయం, $c \in (a, b)$ వద్ద గరిష్ఠ విలువ ఉంటే $f^1(c)=0$ అని చూపండి.
8. $[-1, 1]$లో $f(x)=x^3-x$ అయిన $f^1(x)=0$ అయ్యే x విలువలను $(-1, 1)$ అంతరంలో కనుక్కోండి.
9. $r>0$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య $g: R \to R$ ప్రమేయాన్ని

   $g(x)=x^r \sin\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $g(0)=0$గా నిర్వచిస్తే '0' వద్ద g అవకలనీయం కావటానికి r విలువను కనుక్కోండి.
10. $f(x)=|x|+|x+1|$ యొక్క అవకలనీయతను చర్చించండి.
11. $x \in R$ అయిన మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి $e^x > 1+x$ అని చూపండి.

16.13 ప్రయోగాత్మక నమూనా ప్రశ్న:

$[-1, 1]$ అంతరంలో ప్రమేయం g,

$-1 \le x < 0$ అయినప్పుడు $g(x) = -1$

$x = 0$ అయినప్పుడు $g(x) = 0$

$0 < x \le 1$ అయినప్పుడు $g(x) = 1$

గా నిర్వచిస్తే, ప్రతి xకి $f'(x) = g(x)$ అగునట్లు $[-1, 1]$ మీద అవకలనీయ ప్రమేయం f వ్యవస్థితం కాదని చూపుము.

ఆశయం: $[-1, 1]$ మీద అవకలనీయమై, ప్రతి xకి $f'(x) = g(x)$ అగునట్లు ప్రమేయం f ఉండదని చూపుట.

నిర్వచనం: R లో I అంతరం, $a \in I$, $f : I \to$ R, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ వ్యవస్థితమైతే a వద్ద f అవకలనీయమని, ఈ అవధి a వద్ద f అవకలని అనీ అంటాము. దీనిని $f'(a)$ చేత సూచిస్తాము.

డార్బూ సిద్ధాంతం: $[-1, 1]$ మీద f అవకలనీయం. $f'(-1)$, $f'(1)$ ల మధ్య k వాస్తవ సంఖ్య అయితే $f'(x) = k$ అగునట్లుగా (a, b)లో x వుంటుంది.

సాధన: $[-1, 1]$లోని ప్రతి xకి $f'(x) = g(x)$ అగునట్లు f ఉందనుకోండి.

$g(-1) = f'(-1) = -1$, $g(1) = f'(1) = 1$ కాబట్టి $-1 < k < 1$ అయినపుడు డార్బూ సిద్ధాంతం నుండి $g(x) = f'(x) = k$ అగునట్లు ఒక x, $(-1, 1)$లో వ్యవస్థితం కావాలి. g వ్యాప్తి $\{-1, 0, 1\}$ కాబట్టి ఇది అసంభవం.

పాఠ్యభాగ రచయిత

K. సాంబశివరావు

పాఠము - 17

అవకలనం - II

లోపిటాల్ సూత్రం మరియు టైలర్ సిద్ధాంతం

17.1 లక్ష్యము:

ఈ అధ్యాయంలో అవకలన కలన గణితంలో "అనిశ్చిత రూపాల" పై ఆధారపడే సమస్యలను సాధించటానికి ఉపయోగపడే మెళుకువులను ప్రవేశపెట్టిరి టైలర్ సిద్ధాంతం మరియు అనువర్తనాలను విద్యార్థి ప్రయోగార్థమై ముందుంచుట.

17.2 అంశాలక్రమము:

17.3 ఉపోద్ఘాతము:

వక్రం యొక్క రేఖా చిత్రం రెండు బిందువులను కలిపే జ్యాకి సమాంతరంగా ఒక స్పర్శరేఖ వుంటుందని మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం నుండి స్పష్టమౌతోంది. దీని అనువర్తనాల విశిష్టత ఈ సిద్ధాంతానికి అవకలన గణితంలో ప్రత్యేక స్థానం కల్పిస్తోంది. ఇంతవరకు $\frac{f}{g}$ అవధి గణనం, g అవధి శూన్యేతరమైనప్పుడు మాత్రమే సంభవమయ్యేది. $\lim\limits_{x} f(x) = \lim\limits_{x} g(x) = 0$ లేదా $\lim\limits_{x} g(x) = \infty$ అయిన సందర్భాలలో $\lim\limits_{x} \frac{f(x)}{g(x)}$ గణించే విధానాలు చర్చించుట జరగలేదు.

$\ell im\ f(x) = \ell im\ g(x) = 0$ అయిన $\frac{f}{g}$ అనిశ్చిత రూపం $\frac{0}{0}$ లో వుందంటాం. ఈ రూపంలో వున్నప్పుడు $\frac{f}{g}$ అవధి గణనంలో అవకలనం ప్రధాన పాత్ర పోషిస్తుంది.

లోపిటాల్ (L' Hospital) సూత్రాలుగా పిలువబడే ఈ అవధి సిద్ధాంతాలు మార్కస్ గల్లేమిలోపటాల్ వ్రాసిన "L' Analysius infinement partits" అనే పేరుతోనున్న పుస్తకంలో మొదటిసారిగా అచ్చు పుస్తకంలోనికి చేరినప్పటికీ వీటిని మొదటిసారి కనుగొన్న ఘనత జాన్ బెర్నోలీకి దక్కుతుంది. ఈయన వద్ద లోపిటాల్ అవకలన గణిత శాస్త్రం అభ్యసించాడు. బెర్నోలీచే కనుగొనబడిన ఈ సిద్ధాంతాలను మెరుగవరచి, తీర్చిదిద్ది లోపిటాల్ విస్తరణ చేశారు. $\frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0, \infty-\infty$ యిత్యాది అనిశ్చిత రూపాలను $\frac{0}{0}$ లేదా $\frac{\infty}{\infty}$ రూపాలలోకి బీజీయ ప్రక్రియల ద్వారా మార్చగలిగినందున ఈ రెంటికి అత్యంత ప్రాధాన్యత సంతరించుకొన్నది.

బహుపదుల ద్వారా ఒక ప్రమేయపు ఉజ్జాయింపు కనుగొనడం గణిత విశ్లేషణలో ప్రధానమైన విషయం. దీనిని మొదటిసారిగా బ్రూక్ టేలర్ అను శాస్త్రవేత్త ప్రవేశపెట్టినాడు. ఈ ఉజ్జాయింపు గణనాన్కి ఉపయోగించే శిష్ట పదం (remainder) గురించి మరియు ఈ ఉజ్జాయింపు ద్వారా ఉత్పన్నమయ్యే వ్యత్యాస దోషం గురించి వివరాల సేకరణ లెగ్రాంజి ప్రారంభించాడు.

17.4 లోపిటాల్ సూత్రాలు (L' Hospital Rules):

17.4.1 సిద్ధాంతం: $[a, b]$ మీద f, g నిర్వచింపబడి $f(a) = g(a) = 0, a < x < b$ అయిన $g(x) \neq 0$. a వద్ద f, g అవకలనీయం మరియు $g^1(a) \neq 0$ అయిన $\ell im_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^1(a)}{g^1(a)}$.

ఉపపత్తి: $a < x < b$ అయిన $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \frac{x-a}{g(x)-g(a)}$

$$\ell im_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell im_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\ell im_{x\to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f^1(a)}{g^1(a)}$$

17.4.2 ఉదాహరణ: $f(a), g(a)$ లలో ఒక్కటి శూన్యేతరమైన పై సిద్ధాంతం నిజం కాదు కింది ఉదాహరణ ద్వారా తెలియును.

$f(x) = x+4,\ g(x) = 2x+3$ అనుకుందాం.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4,\ \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 3$ కావున $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4}{3}$

ప్రతి x కి $f^1(x) = 1,\quad g^1(x) = 2$ కనుక $\dfrac{f^1(0)}{g^1(0)} = 1/2$

17.4.3 కోషీ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం: $[a, b]$ మీద f, g అవకలనీయాలు (a, b)లోని ప్రతి x వద్ద $g^1(x) \neq 0$ అయిన $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f^1(c)}{g^1(c)}$ అయ్యేటట్లు (a, b)లో కనీసం ఒక c ఉంటుంది.

ఉపపత్తి: $g(a) = g(b)$ అనుకుంటే, రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $g^1(c) = 0$ అయ్యేటట్లు (a, b)లో c వ్యవస్థితం. ఇది దత్తాంశమునకు విరుద్ధం కావున $g(a) \neq g(b)$. $[a, b]$లోని ప్రతి x కి

$\phi(x) = A\big(g(x) - g(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big)$ మరియు $\phi(a) = \phi(b) = 0$

అయ్యేటట్లు $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ను నిర్వచిస్తే $A = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ అవుతుంది.

$[a, b]$ మీద ϕ అవిచ్ఛిన్నం, (a, b) మీద ϕ అవకలనీయం మరియు $\phi(a) = \phi(b) = 0$ కావున రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $\phi^1(c) = 0$ అయ్యేటట్లు ఒక c (a, b)లో ఉంటుంది.

ఇప్పుడు $A \cdot g^1(c) - f^1(c) = 0 \Rightarrow A = \dfrac{f^1(c)}{g^1(c)}$

$$\Rightarrow \frac{f^1(c)}{g^1(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

జ్యామితీయ వివరణ: $H(t) = \big(f(t), g(t)\big)$గా నిర్వచిస్తే $H : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ప్రమేయం తలంలో ఒక వక్రాన్ని సూచిస్తుంది. దీని నుండి ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు, $H(a), H(b)$ బిందువులను కలిపే జ్యా వాలుకు సమానం అయ్యేటట్లు $H(c) = \big(f(c),\ g(c)\big)$ అను బిందువు వక్రం మీద ఉంటుందని గమనించవచ్చును.

గమనిక: $g(x) = x$ అయిన కోషీ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం అవుతుంది.

17.4.4 Rule I: $-\infty \le a < c < b \le \infty$, (a, b) మీద f, g అవకలనీయం మరియు (a, b)లోని ప్రతి a కు $g^1(x) \ne 0$ మరియు $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$ అనుకొనుము.

(a) $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f^1(x)}{g^1(x)} = L \in R$ అయిన $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

(b) $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f^1(x)}{g^1(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$ అయిన $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

b వద్ద ఎడమ అవధులు c వద్ద అవధులు పరిగణించినప్పుడు ఇట్టి ప్రతిపాదనలు నిజం.

17.4.4 Rule II: $-\infty \le a < c < b \le \infty$, (a, b) మీద f, g అవకలనీయం, (a, b)లోని ప్రతి xకి $g^1(x) \ne 0$, $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = \pm\, \infty$ అనుకొనిన

(a) $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f^1(x)}{g^1(x)} = L \in R$ అయిన $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

(b) $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f^1(x)}{g^1(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$ అయిన $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

ఇటువంటి ప్రతిపాదనలు b వద్ద ఎడమ అవధులకు, c వద్ద అవధులకు నిజం.

$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^\infty, \infty^0, 0^0$ రూపాలను బీజీయ పరిక్రియలు, సంవర్గమానాలను ఉపయోగించి పైన తెల్పిన సందర్భాలలోనికి మార్చవచ్చును.

Rule I, Rule IIల ఉపపత్తి 17.5 లో ఇవ్వడం జరిగినది.

17.4.6 ఉదాహరణలు:

(1) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ను కనుక్కోండి.

$f(x) = \sin x,\ g(x) = \sqrt{x} \quad \forall \quad x \in (0, \infty)$

$$\lim_{x \to 0+} \sin x = 0 = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x}$$

$$f^1(x) = \cos x, \ g^1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{f^1(x)}{g^1(x)} = \frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x} \cdot \cos x$$

కాని $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0, \ \lim_{x \to 0} \cos x = 1$ కావున $\lim_{x \to 0} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = 0$.

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = 0$$

(ii) $\lim_{x \to 0+} \frac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$ ను కనుక్కోండి.

$x \in (0, \infty)$ మీద $\cos x, \sqrt{x}$ లు నిర్వచింపబడినవి.

$$\lim_{x \to 0+} (1-\cos x) = 0 = \lim_{x \to 0+} \sqrt{x}$$

$$(1-\cos x)^1 = \sin x, \ \left(\sqrt{x}\right)^1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0+} 2\sqrt{x} \sin x = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0+} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = 0$$

రెండవ పద్ధతి:

$$x > 0 \text{ అయిన } \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = -\left(\frac{\cos x - \cos 0}{x}\right)\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0+} -\left(\sqrt{x}\right) \cdot \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x - \cos 0}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

1వ పద్ధతి: ప్రతి x కు $f(x) = e^x$ అవకలనీయం మరియు $f^1(x) = e^x$ కావున

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f^1(0) = e^0 = 1$$

2వ పద్ధతి: $f(x) = e^x - 1,\ g(x) = x$ అనుకొనిన

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x) \text{ మరియు}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(iv) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$f(x) = e^x - 1 - x,\ g(x) = x^2$ అనుకుంటే

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ మరియు $f^1(x) = e^x - 1,\ g^1(x) = 2x$

$$\text{(iii) నుండి } \lim_{x \to 0} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

17.4.7 ఉదాహరణలు:

(a) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\cos x}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to 0+} 2\sqrt{x} \cos x = 0$

ఇక్కడ $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x}$ లో $(0, \infty)$ మీద నిర్వచించబడినవి మరియు

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} g(x) = 0$, $(0, \infty)$లో $g^1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}} \neq 0$ కావున Rule Iను ఉపయోగించవచ్చును.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$

ఇక్కడ $f(x) = 1-\cos x$, $g(x) = x^2$లు $(0, \infty), (-\infty, 0)$ల మీద నిర్వచింపబడినవి.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ $(0, \infty) \cup (-\infty, 0)$లో $g^1(x) \neq 0$ కావున Rule Iను ఉపయోగించవచ్చును.

'0' వద్ద ఎడమ అవధి, అవధిలను పరిశీలిద్దాం.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{2x} \text{ మరియు}$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0-} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{2x}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ ను కనుగొనుటకు పై పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = e^0 = 1$

ఇక్కడ $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

ప్రతి xకు $g^1(x) = 0$ కావున Rule Iను ఉపయోగించవచ్చును.

(d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1/x}{1} = 1$

ఇక్కడ $f(x) = \ln x,\ g(x) = x-1,\ (0, \infty)$ మీద ప్రమేయాలు నిర్వచింపబడినవి.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 0$$

$(0, \infty)$లోని ప్రతి xకి Rule Iను ఉపయోగించి $x = 1$ వద్ద

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1} = (\ln x)^1 = \dfrac{1}{1} = 1$ అని కూడా చెప్పవచ్చును.

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

$f(x) = \ln x,\ \ g(x) = x$ కావున $f^1(x) = \dfrac{1}{x},\ g^1(x) = 1$

Rule II ప్రకారం $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$

(f) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} \cdot x^2$

$f(x) = x^2,\ \ g(x) = e^x \Rightarrow f^1(x) = 2x,\ \ g^1(x) = e^x$

Rule II ప్రకారం $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{e^x}$

$2x,\ e^x$ కు మరల Rule II ను ఉపయోగించగా

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(g) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ell n (\sin x)}{\ell n \ x}$

$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ మీద $f(x) = \ell n (\sin x),\ g(x) = \ell n \ x \Rightarrow f^1(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x},\ \ g^1(x) = \dfrac{1}{x}$

Rule II ప్రకారం, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ell n (\sin x)}{\ell n \ x} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\cos x / \sin x}{1/x}$

$$= \lim_{x \to 0+} \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0+} \cos x \cdot \lim_{x \to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

17.4.8 మరికొన్ని అనిశ్చిత రూపాలు: $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ రూపాలను బీజీయ ప్రక్రియలు సంవర్గమానాలను ఉపయోగించి లోపిటాల్ సూత్రాలలోనికి మార్చవచ్చునని చెప్పుకున్నాము. వీటిని సిద్ధాంతాల రూపంలో కన్నా ఉదాహరణల ద్వారా పరిశీలిద్దాం.

ఉదాహరణలు:

(a) $I = \left(0, \pi/2\right),\ \lim\limits_{x \to 0+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$ ఇది $\infty - \infty$ అనిశ్చిత రూపంలో ఉంది.

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \to 0+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

(b) $I = (0, \infty),\ \lim\limits_{x \to 0+} x \cdot \ell n \ x$ ఇది $0 \cdot (-\infty)$ రూపంలో ఉంది

$$\lim_{x \to 0+} (x \cdot \ell n \ x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ell n \ x}{1/x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

(c) $x > 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to 0+} \left(x^x\right)$ ఇది 0^0 రూపంలో ఉన్నది.

$x^x = e^{x \cdot \ln x}$. $y \to e^y$ ప్రమేయం '0' వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కావున $\lim\limits_{x \to 0+} x^x = e^0 = 1$

(d) $x > 1$ అయిన $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ఇది 1^∞ రూపంలో ఉంది.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\left(-x^{-2}\right)}{-x^{-2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

1 వద్ద $y \to e^y$ అవిచ్ఛిన్నం కావున $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(e) $x > 0$ అయిన $\lim\limits_{x \to 0+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ఇది ∞^0 రూపంలో ఉంది.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{0} = 1$$

17.4.5 S.A.Q.: $(0, \infty)$ మీద f అవకలనీయం మరియు $\lim_{x \to \infty} \left(f(x) + f^{1}(x_1)\right) = L$ అయిన $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ మరియు $\lim_{x \to \infty} f^{1}(x) = 0$ అని చూపండి.

17.4.6 S.A.Q.: $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ 0 & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య}) \end{cases}$

మరియు $g(x) = \sin x \ (x \in \mathrm{R})$ అయిన $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ అని చూపండి. లోపిటాల్ సూత్రం ఎందుకు ఉపయోగించలేమో వివరించండి.

17.5 లోపిటాల్ సూత్రాల ఉపపత్తులు:

17.5.1 లోపిటాల్ సూత్రం - I కి ఉపపత్తి:

$a < \alpha < \beta < b, \ g(\beta) = g(\alpha)$ అయిన మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $g^{1}(c) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0$ అయ్యేటట్లు c, (α, β)లో ఉంటుంది.

ఇది దత్తాంశానికి విరుద్ధం కావున $\alpha \neq \beta$ అయినప్పుడు $g(\alpha) \neq g(\beta)$.

కోషీ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం, (α, β)లో u కి $\frac{f^{1}(u)}{g^{1}(u)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} \quad \cdots \quad (2)$

అయ్యేటట్లుగా వుంటుంది.

(a) $L = \lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f^1(x)}{g^1(x)} \in R$. $\in > 0$ అయితే

$c = a + \delta,\ a < c < b,\ x \in (a,\ c)$ అయినప్పుడు $L - \dfrac{\in}{2} < \dfrac{f^1(x)}{g^1(x)} < L + \in/2 \quad \cdots \quad (3)$

అయ్యేటట్లు $\in$కి అనురూపంగా $\delta > 0$ ఉంటుంది.

$$\Rightarrow L - \in/2 < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \in/2$$

$\alpha \to a + 0,\ a < \beta \le c$ అయినప్పుడు $L - \in < L - \in/2 \le \dfrac{f(\beta)}{g(\beta)} \le L + \in/2 = L + \in$

కాబట్టి $\beta \in (a,\ c)$ అయిన $\left|\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)} - L\right| < \in$

అందుచేత $\lim\limits_{\beta \to a+} \dfrac{f(\beta)}{g(\beta)} = L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$

(b) $L = +\infty$ అయితే $a < x < c$ అయినప్పుడల్లా $\dfrac{f^1(x)}{g^1(x)} > M$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $M > 0$కు

అనురూపంగా (a, b)లో c ఉంటుంది. $a < \beta < c$ అనుకుందాం

$(a,\ c)$లోని ప్రతి αకి $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \dfrac{f^1(u)}{g^1(u)}$ అయ్యేటట్లు $u \in (\alpha, \beta)$ ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M \cdot \forall\ \alpha \in (a,\ c)$$

$\lim\limits_{x \to a+} f(\alpha) = \lim\limits_{x \to a+} g(\alpha) = 0, \alpha \to a+$ అయిన

$\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)} \ge M$ ఇది ప్రతి (a, c)లోని ప్రతి βకి నిజం కావున

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty = L$$

$L = -\infty$ అయినపుడు పై విధముగా నిరూపించవచ్చును.

17.5.2 సిద్ధాంతం: $-\infty \le a < b \le \infty$, (a, b) మీద f, g అవకలనీయం (a, b)లోని ప్రతి xకి $g^1(x) = 0$ మరియు $\lim_{x \to b-0} f(x) = 0 = \lim_{x \to b-0} g(x)$ అనుకుందాం.

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = L \in \mathsf{R} \quad \text{లేక} \quad \lim_{x \to b-0} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = L \in \{-\infty, \infty\}$$

వ్యవస్థితం అయిన $\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ఉపపత్తి: పై ఉపపత్తికి సరూపం.

ఉప సిద్ధాంతం: $-\infty \le a < c < b \le \infty$, (a, b) మీద f, gలు అవకలనీయాలు ప్రతి $x \in (a, b)$కు $g^1(x) \ne 0$ మరియు $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = L$ అయిన $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

17.5.3 లోపిటాల్ సూత్రం - II కి ఉపపత్తి:

$a < \alpha < \beta < b$ అయిన $\frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g^1(u)$ అయ్యేటట్లు (α, β)లో u ఉంటుంది.

$g^1(u) \ne 0, g(\beta) \ne g(\alpha)$ కావున కోషీ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం ప్రకారం $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f^1(t)}{g^1(t)}$ అయ్యేటట్లు $t \in (\alpha, \beta)$లో ఉంటుంది.

(a) $\lim_{x \to a+} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = \ell$ కావున $a < x \le c$ అయినప్పుడు $\left| \frac{f^1(x)}{g^1(x)} - \ell \right| < \in$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా (a, b)లో c ఉంటుంది.

$\Rightarrow a < x \le c$ అయిన $\ell - \in < \dfrac{f^1(x)}{g^1(x)} < \ell + \in$

$\Rightarrow a < \alpha < \beta \le c$ అయిన $\ell - \in < \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < \ell + \in \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$

$\beta \in (a,\ c)$ అనుకుందాం. $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = +\infty$ కావున $\alpha \in (a\ ,\ c_1)$ అయినప్పుడు $g(\alpha) > 1 + |g(\beta)|$ మరియు $\alpha < c_1 < \beta$ అయ్యేటట్లు c_1 ఉంటుంది.

$\Rightarrow \alpha \in (a_1\ \ c_1)$ అయిన $g(\alpha) > 0$ మరియు $g(\alpha) > g(\beta)$

$$\Rightarrow \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{g(\alpha)} > 0$$

$$\Rightarrow (\ell - \in)\ \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{g(\alpha)} < \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{f(\alpha)} < (\ell + \in)\ \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{g(\alpha)}$$

$$\Rightarrow (\ell - \in)\left(1 - \frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} - \frac{f(\beta)}{g(\beta)} < (\ell + \in)\left(1 - \frac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right)$$

$\lim\limits_{x \to a+} g(x) = +\infty$ కావున $\lim\limits_{\alpha \to a+} \dfrac{g(\beta)}{g(\alpha)} = 0$

$\alpha \in (a,\ d)$ అయినప్పుడు $0 < \dfrac{g(\beta)}{g(\alpha)} < 1$ మరియు $\dfrac{|f(\beta)|}{g(\alpha)} < \delta$ అయ్యేటట్లు ఇచ్చిన ప్రతి $\delta \in (0,\ 1)$కు అనురూపంగా $d \in (a\ ,\ c_1)$ ఉంటుంది.

$$\Rightarrow (\ell - \in)\ (1 - \delta) - \delta < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} < (\ell + \in) + \delta$$

$0 < \delta <$ కనిష్ఠం $\left\{1, \in, \dfrac{\in}{1 + |c|}\right\}$గా తీసుకొనిన

$a < \alpha < \delta$ అయినప్పుడు $\ell - 2\in \leq \dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \leq \ell + 2\in$

$\Rightarrow a < \alpha < \delta$ అయిన $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leq 2\in$

$\therefore \lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \ell$

(b) $\ell = +\infty$ అయిన (a, c)లోని ప్రతి uకి $\dfrac{f^1(u)}{g^1(u)} > M$ అయ్యేటట్లు $M > 1$కు అనురూపంగా $c \in (a, b)$ ఉంటుంది.

$a < \alpha < \beta < c$ అయిన $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M$

$\lim\limits_{x \to a+} g(x) \to \infty$ కావున $g(\alpha) > 2g(\beta)$ మరియు $g(\alpha) > 0$ అయ్యేటట్లు $\beta, (a,\ c)$లో cకి అనురూపంగా (a, β)లో c ఉంటుంది.

$\Rightarrow\ a < c < c_1$ అయిన $0 < \dfrac{g(\beta)}{g(\alpha)} < \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{g(\alpha)} > M\left(1 - \dfrac{g(\beta)}{g(\alpha)}\right) > \dfrac{M}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} > \dfrac{1}{2} M + \dfrac{f(c)}{g(c)} > \dfrac{1}{2}(M - 1),\ < \in (a,\ c_1)$

ఇది ప్రతి $M > 1$కు నిజం కావున $\lim\limits_{\alpha \to a+} \dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = +\infty$

ఇదే విధంగా $\ell = -\infty$ అయినప్పుడు నిరూపించవచ్చును.

గమనిక: b యొక్క ఎడమ అవధి వద్ద కూడ లూపిటాల్ - II నిజం అవుతుంది.

ఉప సిద్ధాంతం: $-\infty \le a < c < b \le \infty$, (a, b) మీద f, g అవకలనీయాలు, (a, b)లోని ప్రతి x కి $g^1(x) \neq 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = \ell \in \mathsf{R} \text{ లేక } \ell \in \{-\infty, \infty\}, \quad \lim_{x \to c} g(x) = +\infty \text{ అయిన } \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

17.6 హెచ్చు పరిమాణ అవకలనీయాలు:

I అంతరం, $f : I \to \mathsf{R}$ అవకలనీయమయినప్పుడు I లోని ప్రతి x వద్ద f అవకలని $f^1(x)$తో సూచిస్తాం. ఇట్లే I లోని ప్రతి x వద్ద f^1 అవకలనీయమైనప్పుడు x వద్ద f^1 అవకలని $f^{11}(x)$ని x వద్ద f రెండో అవకలని అంటాం. దీన్ని $f^{11}(x)$తో సూచిస్తాం. $f^{(0)}(x) = f(x)$ అని వ్రాసి, అనుగమనీయంగా x వద్ద f యొక్క $(n-1)$ అవకలనిని $f^{(n)}(x)$తో సూచిస్తాం. $f^{(n)}$ని, f యొక్క n – వ అవకలని అంటాం. x వద్ద $f^{(n)}$ వ్యవస్థితం కావడాన్కి x చుట్టూ ఒక సామీప్యంలో $f^{(n-1)}$ నిర్వచితమైయుండి x వద్ద $f^{(n-1)}$ అవకలనం కావలె. $(f^n(x))$ అనుక్రమాన్ని x వద్ద f పారంపర్య అవకలనిల అనుక్రమమంటాం.

x వద్ద f స్వభావం తెలిసికొనుటలో పారంపర్య అవకలనం ఉపయోగిస్తుంది.

17.6.1 టేలర్ సిద్ధాంతం: $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ అనుకొనుము. f మరియు f యొక్క అవకలజాలు $f', f'', \cdots\cdots\cdots, f^{(n)}$లు I మీద అవిచ్ఛిన్నాలు మరియు (a, b) మీద $f^{(n+1)}$ వ్యవస్థితమయ్యేటట్లు $f : I \to \mathsf{R}$ తీసుకొనుము. $x_0 \in I$ అయితే I లో ఉన్న ప్రతి x కి అనుగుణంగా

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \cdot\cdot\cdot + (x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(c)$$ అయ్యేటట్లు x, x_0ల మధ్య ఒక c వ్యవస్థితం.

ఉపపత్తి: x_0, x అంత్య బిందువులుగా గల సంవృతాంతరం J అని వ్రాయుము.

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x - t) f^1(t) + \cdot\cdot\cdot + \frac{(x-t)^n}{n!} f^n(x)$$

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x - t}{x - x_0}\right)^{n+1} F(x_0)$$ గా నిర్వచింపబడినచో $G(x_0) = G(x) = 0$ మరియు

$$F^1(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)$$

రోల్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $G^1(c)=0,\ \ x_0 \neq c \neq x,\ \ J$ లో c ఉంటుంది.

$$\Rightarrow F^1(c)+(n+1)\cdot\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}\ F(x_0)=0$$

$$\Rightarrow F(x_0)=-\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\cdot F^1(c)$$

$$=\frac{1}{n+1}\ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\cdot\frac{(x-c)^n}{n!}\ f^{n+1}(c)$$

$$=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\,f^1(x_0)+\ \cdots\ +\frac{(x-x_0)^n}{n!}\ f^n(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{n+1}(c)$$

17.6.2 శిష్ట పదానికి లెగ్రాంజ్ రూపం (Lagrange's form of Remainder):

$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f^1(x_0)+\ \cdots\ +\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}\ f^n(x_0)$ అనుకొనిన P_nను nవ తరగతి టేలర్ బహుపది అంటాం. $R_n(x)=\dfrac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ను శిష్టపద లెగ్రాంజ్ రూపం అంటాం.

దీని నుండి $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ అని స్పష్టం.

17.6.3 టేలర్స్ సిద్ధాంతంలో n పదాల తరువాత శిష్ట పదం R_{n+1}, nలు x మీద ఆధారపడిన cలతో ముడిపడి ఉన్నది. ఈ సిద్ధాంతం నియమాలను తృప్తిపరిచే ఒక 'c' తప్పకుండా ఉంటుంది. కాని ఈ 'c' ఏకైకం కానక్కరలేదు. $R_n(x)$ అనేది xలో ప్రమేయం కాదు. కాని $x, \in$ మీద ఆధారపడే ప్రతి nకి c ఏదైనప్పటికీ $n \geq N_\in$ అయినప్పుడు $|R_n(x)| < \in$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\in > 0$ కు అనురూపంగా $\mathbb{N}$లో $N_\in$ ఉంటుంది. ఈ సందర్భంలో $n \to \infty$ అయినప్పుడు $R_n(x) \to 0$ అని చెప్పుట ఆచారం.

17.6.4 $f(x) = e^x$ అయిన టేలర్స్ సిద్ధాంతంలోని శిష్ట పదం ప్రతి x_0కి '0'కు అభిసరణం చెందుతుంది. (చివరిలో గమనిక చూడండి) అని చూపండి.

$f(x) = e^x,\ x_0 = 0$ అనుకొనిన $\mathbb{N}$లోని ప్రతి nకి $f^{(n)}(x) = e^x,\ f^{(n)}(0) = 1$

$x \in R,\ x > 0, n \in \mathbb{N}$ అయినప్పుడు టేలర్స్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$e^x = f(x) = f(0) + xf^1(0) + \cdots\cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$$

అయ్యేటట్లు $(0, x)$లో c ఉంటుంది.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$$

n పదాల తరువాత శిష్టపదం $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}\ e^c}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{e^{c_{n+1}}}{e^{c_n}} \cdot c^{n+1} < e^x,\ e^{c_n} > 1 \text{ కావున } \ell im \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \ell im\ a_n = 0$$

17.6.5 టేలర్ సిద్ధాంతం అనువర్తనాలు:

(a) $x > -1$ అయిన $3\sqrt{1+x}$ ఉజ్జాయింపు విలువను $n = 2$ వద్ద టేలర్ సిద్ధాంతంనుపయోగించి కనుగొనుము.

$$f(x) = (1+x)^{1/3}\ (x > -1)$$

$$f^1(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3},\ f^1(0) = \frac{1}{3}$$

$$f^{11}(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-5/3},\ f^{11}(0) = \frac{-2}{1}$$

$n = 2,\ x_0 = 0$ అయిన టేలర్ సిద్ధాంతం నుండి $0 < c < x$

$f(x) = 1 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3}\ x^2 + \dfrac{1}{3!} f^{111}(c) \cdot x^3$ అయ్యేటట్లు c ఉంటుంది.

$$f^{111}(c) = \frac{5}{81}(1+c)^{-8/3}$$

$$\left| f(x) - \left(1+\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right) \right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{81} \left|(1+c)\right|^{-8/3}$$

$x > 0,\ c > 0$ అయినందున $0 < (1+c)^{-8/3} < 1$

$$\Rightarrow \left| f(x) - \left(1+\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2\right) \right| < \frac{5}{243}$$

ఉదాహరణకు $x = 0.3$ అయిన

$$f(1\cdot 3) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} - \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{100} = 1\cdot 09$$ మరియు

$$(1+c)^{-8/3} < \frac{5}{81}\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{1}{600} < 0\cdot 13 \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[3]{1\cdot 3} - 1\cdot 09 \right| < 0\cdot 5 \times 10^{-2}$$

(b) వ్యత్యాసం 10^{-5} కంటే తక్కువ ఉండేటట్లు e యొక్క సుమారు విలువను కనుక్కోండి.

$k \in \mathbb{N},\ g(x) = e^x$ అయిన $g^{(k)}(n) = e^n$

$$\Rightarrow g^{(k)}(0) = 1 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$$

$g(x) = e^x$ కు టేలర్ బహుపది $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots + \frac{x^n}{n!}$

$x = 1$ అయిన శిష్ట పదం $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!},\ c \in (0, 1)$

$e^c < e < 3$ కావున $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{N}$లో n కనుక్కుందాం.

$\Rightarrow (n+1)! > 3 \times 10^5$

$8! = 45,360,\ 9! = 3,62,880$ కావున $8! < 3 < 10^5 < 9!$

$\Rightarrow n+1 = 9 \Rightarrow n = 8$

$\Rightarrow e \approx P_8(1) = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{8!}$

$= 2\cdot 71828$

దీనివ్యత్యాసం 10^{-5} కంటే తక్కువ.

(c) $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x$ అని చూపండి.

$f(x) = \cos x,\ x_0 = 0 \quad n = 2$ అయిన టేలర్ సిద్ధాంతం నుండి

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2} + R_2(x),\ R_2(x) = \frac{f^{111}(c)}{3!}x^3 = \frac{x^3}{6}\cdot \sin c$

$0 < x < \pi$ అగునట్లు c వుంటుంది. $\sin c > 0$ మరియు $\frac{x^3}{6} > 0$

$\Rightarrow R_2(x) \ge 0 \Rightarrow 1-\frac{x^2}{2} \le \cos x$

$-\pi \le x \le 0$ అయిన $-\pi \le c \le 0 \Rightarrow \sin c < 0,\ \frac{x^3}{6} < 0$

$\Rightarrow R_2(x) \ge 0$

ప్రతి $x \in [-\pi, \pi]$కు $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x$

$|x| \ge \pi$ అయిన $1-\frac{x^2}{2} \le -3 \le -1 \le \cos x$

$$\therefore \cos x \ge 1-\frac{x^2}{2} \ \forall \ x$$

లేదా $-\pi \le x \le 0$ అయిన $0 \le -x \le \pi$ కాబట్టి $1-\frac{x^2}{2} = 1-\frac{(x)^2}{2} \le \cos(-x) = \cos x$

17.6.6 S.A.Q.: $x > 0$ అయిన $1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8} < \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$ అని చూపండి. దీనినుపయోగించి $\sqrt{1\cdot 2}$ మరియు $\sqrt{2}$ ఉజ్జాయింపు విలువలు కనుక్కోండి.

17.6.7 S.A.Q.: $k \in \mathbb{N}, x > 0$ అయిన

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots\cdots\frac{x^2k}{2k} < \ell n(1+x) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots\cdots\frac{x^2k}{2k}+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$ అని చూపండి.

17.6.8 S.A.Q.: $0 \le x \le 1, n \in \mathbb{N}$ అయిన

$$\left|\ell n(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ అని చూపండి. దీనినుపయోగించి

$\ell n(1\cdot 5)$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువ దోషం $(a)\ 0\cdot 01$, $(b)\ 0\cdot 001$ కంటే తక్కువ ఉండేటట్లు కనుక్కోండి.

సాపేక్ష గరిష్టత, కనిష్టత నిర్వచనాలను ఒకసారి గుర్తు చేసుకుందాం. $f : I \to R$ ఒక ప్రమేయం. $c \in I$, $f(x) \le f(c)\ (f(x) \ge f(c))$ అయ్యేటట్లు $V_\delta(c) \le I$ అను సామీప్యం ఉంటే c వద్ద f ను సాపేక్ష గరిష్టత (కనిష్ట) పొందుతుంది అంటాం.

c వద్ద f సాపేక్ష గరిష్టత లేక కనిష్టత పొందితే c వద్ద f సాపేక్ష అత్యంతత పొందుతుంది అంటాం. టేలర్ సిద్ధాంతంనుపయోగించి సాపేక్ష గరిష్టత మరియు కనిష్టతకు నియమాలను కనుగొందాం.

17.6.9 సిద్ధాంతం: I అంతరం, $x_0 \in I, n \ge 2$. x_0 సామీప్యంలో $f^1, f^{11}, \cdots\cdots\cdots f^{(n)}$ వ్యవస్థితాలు మరియు $f^1(x_0) = f^{11}(x_0) = \cdots\cdots\cdots = f^{(n-1)}(x_0) \ne f^{(n)}(x_0)$ అనుకుందాం.

(i) n సరి సంఖ్య మరియు $f^{(n)}(x_0) > 0$ అయిన x_0 వద్ద f కు సాపేక్ష గరిష్టత పొందుతుంది.

(ii) n సరి సంఖ్య మరియు $f^{(n)}(x_0) < 0$ అయిన x_0 వద్ద f కు సాపేక్ష కనిష్టత పొందుతుంది.

(iii) n బేసి సంఖ్య అయిన x_0 వద్ద f సాపేక్ష గరిష్టత లేక సాపేక్ష కనిష్టత పొందదు.

ఉపపత్తి: $x_0 \in I,\ x \in I;\ x_0,\ x$ ల మధ్య c వుంటూ $x_0 \neq c \neq x$ అయితే

$$P_{n-1}(x) = f(x_0) + (x - x_0) f^1(x_0) + \cdots\cdots\cdots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) \text{ మరియు}$$

$$R_{n-1}(x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c), \text{ అని వ్రాయండి.}$$

టేలర్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$ అయ్యేటట్లు x_0, x ల మధ్య c ఉంటుంది. ఈ R_{n-1}, c కు అనువర్తితమౌతుంది.

$V_\delta(x_0)$లో $f^{(n)}$ అవిచ్ఛిన్నం మరియు $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ కావున $U \subseteq V_\delta(x_0)$ అయినప్పుడు $f^{(n)}(x),\ f^{(n)}(x_0)$లు ఒకే గుర్తు ఉండేటట్లు ఒక సామీప్యం U ఉంటుంది.

$x \in U,\ c \in (x_0, x)$ అయిన $c \in U$ కావున $f^{(n)}(c),\ f^{(n)}(x_0)$లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

(a) n సరి సంఖ్య అనుకుందాం.

సందర్భం (1): $f^n(x_0) > 0$ అయిన టేలర్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $f^{(n)}(c) > 0, (x - x_0)^n \geq 0$ అయ్యేటట్లు $x \in U$ ఉంటుంది. $\Rightarrow R_{n-1}(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0),\ x \in U$ కాబట్టి x_0 వద్ద f సాపేక్ష కనిష్టత పొందుతుంది.

సందర్భం (2): $f^{(n)}(x_0) < 0$ అయిన పై రీతిగా $f^{(n)}(c) < 0$ మరియు $(x - x_0)^n \geq 0$ కావున $R_{n-1}(x) \leq 0$.

$\Rightarrow x_0$ వద్ద f సాపేక్ష గరిష్టత పొందుతుంది.

(b) n బేసి సంఖ్య అనుకుందాం. $x > 0$ అయిన $(x - x_0)^n > 0$ మరియు $x < x_0$ అయిన $(x - x_0)^n < 0$. దీని నుండి $x < x_0 < y$ అయిన $R_{n-1}(x),\ R_{n-1}(y)$లకు వ్యతిరేక గుర్తులు ఉంటాయి. అందుచేత x_0 వద్ద f సాపేక్ష గరిష్టత లేక సాపేక్ష కనిష్టత పొందదు.

17.6.10 ఉదాహరణలు:

కింది ప్రమేయాలకు $x=0$ వద్ద సాపేక్ష అత్యంతతను పరిశీలించండి. $(a)\ \sin x - x$ $\quad (b)\ x^3+2x$

సాధన: $(a)\quad f(x)=\sin x - x$

$$f^1(x)=\cos x-1,\ f^1(0)=0$$

$$f^{11}(x)=-\sin x,\ f^{11}(0)=0$$

$$f^{111}(x)=-\cos x,\ f^{111}(0)=-1\neq 0$$

కావున '0' వద్ద f సాపేక్ష అత్యంతతత పొందదు.

$(b)\quad f(x)=x^3+2x$

$$f^1(x)=3x^2+2,\ f^1(0)=2\neq 0$$

$\therefore$ 0 వద్ద f సాపేక్ష అత్యంతతత పొందదు.

17.6.19 n వ అవకలనానికి లైబ్నిజ్ సిద్ధాంతం: (a, b) మీద $f,\ g$ అవకలనీయ ప్రమేయాలు $n\in\mathbb{N},\ x\in(a, b)$ అయిన $(f\ \ g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\quad (1)$

ఉపపత్తి: దీనిని గణితాను గమనం ద్వారా నిరూపిస్తాం.

(1)ను $P(n)$ అనుకుందాం. $a_k=f^{(k)}(x),\ b_k=g^{(k)}(x)$గా వ్రాయండి. $n=1$ అయినప్పుడు అవకలన లబ్ధ నియమం ప్రకారం $(f\ \ g)^1(x)=f^1(x)\,g(x)+f(x)\cdot g^1(x)$

$$=\binom{1}{0} f^1(x)\cdot g^{(0)}(x)+\binom{1}{1} f^{(0)}(x)\cdot g^1(x)$$

కావున $P(1)$ నిజం. $P(n)$ నిజమనుకుని $P(n+1)$ నిజమని $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k}\rightarrow(*)$ ఉపయోగించి నిరూపిద్దాం.

$$(f\ g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$$

ఇరువైపులా అవకలనం చేయగా

$$(f\ g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ f^{(n-k+1)}(x)\, g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k+1)}(x) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ a_{n-k+1}\, b_k + a_{n-k} \cdot b_{k+1} \right\}$$

$$= \binom{n}{0} a_{n+1}\, b_0 + \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right\} a_n b_1 + \cdots\cdots\cdots + \left\{ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right\} a_1 b_n + \binom{n}{n} a_0 b_{n+1}$$

$$= a_{n+1}\, b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right\} a_{n-k}\, b_{k+1} + a_0\, b_{n+1}$$

$(*)$ నుండి

$$= a_{n+1}\, b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} a_{n-k}\, b_{k+1} + a_0 \cdot b_{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k+1)}(x)$$

$\Rightarrow P(n+1)$ నిజం.

$\therefore$ గణితానుగమనం ప్రకారం $\mathbb{N}$లోని ప్రతి nకి $P(n)$ నిజం.

17.7 S.A.Q.ల సాధనలు:

17.4.5 S.A.Q.: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) + f^1(x) \right) = L$

$g(x) = f(x)\, e^x$, $h(x) = e^x$ అనుకోండి. $(0, \infty)$ మీద g, h అవకలనీయాలు.

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

$$g^1(x) = \left(f(x) + f^1(x) \right) e^x,\ h^1(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{g^1(x)}{h^1(x)} = \lim_{x\to\infty} \left\{ f(x) + f^1(x) \right\} = L$$

లోపిటాల్ సూత్రం II ప్రకారం, $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = L$ మరియు $\lim_{x\to\infty} f^1(x) = 0$.

17.4.6 S.A.Q.: $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ 0 & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \le |x|$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \Rightarrow f^1(0) = 0$$

$x \ne 0,\ y \ne x$ అనుకుందాం.

x	y	$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$
అకరణీయం	అకరణీయం	$\frac{y^2 - x^2}{y-x} = y + x$
అకరణీయం	కరణీయం	$\frac{-x^2}{y-x}$
కరణీయం	అకరణీయం	$\frac{y^2}{y-x}$
కరణీయం	కరణీయం	0

$\Rightarrow x \ne 0$ అయిన $\lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ వ్యవస్థితం కాదు.

$\Rightarrow R - \{0\}$లో $f^1(x)$ వ్యవస్థితం కాదు.

g ఏదైన లోపిటాల్ సూత్రం ఉపయోగపడదు.

$g(x) = \sin\ x$ అయిన $g^1(x) = \cos\ x$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin\ x} & (x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}) \\ 0 & (x \text{ కరణీయ సంఖ్య}) \end{cases}$$

$$0 \le \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le \left|\frac{x^2}{\sin\ x}\right| \le |x| \left|\frac{x}{\sin\ x}\right| = \frac{|x|}{\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\ x}{x} = 1$ కావున $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

మరియు $f^1(0) = 0,\ g^1(x) = 1$

$$\therefore\ \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 = \frac{f^1(0)}{g^1(0)}$$

17.6.6 S.A.Q.: $f(x) = \sqrt{1+x}\ (x > 0)$

$$f^1(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},\ f^1(0) = \frac{1}{2}$$

$$f^{11}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2},\ f^{11}(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{111}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}$$

$x > 0$ అయిన టేలర్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$f(x) = \sqrt{1+x} = f(0) + x \cdot f^1(0) + \frac{x^2}{2!} f^{11}(c_1);\ c_1 \in (0, x)$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = f(0) + x \cdot f^1(0) + \frac{x^2}{2!} f^{11}(0) + \frac{x^3}{3!} f^{111}(c_2);\ c_2 \in (0,\ x)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 (1+c_1)^{-3/2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{3}{8}(1+c_2)^{-5/2}$$

$\frac{x^2}{8}(1+c_1)^{-3/2} > 0$ కావున $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$

$\sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{1+0.2}$ కావున

$$1 + \frac{1}{2}(0 \cdot 2) - \frac{1}{8}(0 \cdot 2)^2 < \sqrt{1 \cdot 2} < 1 + \frac{1}{2}(0 \cdot 2)$$

$$1 \cdot 095 < \sqrt{1 \cdot 2} < 1 \cdot 1$$

ఇదే విధంగా $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} < \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \cdot 375 < \sqrt{2} < 1 \cdot 5$

17.6.7 S.A.Q.: $x > 0$ అయిన $(\ell n\ (1+n))^1 = \frac{1}{1+x}$

$$(\ell n\ (1+x))^{(k+1)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k \cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$$

టేలర్ బహుపది $P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$

శిష్టపదం $R_n(x) = (-1)^n \cdot c^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ c \in (0,\ x)$

$x > 0,\ n = 2k$ అయిన $R_n(x) = R_{2k}(x) > 0$ మరియు

$n = 2k + 1$ అయిన $R_n(x) = R_{2k+1}(x) < 0$ దీన్నించి కావలసిన అసమత వస్తుంది.

17.6.8 S.A.Q.: $f(x) = \ell n\,(1+x)\ (0 \le x \le 1)$

$n \in \mathbb{N}$ అయిన $f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)} \cdot (n-1)!\,(1+x)^{-n-1}$ కావున $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)\,!$

టేలర్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$$P_n(x) = f(0) + x \cdot f^1(0) + \cdots\cdots\cdots + \frac{x^n}{n\,!} f^n(0)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c \in (0,\ x)$$

$$\Rightarrow P_n(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2\,!} + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n\,!}$$ మరియు

$$R_n\ (x) = \frac{(-1)^n}{n+1} (1+c)^{-n-1} \cdot x^{n+1}$$

$$\Rightarrow \left| R_n(x) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - P_n(x) \right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$\ell n\,(1 \cdot 5)$కి ఉజ్జాయింపు విలువను కనుగొందాం.

$\left| \ell n\,(1+x) - P_n(x) \right| < \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ మరియు (a) దోషంలో గరిష్ట హద్దు $0 \cdot 01 = \dfrac{1}{100}$ కావున $x = y_2$

అయినప్పుడు $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} < \dfrac{1}{100}$ అయ్యేటట్లు n కనుక్కొందాం.

$$\Rightarrow \frac{1}{2^5 \times 5} = \frac{1}{160} < \frac{1}{100} < \frac{1}{2^4 \times 4}$$

$n = 4$ అయిన $\left| \ell n\ 1\cdot 5 - P\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \frac{1}{160} < \frac{1}{100}$

$0\cdot 01$ దోషం వుండేటట్లు $\ell n(1\cdot 5)$కి ఉజ్జాయింపు $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 4} - \frac{1}{2^4 \cdot 4} = \cdot 40$

(b) దోషాన్కి గరిష్ట హద్దు $0\cdot 001 = \frac{1}{1000}$

$\left| \ell n\ 1\cdot 5 - P_5\left(\frac{1}{2}\right) \right| < 0\cdot 001$ కావున $P_5\left(\frac{1}{2}\right) = 0\cdot 405$ $\ell n\ (1\cdot 5)$కి కావలసిన ఉజ్జాయింపు.

17.8 సారాంశము:

కోషీ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతం, లోపిటాల్ సూత్రాలు, టేలర్ సిద్ధాంతం, సాపేక్ష అత్యంతలకు సంబంధించిన సూత్రాలు, ఇత్యాది పలు ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలు, వీటి అనువర్తనాలుగా సంఖ్యలకి $n-$వ ఘాత మూలాలు, బహుపది విలువల ఉజ్జాయింపు, హెచ్చు తరగతి అవకలనిల గణనం, వ్యత్యాస దోషాన్కి అంచనా వగైరాలు ఈ పాఠంలో విద్యార్థికి విశదపరచడం జరిగింది.

17.9 సాంకేతిక పదాలు:

అనిశ్చిత రూపాలు

హెచ్చు పరిమాణ అవకలనాలు

అత్యంతలు

వ్యత్యాస దోష హద్దులు

17.10 అభ్యాసం:

1. $[a, b]$ మీద f, g అవిచ్ఛిన్నాలు, (a, b) మీద అవకలనీయాలు, $x \in [a, b]$ అయినపుడు $g(x) \neq 0,\ \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0.$ $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ వ్యవస్థితమయిన $A = 0$ అని చూపండి.

2. పై లెక్కలోని దత్తాంశానికి తోడు $c \neq x \in [a, b]$ అయినపుడు $g(x) > 0,$ అయిన

   (1) $A > 0$ అయినపుడు $\lim\limits_{x \to C} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ మరియు

   (2) $A < 0$ అయినపుడు $\lim\limits_{x \to C} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ అని చూపండి.

3. ప్రమేయాల ప్రదేశాలు వాటికెదురుగా బ్రాకెట్లలో ఇవ్వబడినవి. ఆ ప్రమేయపుటవధులు కనుక్కోండి.

(a) $\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} \quad \left(0, \pi/2\right)$

(b) $\lim_{x \to 0+} \frac{\tan x}{x} \quad \left(0, \pi/2\right)$

(c) $\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(\cos x)}{x} \quad \left(0, \pi/2\right)$

(d) $\lim_{x \to 0+} \frac{\tan x - x}{x^3} \quad \left(0, \pi/2\right)$

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arc}\tan x}{x} \quad (-\infty, \infty)$

(f) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x(\ln x)^2} \quad (0, 1)$

(g) $\lim_{x \to 0+} x^3 \cdot \ln x \quad (0, \infty)$

(h) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x} \quad (0, \infty)$

(i) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad (0, \infty)$

(j) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (0, \infty)$

(k) $\lim_{x \to 0} \log(\sin x) \quad (0, \pi)$

(ℓ) $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} \quad (0, \infty)$

4. క్రింది అవధులను కనుక్కోండి.

(a) $\lim\limits_{x \to 0+} x^{2x} \quad (0, \infty)$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x} \quad (0, \infty)$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x} \quad (0, \infty)$

(d) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\text{Arc} \tan x}\right) \quad (0, \infty)$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} \quad (0, \infty)$

(f) $\lim\limits_{x \to 0+} (\sin x)^{x} \quad (0, \infty)$

(g) $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\sin x} \quad (0, \infty)$

(h) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sec x - \tan x) \quad \left(0, \pi/2\right)$

5. $a \neq 0, \ f(x) = \sin(ax) \ n \in \mathbb{N}, x \in \mathsf{R}$ అయినప్పుడు $f^{(n)}(x)$ ను కనుక్కోండి.

6. ప్రతి $x, y \in \mathsf{R}$ కు $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ అయిన f స్థిర ప్రమేయం అని చూపండి.

7. $g(x) = \sin x$ అయిన $x \to \infty$ అయినప్పుడు టేలర్ సిద్ధాంతంలోని శిష్ట పదం '0'కు "అభిసరణ" చెందుతుంది అని చూపండి.

8. $|x| \leq 1$ అయిన $\left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}\right)\right| < \dfrac{1}{5040}$ అని చూపండి.

9. $x = 0$ వద్ద సాపేక్ష అంత్యత ఉంటాయో లేదో పరిశీలించండి.

(a) $\sin x + \frac{x^3}{6}$ (b) $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

10. $x > 0$ అయిన $x - \frac{x^2}{2} < \ell n\,(1+x) < \frac{x^2}{2(1+x)}$ అని చూపండి.

11. $f(x) = \begin{cases} 1-x & (0 \le x \le 1) \\ x-1 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ గా నిర్వచిస్తే $x = 1$ వద్ద f కనిష్టత పొందుతుందని చూపండి. $x = 1$ వద్ద అవకలనీయమవుతుందా?

12. $x \in \mathsf{R}$ అయిన $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ అని చూపండి.

(సూచన - టేలర్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించండి)

13. $f(x) = \left| x^3 \right|$ అయిన $x \ne 0$ అయ్యే విలువల వద్ద f కు మొదటి మూడు అవకలనాలు ఉంటాయని చూపండి. $f^1(0) = f^{11}(0) = 0$ మరియు $f^{111}(0)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

(సూచన - $x \ge 0$ అయిన $f^1(x) = 3x^2, f^{11}(x) = 6x$

$x < 0$ అయిన $f^1(x) = -3x^2, f^{11}(x) = -6x$)

17.11 సాధనలు:

3.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	ℓ
1	1	0	$\frac{1}{3}$	1	∞	0	0	0	0	0	0

4. 1 1 e^3 0 1 1 1 0

5. $f^{2n}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \sin(ax)$

$f^{2n+1}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n+1} \cos(ax)$

9. (a) లేదు (b) 0 వద్ద సాపేక్ష కనిష్టం

17.12 నమూనా ప్రశ్నలు:

1. రోల్స్ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించండి.

2. కోషీ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించండి.

3. $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$లో $f(x) = \cos\ ax$ కు లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతంను పరీక్షించండి.

4. $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin\ x}{\sqrt{x}}$ ఎంత?

5. $\lim\limits_{x \to 0+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$ అని చూపండి.

6. $x \in R$ అయిన $x - \frac{x^3}{6} < \sin\ x$ అని చూపండి.

7. (a, b) మీద f అవకలనీయం మరియు ప్రతి $x \in (a, \in)$ కు $f^1(x) \geq 0$ అయిన $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ అని నిరూపించండి.

8. $g(x) = \left|x^3\right|$ అయిన $x = 0$ వద్ద $g^{111}(x)$ వ్యవస్థితం కాదు అని చూపండి.

9. లబ్ధానికి n వ అవకలనాన్ని కనుగొనుటకు లైబ్నిజ్ సిద్ధాంతంను నిరూపించండి.

   అంటే $(f\ \ g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\ (x) \cdot g^{(k)}(x)$ అని చూపండి.

10. $x > 0$ అయిన $1+\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ అని చూపండి.

17.13 మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య - సాధన:

ప్రశ్న: $x \neq 0$ అయిన $f(x) = 2x^4 + x^4\ \sin\ \frac{1}{n},\ f(0) = 0$ అయిన 0 వద్ద సాపేక్ష కనిష్ట విలువ ఉంటుందని చూపండి. కాని 0 యొక్క ప్రతి సామీప్యంలో f యొక్క అవకలనం ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక విలువలను తీసుకుంటుందని చూపండి.

సాధన:

1. Aim

(i) '0' వద్ద సాపేక్ష గరిష్టత ఉంటుంది, అంటే ప్రతి $x \in \mathsf{R}$ కు $f(x) \geq f(0)$

(ii) $f^1(x) < 0 < f^1(y)$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\delta > 0$ కు అనురూపంగా x, y లు $V_\delta(0)$ లో ఉంటాయి.

2. **నిర్వచనాలు:**

(a) **పరమ కనిష్టత విలువ:** $E \subseteq \mathsf{R}$, ప్రతి $x \in E$ కు $f(x) \geq f(a)$ అయిన 'a' వద్ద $f : E \to \mathsf{R}$ ప్రమేయానికి పరమ కనిష్టత ఉంటుంది అంటాం.

(b) $x \in E \subseteq \mathsf{R}$ **వద్ద అవకలనం:** $E \subseteq \mathsf{R}, a \in E$ అనేది E కు అవధి బిందువు.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A$$ అయిన a వద్ద A ను f యొక్క అవకలని అంటాం.

(c) **బిందువు సామీప్యం:** $a \in \mathsf{R}, \ \delta > 0$ అయిన $V_\delta(a) = \{x \in \mathsf{R} / |x - a| < \delta\}$ ను a యొక్క $\delta -$ సామీప్యం అంటాం.

3. **సాధనలో ఉపయోగించిన ఫలితాలు:**

(i) ప్రతి $\theta \in \mathsf{R}$ కు $|\sin \theta| \leq 1$

(ii) ఆర్కిమెడీస్ నియమం

4. (i) $x^4 \geq 0, \ -1 \leq \sin \ x \leq 1$ కావున $-x^4 \leq x^4 \sin \dfrac{1}{x} \leq x^4$

$$\Rightarrow 0 \leq x^4 \leq 2x^4 - x^4 \leq 2x^4 + x^2 \sin \frac{1}{x} \leq 3x^4$$

$$\Rightarrow f(x) \geq x^4$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(0) \ \forall \ x$$

(ii) $f^1(x) = 8x^3 + 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x}$

$$= x^2\left(8x + 4x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

$\frac{f^1(x)}{x^2} = 8x + 4x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} > 0$ లేక < 0 అయిన $f^1(x) > 0$ లేక $f^1(x) < 0$.

$n \in \mathbb{N}$ అయిన $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

n సరి సంఖ్య, $x = \frac{1}{n\pi}$ అయిన

$$\frac{f^1(x)}{x^2} = \frac{8}{n\pi} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{8}{n\pi} < 1 \Rightarrow n > \frac{8}{\pi}$$

n బేసి సంఖ్య, $x = \frac{1}{m\pi}$ అయిన

$$\frac{f^1(x)}{x^2} = \frac{8}{m\pi} - (-1) = \frac{8}{m\pi} + 1 > 0$$

$n > \frac{8}{\pi}, \frac{1}{n\pi} < \delta$ మరియు $\frac{1}{m\pi} < \delta$ అయ్యేటట్లు ప్రతి $\delta > 0$ కు అనురూపంగా సరి సంఖ్య n, బేసి సంఖ్య m లను ఎన్నుకొనవచ్చును. ఇది ఆర్కిమెడీస్ నియమం ద్వారా సాధ్యమవుతుంది.

పాఠ్యభాగ రచయిత

కస్తూరి సాంబశివరావు

జార్జ్.ఎఫ్. రీమాన్ (1826 - 1866):

అంతరాళ జ్యామితికి చెందిన రీమాన్ పద్ధతులు ఆధునిక సైద్ధాంతిక భౌతిక శాస్త్రము అభివృద్ధికి ప్రభావం చూపాయి. ప్రస్తుతము మనము పిలుస్తున్న రీమాన్ సమాకలనిని నిర్వచించుట ద్వారా సమాకలని యొక్క భావనను విశదీకరించారు.

పాఠము - 18

రీమాన్ సమాకలనం - I

18.1 ఉపోద్ఘాతము:

$f:[a, b] \rightarrow R$ ప్రమేయము యొక్క రీమాన్ సమాకలనీయత నిర్వచనము సోదాహరణంగా వివరించి, రీమాన్ సమాకలనీయత నుండి ప్రమేయ పరిబద్ధతని, రీమాన్ సమాకలనం బుజు నియమాలను పాటిస్తుందని నిరూపించడం జరిగింది.

18.2 అంశాలక్రమము:

18.3 పరిచయము:

సాధారణంగా ప్రత్యవకలజం లేదా పూర్వంగముగా వ్యవహరింపబడే సమాకలనాన్ని వక్రముల పొడవు, తలంలోని ప్రదేశాలను వైశాల్యములు, ఘనపరిమాణాలు తదితరాలు గణించడానికి వాడతారు. ఈ సమాకలన భావాన్ని స్ఫూర్తి తలంలోని పరిబద్ధమైన వక్రముచే ఆవరింపబడిన ప్రదేశపు వైశాల్యాన్ని రమారమీగా గణించే పద్ధతి. వక్రాన్ని సూచించే ప్రమేయపు ప్రదేశాన్ని విభక్త క్రమానుగత ఉపాంతరములుగా విభజించి, ప్రతీ ఉపాతరం మీద ఏర్పడు దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యాల మొత్తం రీమాన్ మొత్తముగా నిర్వచించి, వక్రప్రమేయ పరిబద్ధత అవసరం లేకుండా చేశారు. ప్రదేశం యొక్క ప్రతి విభజనలో ఉపాంతరాలలో బిందువును (t_i) ఎంపిక చేసుకొని, $[x_{i-1}, x_i]$ ఉపాంతరము పొడవు, $f(t_i)$ ఎత్తు కలిగిన దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యముల మొత్తాన్ని కనుక్కుంటాము. దీనినే రీమాన్ మొత్తము అని నిర్వచిస్తాము. విభజనలోని ఉపాంతరముల గరిష్ట పొడవుని తగ్గిస్తూ, ఈ రీమాన్ మొత్తాల అవధిని పొందగలిగితే దానినే రీమాన్ సమాకలనిగా నిర్వచిస్తాము. ఈ విధమైన నిర్వచనంలో ప్రమేయ పరిబద్ధత ఆధారంగా గణించే ఎగువ, దిగువ రీమాన్ మొత్తాల నుండి సమాకలనం కనుక్కొనే పద్ధతిలో గల క్లిష్టత లేదు.

ఈ అధ్యాయంలో రీమాన్ సమాకలని నిర్వచనము, దాని ఏకైకత, రీమాన్ ప్రమేయ పరిబద్ధత రాబట్టడము మరియు అనేక ఉదాహరణలు చర్చించడం జరిగింది.

18.4 నిర్వచనములు:

$I = [a, b]$ అనేది వాస్తవ సంఖ్యా సమితిలో పరిబద్ధమైన సంవృతాంతరము. $P = \{a = x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n = b\}$, $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ అయ్యేట్లు $[a, b]$ని పరిమిత బిందు సమితి సూచిస్తే దీనిని $[a, b]$కి 'విభజన' అని అంటాము.

$1 \le i \le n$కి, $[x_{i-1}, x_i]$ని P యొక్క $i-$ వ ఉపాంతరముగా పిలుస్తాము.

P విభజనని $\{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$గా వ్రాస్తాము. దీనిలో $[x_{i-1}, x_i]$ $i-$వ ఉపాంతరము పొడవు $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$గా నిర్వచిస్తాము.

$\| P \|$ = గరిష్ఠం $\{(x_i - x_{i-1})/i = 1, 2, \cdots, n\}$ని P విభజన యొక్క విస్తృతి అని పిలుస్తాము. దీనిని $\| P \|$తో సూచిస్తాము.

$[a, b]$కి $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ ఒక విభజన అనుకుందాము. $[x_{i-1}, x_i]$ ఉపాంతరములో t_i, ఒక బిందువు అయితే $\{t_i\}$ బిందువుల సముదాయాన్ని P విభజనకి ఒక ఎంపిక (tagged) విభజనగా నిర్వచిస్తాము.

P ఎంపిక విభజన $= \dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i]; t_i)\}_{i=1}^{n}$ గా సూచిస్తాము. P విభజన యొక్క విస్తృతి $= \dot{P}$ ఎంపిక విభజన విస్తృతి. అనగా $\| P \| = \| \dot{P} \|$.

ఏదైనా $\dot{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\ ;\ t_i\}_{i=1}^{n}$, $[a, b]$కి ఎంపిక విభజన అనుకుందాము. $f : [a, b] \to R$ ప్రమేయమనికి $\dot{P}$ కి అనురూపమైన రీమాన్ మొత్తం $S(f, \dot{P})$ అని వ్రాసి

$$S(f_i\ \dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta x_i$$ గా నిర్వచిస్తాము.

$[a, b]$లలో $f(x) > 0$ అయితే ప్రతి $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ కి

$$A_i = (x_i - x_{i-1})\, f(t_i)$$

$[x_{i-1}, x_i]$ ఆధారంగా కలిగిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $f(t_i)$ ఎత్తు, $(x_i - x_{i-1})$ వెడల్పు కలిగిన దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము A_i అయితే $S(f\ ;P) = \sum_{i=1}^{n} A_i$ గా నిర్వచిస్తాము.

18.4.1 నిర్వచనము: $f : [a, b] \to R$ ప్రమేయం అనుకొందాము. $A \in \mathbb{R}$, ప్రతీ $\in > 0$ అనురూపంగా ఒక $\delta_{\in} > 0$, $[a, b]$కి $\dot{P}$ ఒక ఎంపిక విభజన, $\|\dot{P}\| < \delta_{\in}$ అయినప్పుడు $|S(f\ ;\dot{P}) - A| < \in$ అయ్యేటట్లుగా వ్యవస్థితమైతే $[a, b]$ పై f రీమాన్ సమాకలనీయం అని A ని $[a, b]$ మీద $'f'$కు రీమాన్ సమాకలని అని అంటాము. ఈ సందర్భములో A ను

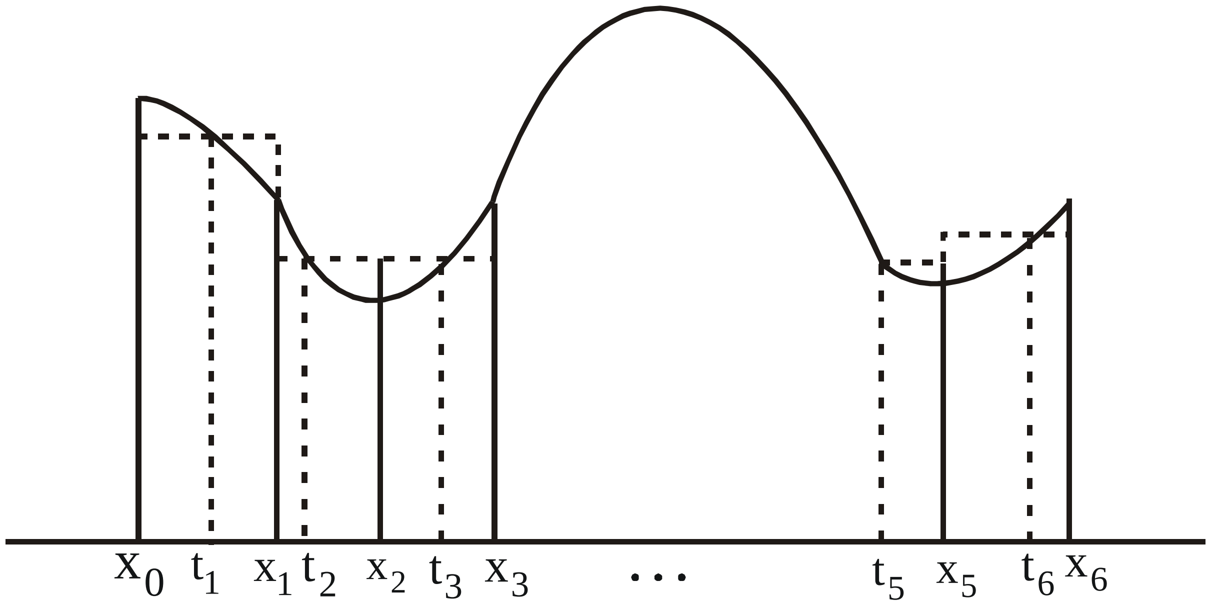
$$\lim_{\|\dot{P}\| \to 0} S(f\ ;\dot{P}) = A = \int_a^b f\, dx$$ అని వ్రాస్తాము.

f కు రీమాన్ సమాకలనిని $\int_a^b f$ అని కూడా వ్రాయవచ్చును.

$[a, b]$ సంవృతాంతరములో రీమాన్ సమాకలనీయ ప్రమేయాల సమితిని $R[a, b]$ చే సూచిస్తాము.

గమనిక: వాస్తవ సంఖ్య ఉప సమితుల మీద నిర్వచించిన 'అవధి' లేదా అనుక్రమాల అవధి నిర్వచనానికి ప్రస్తుతానికి ఇక్కడ $\lim_{\|\dot{P}\| \to 0} S(f\ ;\dot{P}) = A$కి మధ్య చాలా తేడా వుంది.

రీమాన్ మొత్తము



18.4.2 ఉదాహరణలు:

(i) $P = \{0, 1, 1\cdot5, 2, 3\cdot4, 4\}$ విభజన యొక్క విస్తృతి గణించండి.

$I_1 = [0, 1], I_2 = [1, 1\cdot5], I_3 = [1\cdot5, 2], I_4 = [2, 3\cdot4], I_5 = [3\cdot4, 4]$

$\ell[a, b] = [a, b]$ అంతరం పొడవు $= b - a$ కనుక $\ell(I_1) = 1; \ell(I_2) = \cdot5; \ell(I_3) = \cdot5$; $\ell(I_4) = 1\cdot4$; $\ell(I_5) = 0\cdot6$.

$\therefore \ \| P \| =$ గరిష్ఠం $\{\ell(I_1), \ell(I_2), \ell(I_3), \ell(I_4), \ell(I_5)\} = 1\cdot4$

(ii) $Q = \{0, 0\cdot5, 2\cdot5, 3\cdot5, 4\}$ విభజన యొక్క విస్తృతి కనుక్కోండి.

$I_1 = [0, 0\cdot5]$; $I_2 = [\cdot5, 2.5]$; $I_3 = [2\cdot5, 3\cdot5], I_4 = [3\cdot5, 4]$

$\ell(I_1) = \cdot5 = \ell(I_4)$; $\ell(I_2) = 2$; $\ell(I_3) = 1$

$\| Q \| = 2$

(iii) $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ ప్రమేయము $f(x) = x^2$ గా నిర్వచించితే $\dot{P} = \left\{\left([x_{i-1}, x_i]\,;\, t_i\right)\right\}_{i=1}^{5}$ ఎంపిక విభజనలో $P(i)$ లోని విభజన.

$[x_{i-1}, x_i]$ లో t_i ఎడమ అంత్య బిందువు అయితే $S(f\,;\dot{P})$ ని గణించండి.

సాధన: $t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_3 = 1\cdot 5,\ t_4 = 2,\ t_5 = 3\cdot 4$

$$f(t_1) = 0,\ f(t_2) = 1,\ f(t_2) = 2\cdot 25,\ f(t_4) = 4,\ f(t_5) = 11\cdot 56$$

$$S(f\,;\dot{P}) = 0(x_1 - x_0) + 1(x_2 - x_1) + 2\cdot 25(x_3 - x_2) + 4(x_4 - x_3) + 11\cdot 56(x_5 - x_4)$$

$$= \cdot 5 + 1\cdot 125 + 5\cdot 6 + 6\cdot 936 = 14\cdot 161$$

(iv) (i) లో నిర్వచించిన విభజన P లో $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $f(x) = x^2$ గా నిర్వచిస్తే, $\dot{P}$ ఎంపిక విభజనలో $[x_{i-1}, x_i]$ కుడి చివరి బిందువులు ఎంపిక చేస్తే $S(f\,;\dot{P})$ ని గణించండి.

సాధన: $t_1 = 1,\ t_2 = 1\cdot 5,\ t_3 = 2,\ t_4 = 3\cdot 4,\ t_5 = 4$

$$f(t_1) = 1;\ f(t_2) = 2\cdot 25,\ f(t_3) = 4;\ f(t_4) = 11\cdot 56,\ f(t_5) = 16$$

$$S(f\,;\dot{P}) = 1(1) + (2\cdot 25)(\cdot 5) + (4)(\cdot 5) + (11\cdot 56)(1\cdot 4) + 16(0\cdot 6) = 29\cdot 909$$

18.4.3 $[a, b]$ సంవృతాంతరములో $f(x) = k$ అనే స్థిర ప్రమేయం $[a, b]$ మీద రీమాన్ సమాకలనీయము అని మరియు $\int_a^b f\,dx = k(b - a)$ అని చూపండి.

సాధన: $\dot{P} = \left\{\left([x_{i-1}, x_i]\,;\, t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ ఎంపిక విభజన అని అనుకుందాము.

$$S(f\,;\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = k(b - a)$$

ఇచ్చిన $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $\delta_{\in} > 0$, $\dot{P}$ అనే ఎంపిక విభజన $\left| S\left(f\ ;\ \dot{P}\right) - k\left(b-a\right)\right| = 0 < \in$ అయ్యేటట్లు $\left\| \dot{P} \right\| < \delta_{\in} = \in$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$$\therefore \quad f \in R\left[a, b\right] \text{ మరియు } \int_a^b f\,dx = k\left(b-a\right)$$

18.4.4 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $f \in R\ \left[a, b\right] \cdot \ell\underset{n}{im} \left\| \dot{P}_n \right\| = 0$ అయ్యేటట్లు $\left\{\dot{P}_n\right\}$ అనే ఎంపిక విభజన అనుక్రమం, సంవృతాంతరం $\left[a, b\right]$ వుంటే, $\ell\underset{n}{im}\ S\left(f\ ;\ \dot{P}_n\right) = \int_a^b f\,dx$ వ్యవస్థితం అవుతుందని చూపుము.

18.4.5 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $g(x) = 0$; ($0 \le x \le 1$ మరియు x కరణీయ సంఖ్య)

$= \dfrac{1}{x}$ ($0 \le x \le 1$ మరియు x అకరణీయ సంఖ్య)

అనే ప్రమేయం నిర్వచిస్తే, $\ell\underset{n}{im}\ S\left(f\ ;\ \dot{P}_n\right) = 0$ అయ్యేటట్లు $\left\{\dot{P}_n\right\}$ అనే ఎంపిక విభజన, $\left[0, 1\right]$ మీద వ్యవస్థితం అవుతుందని చూపి, $g \notin R\left[0, 1\right]$ అని చూపండి.

18.4.6 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $f : \left[a, b\right] \to \mathrm{R}$ ప్రమేయము పరిబద్ధం అనుకోండి.

$\ell\underset{n}{im} \left\| \dot{P}_n \right\| = \ell\underset{n}{im} \left\| \dot{Q}_n \right\| = 0$ అయ్యేటట్లు రెండు ఎంపిక విభజన అనుక్రమాలు $\left\{\dot{P}_n\right\}$ మరియు $\left\{\dot{Q}_n\right\}$ వ్యవస్థితం అయితే $\ell\underset{n}{im}\ S\left(f\ ;\ \dot{P}_n\right) \ne \ell\underset{n}{im}\ S\left(f\ ;\ \dot{Q}_n\right)$ అవుతుందని చూపి, $f \notin R\left[a, b\right]$ అని నిరూపించండి.

18.4.7 సమాకలనం ఏకైకత:

సిద్ధాంతం: $f \in R\ \left[a, b\right]$ అయితే, f సమాకలని విలువ ఏకైకము.

ఉపపత్తి: L, L^1 అనే వాస్తవ సంఖ్యలు అనుకుందాము.

ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta_1 > 0, \left[a, b\right]$ సంవృతాంతరానికి ఎంపిక విభజన $\dot{P}_1$, $\left| S\left(f\ ,\ \dot{P}_1\right) - L\right| < \in\!/_2$ అయ్యేటట్లు $\left\| \dot{P}_1 \right\| < \delta_1$ అవ్యవస్థితం అయిందనుకుందాము. ఇదే విధంగా ఒక ధన సంఖ్య $\delta_2, \left\| \dot{P}_2 \right\| < \delta_2$ అయితే $\left| S\left(f\ ,\ \dot{P}_2\right) - L^1\right| < \in\!/_2$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అయిందనుకుందాము.

$\delta =$ కనిష్టం $\{\delta_1, \delta_2\}$ అనుకోండి.

$\| \dot{R} \| < \delta$ అయ్యేటట్లు $\dot{R}$ అనే ఎంపిక విభజన తీసికోండి.

$$0 \le \left| L - L^1 \right| \le \left|\left(L - S\left(f\ ,\ \dot{P}\right)\right)\right| + \left|\left(L^1 - S\left(f\ ;\ \dot{P}\right)\right)\right| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి వర్తిస్తుంది. కనుక $L = L^1$

18.4.8 పరిబద్ధత సిద్ధాంతము:

సిద్ధాంతము: $f \in R[a, b]$ అయితే f పరిబద్ధ ప్రమేయము.

ఉపపత్తి: $\in = 1$కి అనురూపంగా $\delta > 0$, $\dot{p}$ అనేది $[a, b]$కి ఎంపిక విభజన $\| \dot{P} \| < \delta$ అయితే

$$\left| S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) - \int_a^b f\,dx \right| < \in = 1$$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$$\left| S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) \right| - \left| \int_a^b f\ \ dx \right| \le \left| S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) - \int_a^b f\ \ dx \right|$$ కాబట్టి

$$\left| S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) \right| < 1 + \left| \int_a^b f\,dx \right| = M_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (*)$$

$m > \frac{b-a}{\delta}$ అయ్యేటట్లు $\mathbb{N}$లో m నిర్ధారించి $[a, b]$ సంవృతాంతరాన్ని m ఉపాంతరములుగా సమాన భాగాలుగా విభజించి, ప్రతి jకి $x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{m}$ అయ్యేటట్లు $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \cdots\ < x_m = b\}$ విభజన తీసికుందాము. $[a, b]$ లో x తీసికోండి. ఏదోఒక $[x_{i-1}, x_i]$లో మాత్రమే x ఉంటుంది.

$x \notin [x_{j-1},\ x_j]$ అయితే $t_j = x_j$

మరియు $x \in [x_{i-1}, x_i]$ అయితే $t_i = x$ అయ్యేటట్లు $\dot{P}$ ఎంపిక విభజన $= \left\{\left(\left[x_{j-1}, x_j\right], t_0\right)\right\}_{j=1}^{m}$ ని తీసుకుందాము.

$$S\left(f\ ;\dot{P}\right)=f\left(x\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)+\sum_{j\neq i}f\left(x_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)$$

$$=\left\{f\left(x\right)+\sum_{j\neq i}f\left(x_j\right)\right\}\ \frac{\left(b-a\right)}{m}$$

$\therefore$ (*) నుండి $M_1>\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)\right|=\left|f\left(x\right)+\sum_{j\neq i}f\left(x_j\right)\right|\left(\frac{b-a}{m}\right)$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow\ \frac{M_1\ m}{b-a}\geq\left|f\left(x\right)\right|-\left|\sum_{j\neq i}f\left(x_j\right)\right| \qquad \left(\because\ \left|a+b\right|\geq\left|a\right|-\left|b\right|\right)$$

$$\Rightarrow\left|f\left(x\right)\right|\leq\frac{M_1\ m}{b-a}+\left|\sum_{j\neq i}f\left(x_j\right)\right|$$

$$\leq\frac{M_1\ m}{b-a}+\sum_{j=1}^{m}\left|f\left(x_j\right)\right|=M \quad (\text{అనుకోండి})$$

పై అసమీకరణంలో కుడి చేతి వైపు సంఖ్య 'x' మీద ఆధారపడదు. కాబట్టి $[a, b]$లో x యాదృచ్ఛిక బిందువు కనుక f పరిబద్ధమైనది.

గమనిక: 18.4.8 నుండి $f:[a, b]\rightarrow R$ అపరిబద్ధమైతే, $f\notin R\ [a, b]$ అని స్పష్టము. (18.4.5 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న చూడండి).

18.4.9 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు:

(a) $f\in R\ [a, b]\Leftrightarrow$ ప్రతి $\in>0$ కి అనుగుణంగా $\delta>0, L\in R$, $\dot{P}$ అనే ఎంపిక విభజన, $\left\|\dot{P}\right\|<\delta_{\in}$ అయినప్పుడల్లా $\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)-L\right|\leq\in$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అని చూపండి.

(b) $f:[0, 1]\rightarrow R$ అనే డిరిష్లే ప్రమేయము.

$0\leq x\leq 1,\ x$ అకరణీయ సంఖ్య అయితే $f\left(x\right)=1$

$0\leq x\leq 1,\ x$ కరణీయ సంఖ్య అయితే $f\left(x\right)=0$

రీమాన్ సమాకలనీయం కాదని చూపండి.

(c) $f : [a, b] \to R$ ప్రమేయము, $[a, b]$ సంవృతాంతరంలో $-x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots, x_n$ అనే కొన్ని పరిమిత సంఖ్య గల బిందువుల దగ్గర తప్పితే, $f(x) = 0$ గా నిర్వచింపబడితే, $f \in R\,[a, b]$ అని $\int_a^b f\,dx = 0$ అని నిరూపించండి.

(d) $[a, b]$ సంవృతాంతరములో $\dot{P} = \left\{(I_j, t_j)\right\}_{j=1}^{n}$ ఎంపిక విభజన మరియు $a \le c_1 < c_2 \le b$. $c_1 \le t_j \le c_2$ అయ్యేటట్లు I_j ఉపాంతరముల సమ్మేళనముగా తీసుకుంటే, $u \in I_j$ అయితే

$u \in \left[c_1 - \|\dot{P}\|,\ c_2 + \|\dot{P}\|\right]$ అని నిరూపించండి.

18.5 సమాకలనీయ బుజు ధర్మాలు:

18.5.1 సిద్ధాంతము: $f \in R\,[a, b]$ మరియు $g \in R\,[a, b]$ అయితే $f + g \in R\,[a, b]$ మరియు

$$\int_a^b (f + g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

ఉపపత్తి: $\in$ కి అనురూపంగా $\delta_1 > 0$ $\|\dot{P}\| < \delta_1$ అయితే $\in > 0$ అనుకోండి. $f \in R\,[a, b]$ కనుక,

$$\left| S(f, \dot{P}) - \int_a^b f\,dx \right| < \frac{\in}{2} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$g \in R\,[a, b]$ కనుక $\left| S(g, \dot{P}) - \int_a^b g\,dx \right| < \frac{\in}{2} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$

$\|\dot{P}\| < \delta_2$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ కి అయ్యేటట్లు $\delta_2 > 0$ వ్యవస్థితం.

$\delta_{\in} =$ కనిష్టం $\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

$\|\dot{P}\| < \delta_{\in}$ అయ్యే ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ కి $\|\dot{P}\| < \delta_1$ మరియు $\|\dot{P}\| < \delta_2$ అవుతుంది.

$\Rightarrow (1)$ మరియు (2)కు ఇది వర్తిస్తుంది.

$\dot{P} = \left\{\left(\left[x_{i-1}, x_i\right], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ అని,

$S\left(f , \dot{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \left(x_i - x_{i-1}\right)$ మరియు

$S\left(g , \dot{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \left(x_i - x_{i-1}\right)$ అయితే

$$S\left(f + g, \dot{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} (f+g)\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[f\left(t_i\right) + g\left(t_i\right)\right]\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) + \sum_{i=1}^{n} g\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$= S\left(f, \dot{P}\right) + S\left(g, \dot{P}\right)$$

$$\therefore \left|S\left(f+g, \dot{P}\right) - \int_a^b f\ dx - \int_a^b g\ dx\right| = \left|S\left(f, \dot{P}\right) + S\left(g, \dot{P}\right) - \int_a^b f\ dx - \int_a^b g\ dx\right|$$

$$\le \left|S\left(f, \dot{P}\right) - \int_a^b f\ dx\right| + \left|S\left(g, \dot{P}\right) - \int_a^b g\ dx\right| < \in/2 + \in/2 = \in$$

అనగా $\left|S\left(f+g, \dot{P}\right) - \left(\int_a^b f\, dx + \int_a^b g\ dx\right)\right| < \in$

$\left\|\dot{P}\right\| < \delta$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజనకి ఇది నిజము కనుక $f + g \in R\left[a, b\right]$

మరియు $\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\ dx$

18.5.2 ఉప సిద్ధాంతము: ప్రతి n కి, $f_i \in R[a, b], 1 \le i \le n$ అయితే

$f_1 + f_2 + \cdots + f_n \in R[a, b]$ మరియు

$$\int_a^b (f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_n)\, dx = \int_a^b f_1\, dx + \int_a^b f_2\, dx + \cdots\cdots + \int_a^b f_3\, dx$$

ఉపపత్తి: దీనిని గణితానుగమన సూత్రాన్ని అనుసరించి నిరూపిస్తాము.

$n = 1$ అయితే $\int_a^b f_1\, dx$

$k-1$ కి ఈ ప్రవచనము నిజము అనుకుంటే, ప్రతి $1 \le i \le k$ కి, $f_1, f_2, \cdots, f_k \in R[a, b]$ అయితే $f = f_2 + f_3 + \cdots + f_k$

గణితానుగమన సూత్రాన్ని అనుసరించి $f \in R[a, b]$ అవుతుంది.

మరియు $\int_a^b f\, dx = \int_a^b f_2\, dx + \cdots\cdots + \int_a^b f_k\, dx$

$f_1 + f \in R[a, b]$ కనుక $\int_a^b (f_1 + f)dx = \int_a^b f_1\, dx + \int_a^b f\, dx$

$f_1 + f = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$ కాబట్టి $f_1 + f_2 + \cdots + f_k \in R[a, b]$ మరియు

$$\int_a^b (f_1 + f_2 + \cdots + f_k)\, dx = \int_a^b f_1\, dx + \int_a^b f\, dx$$

$$= \int_a^b f_1\, dx + \int_a^b f_2\, dx + \cdots + \int_a^b f_k\, dx$$

18.5.3 సిద్ధాంతము: $k \in R,\ f \in R[a, b]$ అయితే $k\,f \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b (k\,f)\,dx = k\int_a^b f\,dx$.

ఉపపత్తి: $k = 0$ అయినపుడు $k\,f = 0$ కనుక $k\,f \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b kf = k\int_a^b f = 0$

$k \neq 0$ అనుకోండి $f \in R[a, b]$ కనుక ఇచ్చిన $\in > 0$ అనురూపంగా $\delta > 0, \|\dot{P}\| < \delta$ అయినప్పుడు

$\left|S(f, \dot{P}) - \int_a^b f\,dx\right| < \in/|k|$ అయ్యేటట్లు $\dot{P}$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i],\ t_i)\}_{i=1}^n$ మరియు $\|\dot{P}\| < \delta$ అయితే

$S(f, \dot{P}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - {}_{i-1})$ అవుతుంది.

కనుక $S(k\,f, \dot{P}) = \sum_{i=1}^n (kf)(t_i)(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = k\,S(f, \dot{P})$

$$\therefore \left|S(k\,f, \dot{P}) - k\int_a^b f\,dx\right| = \left|k\,S(f, \dot{P}) - k\int_a^b f\,dx\right|$$

$$= |k|\left|S(f, \dot{P}) - \int_a^b f\,dx\right| < |k|\frac{\in}{|k|} = \in$$

$\therefore\ k\,f \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b k\,f\,dx = k\int_a^b f\,dx$

18.5.4 సిద్ధాంతము: $f \in R[a, b],\ g \in R[a, b]$ అయి $[a, b]$లోని ప్రతి xకి $f(x) \le g(x)$ అయితే $\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$.

ఉపపత్తి: f, g సమాకలనీయం కనుక $f - g$ కూడా సమాకలనీయం, $[a, b]$లోని ప్రతి xకి $f(x) \le g(x)$ కనుక

$g(x) - f(x) = (g - f)(x) \ge 0$ అంతేకాక $\int_a^b (g - f)\, dx = \int_a^b g\, dx - \int_a^b f\, dx$ కాబట్టి $[a, b]$లోని

ప్రతి xకి $g(x) \ge 0$ మరియు $g \in R[a, b]$ అయితే $\int_a^b g\, dx \ge 0$ అని నిరూపిస్తే చాలు.

ఇందుకొరకు మనం ప్రతి $\in > 0$ కి $\int_a^b g\, dx > -\in$ అని నిరూపిస్తాం. $g \in R[a, b]$ కాబట్టి ఇచ్చిన

$\in > 0$ అనుగుణంగా $\delta > 0, \|\dot{P}\| < \delta$ అయ్యే ప్రతి $[a, b]$ విభజన $\dot{P}$ కి $\left|\int_a^b g\, dx - S(g, \dot{P})\right| < \in$

అగునట్లు వుంటుంది. అనగా $S(g, \dot{P}) - \in < \int_a^b g\, dx < S(g, \dot{P}) + \in.$

$[a, b]$ ఎంపిక విభజన $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ అయితే

$$S(g, \dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1}) \ge 0$$

$$\Rightarrow -\in < S(g, \dot{P}) - \in < \int_a^b g\, dx$$

$$\Rightarrow -\in < \int_a^b g\, dx$$

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి నిజము కాబట్టి $\int_a^b g\, dx \ge 0$

18.5.5 ఉప సిద్ధాంతం: f పరిబద్ధ ప్రమేయం, $f \in R[a,\ b]$, $[a,\ b]$లోని ప్రతి xకి $m \le f(x) \le M$

(m, M స్థిర సంఖ్యలు) అయితే $m(b-a) \le \int_a^b f\ dx \le M(b-a)$

ఉపపత్తి: $[a,\ b]$ మీద $f_1(x) = m$ మరియు $f_2(x) = M$గా నిర్వచించిన $f_1,\ f_2$ స్థిర ప్రమేయాలైనందున రీమాన్ సమాకలనీయాలు, ప్రతీ x కి $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ కనుక $\int_a^b f_1\ dx \le \int_a^b f\ dx \le \int_a^b f_2\ dx$ అనగా

$$m(b-a) \le \int_a^b f\,dx \le M(b-a).$$

18.6 రీమాన్ సమాకలనీయకు కొన్ని సూత్రాలు:

$f:[a,\ b] \to \mathsf{R}$ రీమాన్ సమాకలనీయతకి కొన్ని సూత్రాలు ఇప్పుడు తెలిసికొందాము. కింది సూత్రాలలోని మొదటి రెంటిని 19వ అభ్యాసంలో చర్చిస్తాము. మూడవ సూత్రం నిరూపణ మన పరిధిలోనే ఉన్నప్పటికీ కొద్ది క్లిష్టత వలన నిరూపణ లేకనే వాస్తవమని ఒప్పుకుందాము.

(a) **కోషీ నియమం:** $f:[a,\ b] \to \mathsf{R}$ సమాకలనీయతకి తుల్యం ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా కింది లక్షణం కలిగి ఉండేటట్లు $\eta_\in > 0$ వ్యవస్థితం కావడం.

$\eta_\in$ **లక్షణం:** $\|\dot{P}\| < \eta_\in$, $\|\dot{Q}\| < \eta_\in$ అయ్యే ఎంపిక విభాగాలన్నిటికీ $\left|S(f\ ,\ \dot{P}) - S(f\ ,\ \dot{Q})\right| < \in$.

(b) **స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం:** $f:[a,\ b] \to \mathsf{R}$ సమాకలనీయతకి తుల్యం ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా సమాకలనీయ ప్రమేయాల $\alpha_\in,\ w_\in$, $[a,\ b]$లోని ప్రతి xకి $\alpha_\in(x) \le f(x) \le w_\in(x)$

మరియు $\int_a^b (w_\in - \alpha_\in)\,dx < \in$ అగునట్లు వ్యవస్థితం కావడం.

(c) **సమాకలనీయతకి మూడో సూత్రం:** $f:[a,\ b] \to \mathsf{R}$ పరిబద్ధ ప్రమేయమైనప్పుడు క్రింది ప్రవచనములు తుల్యము.

(i) $f \in R[a,\ b]$

(ii) ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $[a,\ b]$ విభజన $P_\in$ కింది లక్షణంతో వ్యవస్థితం.

$P_\in$ **లక్షణం:** $[a, b]$కి $\dot{P}_1, \dot{P}_2$ ఎంపిక విభజనలు $P_\in$ విభజన బిందువులన్నీ P_1, P_2లలో విభజన బిందువులు అయినప్పుడు $\left|S\left(f, \dot{P}_1\right) - S\left(f, \dot{P}_2\right)\right| < \in$.

(iii) ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $[a, b]$ విభజన $P_\in = \{a = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_n = b\}$

$\theta(f, P_\in) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \in$ అగునట్లుగా వ్యవస్థితం.

ఇక్కడ $M_i =$ క.ఎ.హ. $\{f(x)/x_{i-1} \le x \le x_i\}$

$m_i =$ గ.ది.హ. $\{f(x)/x_{i-1} \le x \le x_i\}$

18.6.1 ఉదాహరణలు: రీమాన్ సమాకలని నిర్వచనాన్ని ఉపయోగించి $f : [0, 3] \to \mathrm{R}$

$0 \le x \le 1$ అయిన $f(x) = 2$

$1 < x \le 3$ అయిన $f(x) = 3$

అయితే రీమాన్ సమాకలని అని చూపి, $\int_0^3 f\, dx$ విలువ కనుక్కోండి.

సాధన: $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m \le 1 < x_{m+1} < \cdots < x_n = 3\}$

విభజనలో $1 \le i \le n$ కి, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\dot{P} = \left\{\left([x_{i-1}, x_i], t_i\right)\right\}_{i=0}^{n}, \quad \dot{P}_1 = \left\{\left([x_{i-1}, x_i], t_i\right)\right\}_{i=0}^{m}, \quad \dot{P}_2 = \left\{\left([x_{i-1}, x_i], t_i\right)\right\}_{i=m+1}^{n}$$

అయితే $S(f ; \dot{P}) = S(f_1, \dot{P}_1) + S(f_2, \dot{P}_2)$ అని చూడవచ్చు.

$i \le m$ అయితే $f(t_i) = 2$,

$i \ge m+2$ అయితే $f(t_i) = 3$,

$x_m \le t_{m+1} < 1 < x_{m+1}$ అయితే $f(t_{m+1}) = 2$

$x_m \le 1 < t_{m+1} < x_{m+1}$ అయితే $f(t_{m+1}) = 3$

కాబట్టి $S\left(f\ ,\ \dot{P}_1\right) = \sum_{i=1}^{m} 2\left(x_i - x_{i-1}\right) = 2\left(x_m - x_0\right) \quad \cdots \quad (1)$

$$S\left(f\ ,\ \dot{P}_2\right) = f\left(t_{m+1}\right)\left(x_{m+1} - x_m\right) + \sum_{i=m+2}^{n} 3\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$= f\left(t_{m+1}\right)\left(x_{m+1} - x_m\right) + 3\left(3 - x_{m+1}\right)$$

ఇప్పుడు ఎంపిక బిందువు t_{m+1} రెండు విధాలుగా తీసుకోవచ్చును.

$x_m \le t_{m+1} \le 1$ లేదా $x_m \le 1 < t_{m+1} \le x_{m+2}$

సందర్భం (i): $\quad x_m \le t_{m+1} \le 1, \quad f\left(t_{m+1}\right) = 2$

$$S\left(f\ ,\ \dot{P}_2\right) = 2\left(x_{m+1} - x_m\right) + 3\left(3 - x_{m+1}\right) = 9 - 2\ x_m - x_{m+1} \quad \cdots \quad (2)$$

సందర్భం (ii): $\quad x_m \le 1 < t_{m+1}, \quad f\left(t_{m+1}\right) = 3$

$$S\left(f\ ,\ \dot{P}_2\right) = 3\left(x_{m+1} - x_m\right) + 3\left(3 - x_{m+1}\right) = 3\left(3 - x_m\right) \quad \cdots \quad (3)$$

$(1), (2), (3)$ నుండి సందర్భము (i) నుండి

$$S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) = 2\left(x_m - 0\right) + 9 - 2x_m - x_{m+1} = 9 - x_{m+1}$$

సందర్భం (2) నుండి

$$S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) = 2\left(x_m - 0\right) + 3\left(3 - x_m\right) = 9 - x_m$$

$\therefore \quad S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) = 8 + \left(1 - x_{m+1}\right)$ (సందర్భము (i))

$= 8 + \left(1 - x_m\right)$ (సందర్భము (ii))

$\Rightarrow \left|S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) - 8\right| = \left|1 - x_{m+1}\right|$ ((i) నుండి)

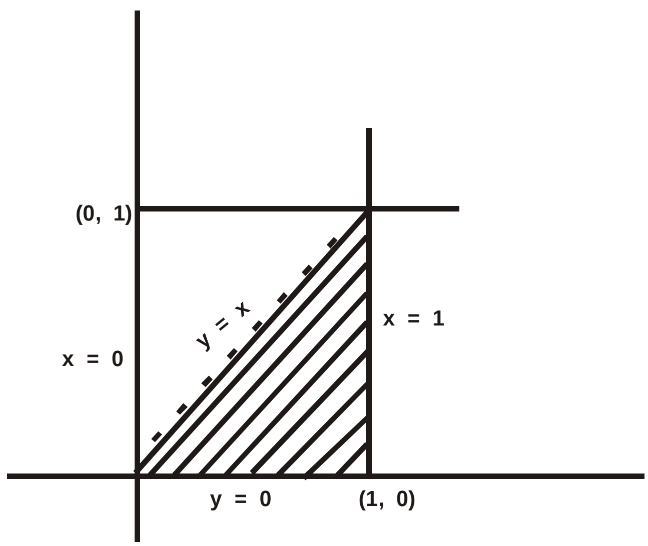
$= \left|1 - x_m\right|$ ((ii) నుండి)

$x_m \le 1 < x_{m+1}$ కనుక $\left|S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) - 8\right| \le \left(x_{m+1} - x_m\right)$

$\in > 0$, $\left\| \dot{P} \right\| < \in$ అనుకుంటే $x_{m+1} - x_m < \in$ కనుక $\left| S\left(f , \dot{P}\right) - 8 \right| < \in$

$\therefore$ $f \in R\ [0, 3]$ మరియు $\int_3^0 f\ dx = 8$

18.6.2 ఉదాహరణ: $\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$ అని చూపండి.



పై పటం నుండి, $[0, 1]$ సంవృంతాంతరములో $h(x) = x$ ప్రమేయము, $y = 0, y = x,$ $x = 1$ రేఖలచే పరిబద్ధమైన త్రిభుజాకార ప్రదేశమును గుర్తించగలము.

ఈ ప్రదేశ వైశాల్యము $\frac{1}{2}$ కనుక $\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}$ కావచ్చును.

ఏదైనా ఎంపిక విభజన $\dot{P} = \left\{\left(\left[x_{i-1}, x_i\right], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ కి $S\left(h , \dot{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i\ \left(x_i - x_{i-1}\right)$

$q_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ ఎంపిక బిందువులతో $\dot{P}_0$ అనే ఎంపిక విభజన తీసుకుంటే

$$S\left(h , \dot{P}_0\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - x_{i-1}^2 \right) = \frac{1}{2} \left(1^2 - 0^2 \right) = \frac{1}{2}$$

కాబట్టి $\left| S\left(h, \dot{P}\right) - \frac{1}{2} \right| = \left| S\left(h, \dot{P}\right) - S\left(h, \dot{P}_0\right) \right|$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - q_i \right) \left(x_i - x_{i-1} \right) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| t_i - q_i \right| \left| x_i - x_{i-1} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - x_{i-1} \right| \left| x_i - x_{i-1} \right| \quad \left(\because x_{i-1} \leq t_i \leq x_i \;\&\; x_{i-1} \leq q_i \leq x_i \right)$$

$$\leq \left\| \dot{P} \right\| \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1} \right) = \left\| \dot{P} \right\|$$

అందుచేత $\left\| \dot{P} \right\| < \in$ అయితే $\left| S\left(h, \dot{P}\right) - \frac{1}{2} \right| < \in$

కాబట్టి $h \in R\left[0, 1\right]$ మరియు $\int_0^1 h\, dx = \frac{1}{2}$

18.6.3 ఉదాహరణ: $a \leq x_0 \leq b$

$f : [a, b] \to \mathsf{R}$ ప్రమేయాన్ని $f\left(x_0\right) = 1,\ x \neq x_0$ అయినప్పుడు $f\left(x\right) = 0$ గా నిర్వచిస్తే $f \in R\left[a, b\right]$ అని $\int_a^b f\ dx = 0$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $P = \left\{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \right\}, [a, b]$కి ఏదైన విభజన, $i = 1, 2, \cdots, n$ కి $\left[x_{i-1}, x_i\right]$లో ఎంపిక బిందువు t_i మరియు $x_0 \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$ అనుకోండి.

$\dot{P} = \left\{\left(\left[x_{i-1}, x_i\right], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ ఒక ఎంపిక విభజన $i \neq j$ అయితే $f\left(t_i\right) = 0, t_j \neq x_0$ అయితే $f\left(t_j\right) = 0$.

$t_j = x_0$ అయితే $f\left(t_j\right) = 1$ కాబట్టి $t_0 \neq x_0$ అయితే $S\left(f, \dot{P}\right) = 0$,

$t_j = x_0$ అయితే $S\left(f, \dot{P}\right) = x_j - x_{j-1}$

అందుచేత $0 \leq S\left(f, \dot{P}\right) \leq x_j - x_{j-1} \leq \left\|\dot{P}\right\|$

$\in > 0, \left\|\dot{P}\right\| < \in$ అయితే $\left|S\left(f, \dot{P}\right)\right| \leq \left|\dot{P}\right| < \in$

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి వర్తిస్తుంది. కాబట్టి $f \in R\left[a, b\right]$ మరియు $\int_a^b f\ dx = 0$

18.6.4 ఉదాహరణ: $f : \left[0, 1\right] \to R$ ప్రమేయం, $x \in \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ అయితే $f\left(x\right) = 1$ ఇతరత్రా $f\left(x\right) = 0$, అని నిర్వచిస్తే, $f \in R\left[0, 1\right]$ మరియు $\int_0^1 f\, dx = 0$ అని చూపండి.

సాధన: $\dot{P}$ అనే ఏదైనా $\left[a, b\right]$కి ఎంపిక విభజన అనుకుందాము. $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ల నుండి ఎంపిక బిందువులను కలిగి వుండే భాగం $\dot{P}_0$, మిగిలిన భాగాన్ని $\dot{P}_1$ అనీ అనుకోండి.

ఈ ఎంపిక బిందువుల ఉపాంతరాన్కి చివరి బిందువులుగా తీసుకుంటే, ఎంపిక బిందువు x_i, $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ ఉపాంతరము ఎడమ చివరి బిందువుగాను, $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ ఉపాంతరము కుడి చివరి బిందువుగాను రెండు పర్యాయములు వస్తుంది.

$$S\left(f, \dot{P}\right) = S\left(f, \dot{P}_0\right) + S\left(f, \dot{P}_1\right)$$

$$= S\left(f, \dot{P}_0\right)$$

$$S\left(f, \dot{P}_0\right) = \sum_{i=1}^{4}\left[1 \cdot \left(\frac{i}{5} - x_{i-1}\right) + 1 \cdot \left(x_i - \frac{i}{5}\right)\right]$$

$$\leq 2 \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$= 8 \left\| \dot{P}_0 \right\|$ ($\because$ $S\left(f, \dot{P}_0\right)$లో గరిష్ఠముగా 8 పదాలు ఉంటాయి మరియు ప్రతి పదము $\leq \left\| \dot{P}_0 \right\|$)

$\therefore \in > 0$ కి, $\delta = \frac{\in}{8}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ ఎంపిక బిందువు ఉపాంతరాల చివరి బిందువులు అయ్యేటట్లుగా

$$S\left(f, \dot{P}\right) = 8 \left\| \dot{P} \right\| < \in$$

$\therefore f \in R\left[a, b\right]$ మరియు $\int_a^b f \, dx = 0$

18.6.5 ఉదాహరణ: $G : [0, 1] \to R$ ప్రమేయాన్ని $n \in \mathbb{N}, x = \frac{1}{n}$ అయినప్పుడు $G(x) = x$ అనీ ఇతరత్రా $G(x) = 0$ అని నిర్వచిస్తే $G \in R\left[0, 1\right]$ మరియు $\int_0^1 G \, dx = 0$ అని చూపండి.

సాధన: $\in > 0$ అయితే $E_\in = \left\{ 1/n \,/\, n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \geq \in \right\}$ సమితి పరిమితము మరియు $N \leq \frac{1}{\in} < N + 1, N \in \mathbb{N}$ అనుకుంటే $E_\in = \left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{N}\right\}$, $\delta = \frac{\in}{2N}$ అనుకుని $\left\| \dot{P} \right\| < \delta$ అయ్యేటట్లు ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ తీసికొందాము. $E_\in$ సమితిలోని ఎంపిక బిందువులు గల భాగం $\dot{P}_1$, $E_\in$లో లేని ఎంపిక బిందువులు గల భాగం $\dot{P}_2$ అనుకుందాము.

$\dot{P}_2$లోని ఎంపిక బిందువు 't'కి $G(t) = 0$. కాబట్టి $S\left(G, \dot{P}\right) = S\left(G, \dot{P}_1\right)$

అంతేకాక t_i, $\dot{P}_1$లో ఎంపిక బిందువైతే $G\left(t_i\right) = t_i$ మరియు $x_i - x_{i-1} < \delta$ కాబట్టి

$$\therefore S\left(G, \dot{P}\right) = S\left(G, \dot{P}_1\right) = \sum_{\left[x_{i-1}, x_i\right] \in \dot{P}_1} G\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) < 2N \cdot \delta = \in$$

$$S\left(G, \dot{P}\right) = S\left(G, \dot{P}_1\right) = \sum_{t_i \in E_\in} G\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$\leq \sum \left(x_i - x_{i-1}\right) \qquad \left(\because t_i \in E_\in \text{ కి } G\left(t_i\right) \leq 1\right)$$

ఈ మొత్తంలో t_i ఎంపిక బిందువు ప్రక్క పక్క ఉపాంతరాల ఉమ్మడి బిందువు కావచ్చును. ప్రతి ఉపాంతరము పొడవు $\le \delta$ కనుక పై మొత్తము ($2\delta \times E_\in$ లోని ఎంపిక బిందువుల సంఖ్య) కంటే ఎక్కువ కాదు. $E_\in$ లోని ఎంపిక బిందువులు సంఖ్య N కంటే ఎక్కువ కాదు కనుక పై మొత్తము $\le 2\,\delta\, N$ అవుతుంది.)

ప్రతి $\in > 0$ అనుగుణంగా $\delta > 0, \left\| \dot{P} \right\| < \delta$ కి $S\left(G, \dot{P}\right) < \in$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$G \in R\,[0,\ 1]$ మరియు $\int_0^1 G\ dx = 0$

18.6.6 ఉదాహరణ: $[0, 1]$ అంతరంలో h అనే థోమీ ప్రమేయము.

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ కరణీయ సంఖ్య} \\ 1, & x = 0 \\ \dfrac{1}{n}, & x \ne 0 \text{ అకరణీయ సంఖ్య, మరియు } x \text{ సూక్ష్మ రూపం } \dfrac{m}{n} \end{cases}$$

అని నిర్వచిస్తే, **15**వ పాఠములో ఈ ప్రమేయము ప్రతి కరణీయ సంఖ్య వద్ద అవిచ్ఛిన్నమని, ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య వద్ద విచ్ఛిన్నమని నిరూపించాము.

ఇపుడు $h \in R\,[0,\ 1]$ అని, $\int_0^1 h\ dx = 0$ అని నిరూపిస్తాము.

సాధన: $\in > 0,\ E_\in = \left\{x / 0 \le x \le 1,\ h(x) \ge \in\!/2\right\}$ అనుకుందాము. $x \ne 0$ అయితే, $h(x) > \in\!/2$, x సూక్ష్మ రూపములో $x = \dfrac{m}{n},\ \dfrac{1}{n} \ge \in\!/2$ అయినప్పుడు $n \le \dfrac{2}{\in}$ అవుతుంది. హారము 'n' సంఖ్య పరిమితము ప్రతి n కి $0 < m < n$, $m,\ n$ ల గ.సా.భా. 1 అయ్యే m ల సంఖ్య పరిమితము కావున $E_\in$ పరమిత సమితి $E_\in$ లోని మూలకాల సంఖ్య N అనీ, $\delta = \in\!/4N$ అనీ అనుకుందాము.

$\left\| \dot{P} \right\| < \delta$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ కీ $S\ \left(h,\ \dot{P}\right) < \in$ అని చూపిస్తాము.

$E_\in$ లో నుండి ఎంపిక బిందువులు గల భాగం $\dot{P}_1$ అనీ మిగిలిన భాగం $\dot{P}_2$ అనీ అనుకోండి.

$\dot{P}_1$లోని అంతరం $[x_{i-1}, x_i]$లోని ఎంపిక బిందువు 't' ఉపాంతరములో చివరి బిందువు అయితే అది ప్రక్క ఉపాంతరములో కూడా చివరి బిందువు అవుతుంది. అందువలన $E_\in$లోని ఎంపిక బిందువులు $2N$ కంటే అధికంగా వుండవు. ప్రతి ఉవంతరము పొడవు δ కంటే తక్కువగా వుంటే, $E_\in$లో నుండి ఎంపిక బిందువులు కలిగిన అంతరాల పొడవు $2\,N\,\delta = 2N \cdot \frac{\in}{4N} = \frac{\in}{2}$ మించదు.

t ఎంపిక బిందువైతే $0 \le h(t) \le 1$ కాబట్టి $S(h, \dot{P}_1) = \sum_{t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq \dot{P}_1} h(t_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\le \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subseteq \dot{P}_1} (x_i - x_{i-1}) \le \in/2$$

$\dot{P}_2$లోని ఎంపిక బిందువు t కి, $h(t) = 0$. కనుక $S(h, \dot{P}_2) = 0$

$$\therefore\ S(h, \dot{P}) = S(h, \dot{P}_1) + S(h, \dot{P}_2) \le \frac{\in}{2} < \in$$

కాబట్టి $h \in R\ [0, 1]$ మరియు $\int_0^1 h\,dx = 0$

18.6.7 ఉదాహరణ: $f : [a, b] \to R$, $g : [a, b] \to R$ ప్రమేయాలు. $c \in [a, b]$. 'c' బిందువు వద్ద తప్పితే అనగా $[a, b] - \{c\}$లోని ప్రతి xకి $f(x) = g(x)$ అయితే $f \in R\,[a, b] \Leftrightarrow g \in R\,[a, b]$.

ఈ సందర్భంలో $\int_a^b f\ dx = \int_a^b g\ dx$

సాధన: $[a, b]$ అంతరంలో $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$ ఎంపిక విభజన అనుకుందాము.

$c \in [x_{i-1}, x_i]$ అనుకుంటే $j \ne i$కి $f(t_j) = g(t_j)$, $t_i \ne c$ అయితే $f(t_i) = g(t_i)$, $t_i = c$ అయితే $f(t_i) \ne g(t_i)$ కాబట్టి $\left|S(f, \dot{P}) - S(g, \dot{P})\right| = \left|(f(t_i) - g(t_i))\right| (x_i - x_{i-1})$

$$\le |f(c) - g(c)|\, \|\dot{P}\| \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

$f \in R[a, b]$ అనుకుందాము.

$\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta_1 > 0, \|\dot{P}\| < \delta_1$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజనకీ $\left| S(f, \dot{P}) - \int_a^b f\, dx \right| < \in/2$

అయ్యేటట్లుగా వుంటుంది $\cdots$ (2)

$\|\dot{P}\| = \dfrac{\in}{2\left(|f(c) - g(c)|\right)}$ అనుకుంటే, $\left| S(f, \dot{P}) - S(g, \dot{P}) \right| < \in/2$ అవుతుంది.

$\delta =$ కనిష్ఠం $\left\{ \delta_1, \dfrac{\in}{2\left(|f(c) - g(c)|\right)} \right\}, \ \|\dot{P}\| < \delta$ అనుకుంటే

$$\left| S(g, \dot{P}) - \int_a^b f\, dx \right| \le \left| S(g, \dot{P}) - S(f, \dot{P}) \right| + \left| S(f, \dot{P}) - \int_a^b f\, dx \right| < \in/2 + \in/2 = \in$$

$\Rightarrow \ g \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b g\, dx = \int_a^b f\, dx$

f, g ల సౌష్ఠకత బట్టి అనగా g, f స్థానాల మార్పిడి నుండి $g \in R[a, b]$ అయితే $f \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b g\, dx = \int_a^b f\, dx$

18.7 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు జవాబులు:

18.4.4 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $f \in R[a, b]$, $\ell im \|\dot{P}_n\| = 0$ అయ్యేటట్లు $\{\dot{P}_n\}$ ఎంపిక విభజనల అనుక్రమము, సంవృతాంతరము $[a, b]$లో వుంటే $\ell im_n\ S(f, \dot{P}_n) = \int_a^b f\, dx$

సాధన: $f \in R[a, b]$ కాబట్టి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0, \|\dot{P}\| < \delta$ అయినప్పుడు

$$\left| \int_a^b f \; dx - S\left(f \;, \dot{P}\right) \right| < \in$$ అగునట్లుగా వుంటుంది.

$\underset{n}{\ell im} \left\| \dot{P}_n \right\| = 0$ కాబట్టి $\delta > 0$ కి అనురూపంగా ఒక N, ప్రతి $n \geq N$ కి $\left\| \dot{P}_n \right\| < \delta$ అయ్యేటట్లు వుంటుంది.

$n \geq N$ అయితే $\left| \int_a^b f \; dx - S\left(f \;, \dot{P}_n\right) \right| < \in$ కాబట్టి $\underset{n}{\ell im} \; S\left(f \;, \dot{P}_n\right) = \int_a^b f \; dx$

18.4.5 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $g(x) = 0,\; 0 \leq x \leq 1$ మరియు x అకరణీయ సంఖ్య అయితే $g(x) = 0$ ఇతరత్రా $g(x) = \frac{1}{x}$ అనే ప్రమేయం g నిర్వచిస్తే, $\underset{n}{\ell im} \; S\left(g \;, \dot{P}_n\right) = 0$ అయ్యేటట్లు $\left\{\dot{P}_n\right\}$ అనే ఎంపిక విభజన, $[0, 1]$లో వ్యవస్థితం అవుతుందని చూపి, $g \notin R \; [0, 1]$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $\mathbb{N}$లో ప్రతి n కి,

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \;\cdots\; < \frac{n}{n} = 1\right\}$$

$t_i = \frac{i}{n}$ అయితే, $t_i \in \left[\frac{i-1}{n},\; \frac{i}{n}\right]$ మరియు $g\left(t_i\right) = 0$

$\dot{P}_n = \left\{\left[\frac{i-1}{n},\; \frac{i}{n}\right],\; t_i\right\}_{i=1}^{n}$ అనుకుంటే $S\left(g,\; \dot{P}_n\right) = 0$

$\left\| \dot{P}_n \right\| = \frac{1}{n}$ కనుక $\underset{n}{\ell im} \; \left\| \dot{P}_n \right\| = 0$ మరియు $\underset{n}{\ell im} \; S\left(g \;, \dot{P}_n\right) = 0$

$g \notin R \; [0, 1]$ అని 18.4.8 నుండి రాబట్టవచ్చును.

18.4.6 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $f : [a, b] \to R$ పరిబద్ధ ప్రమేయము. $\left\{\dot{P}_n\right\}, \left\{\dot{Q}_n\right\}$ రెండు ఎంపిక విభజన అనుక్రమాలు $\underset{n}{\ell im} \left\| \dot{P}_n \right\| = \underset{n}{\ell im} \left\| \dot{Q}_n \right\| = 0$

$\lim_{n} S(f, \dot{P}_n) \neq \lim S(f, \dot{Q}_n)$ అవుతూ ఉంటాయని చూపి దీన్నించి $f \notin R[a, b]$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $f \in R[a, b]$ అనుకుందాము.

$\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0, \|\dot{P}\| < \delta$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ కి

$$\left| S(f, \dot{P}) - \int_a^b f \right| < \in/2$$ అయ్యేటట్లుగా వుంటుంది.

$\lim \|\dot{P}_n\| = \lim \|\dot{Q}_n\| = 0$ కనుక పై $\delta > 0$ కి అనురూపంగా $\mathbb{N}$లో ప్రతి $n \geq N$ కి, $\|\dot{P}_n\| < \delta$, $\|\dot{Q}_n\| < \delta$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది. అందుచేత $n \geq N$ అయితే

ప్రతి n కి $\left| S(f, \dot{P}_n) - \int_a^b f \right| < \in/2, \quad \left| S(f, \dot{Q}_n) - \int_a^b f \right| < \in/2$

కాబట్టి $n \geq N \Rightarrow \left| S(f, \dot{P}_n) - S(f, \dot{Q}_n) \right| < \in$

కాబట్టి $\lim_{n} \left\{ S(f, \dot{P}_n) - S(f, \dot{Q}_n) \right\} = 0$

దత్తాంశము $\lim_{n} S(f, \dot{P}_n) \neq \lim_{n} S(f, \dot{Q}_n)$ కనుక ఇది విరుద్ధము.

$\therefore \quad f \notin R[a, b]$

18.4.9 (a) **స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:**

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow$ ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0$, $A \in \mathsf{R}$, $\|\dot{P}\| < \delta$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ కి $\left| S(f, \dot{P}) - A \right| \leq \in$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుందని చూపండి.

సాధన: $f \in R[a, b]$ కాబట్టి ఒక A ప్రతి $\in > 0$ కి అనూరూపంగా $\delta > 0, \|\dot{P}\| < \delta$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ కి $\left| S(f, \dot{P}) - A \right| < \in$ అయ్యేటట్లు A వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$\|\dot{P}\| \le \delta/2$ అయితే $\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)-A\right| < \in$

$\therefore\ \|\dot{P}\| \le \delta/2$ అయితే $\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)-A\right| \le \in$

విపర్యయము: ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0$, $\|\dot{P}\| \le \delta$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజనకి $\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)-A\right| \le \in$ అయ్యేటట్లు $A \in \mathsf{R}$ వ్యవస్థితం అవుతుందనుకోండి. అప్పుడు ప్రతి $\dot{P}$, $\|\dot{P}\| < \delta$ కి ($\|\dot{P}\| \le \delta$ కాబట్టి) $\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)-A\right| < 2\in$ అవుతుంది.

$\in > 0$ యాదృచ్ఛికం కనుక $f \in R\,[a,\ b]$.

(b) **స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:**

$f : [0,1] \to \mathsf{R}$ అనే డిరిష్లే ప్రమేయము

$f(x) = 1,\quad 0 \le x \le 1,\quad x$ అకరణీయ సంఖ్య (అయినప్పుడు)

$\quad = 0,\quad 0 \le x \le 1,\quad x$ కరణీయ సంఖ్య (అయినప్పుడు)

రీమాన్ సమాకలనీయం కాదని చూపండి.

సాధన: అకరణీయ సంఖ్యలు ఎంపిక బిందువులుగా $[0,1]$ అంతరంలో $\dot{P}$ అనే ఎంపిక విభజనకి, $S\left(f\ ,\dot{P}\right) = 1$.

కరణీయ సంఖ్యలు ఎంపిక బిందువులుగా $\dot{P}$ అనే ఎంపిక విభజనకి $S\left(f\ ,\dot{P}\right) = 0$

$\therefore\ \in = 1/2$ అనుగుణంగా $\delta > 0$, $\|\dot{P}\| < \delta$ అయినపుడు $\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)-A\right| < 1/2$ అయ్యేవిధంగా ఒకే ఒక్క A వ్యవస్థితం కాదు. కావున $f \notin R\,[0,1]$.

(c) **స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:**

$f : [a,\ b] \to \mathsf{R}$ ప్రమేయము $[a,\ b]$ సంవృతాంతరంలో $x_1, x_2, \cdots, x_r$, r బిందువులు, వీటికి తప్పితే ఇతరత్రా $f(x) = 0$ గా నిర్వచింపబడితే $f \in R\,[a,\ b]$ అనీ $\int_a^b f\ dx = 0$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_r = b$, $\{c_1, c_2, \cdots\cdots\cdots, c_r\} \subseteq \mathsf{R}$ ప్రతి i కి $c_i \ne 0$ అనుకోండి. $f : [a,\ b] \to \mathsf{R}$ ప్రమేయాన్ని

$f(x_i) = c_i, \ x_i \in [a, b]$

$f(x) = 0, \ \ x \neq x_i$ (ప్రతి i కి, $1 \le i \le r$) గా నిర్వచిస్తే,

$f \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b f \ dx = 0$ అని చూపాలి.

$[a, b]$ అంతరానికి

$\dot{P} = \left\{ \left([y_{i-1}, y_i], t_i \right) \right\}_{i=1}^{n}$ అనే ఏదైనా ఎంపిక విభజన తీసుకుంటే

$$\left| S\left(f, \dot{P}\right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(y_i - y_{i-1}) \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| f(t_i) \right| (y_i - y_{i-1})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| f(t_i) \right| \left\| \dot{P} \right\|$$

ప్రతి $f(x) = 0$ లేదా c_i కనుక $|f(x)| \le |c_1| + |c_2| + \cdots\cdots\cdots\cdots + |c_r|$

కాబట్టి $\left| S\left(f, \dot{P}\right) \right| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i| \left\| \dot{P} \right\|$

$\in > 0, \ \delta = \dfrac{\in}{\sum_{i=1}^{r} |c_i|}$ అనుకుంటే, $\left\| \dot{P} \right\| < \delta$ అయినప్పుడు

$\left| S\left(f, \dot{P}\right) \right| < \in$ కాబట్టి $f \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b f \ dx = 0$

(d) **స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:**

$[a, b]$ అంతరంలో $a \le c_1 < c_2 \le b,\ c_1 \le t_j \le c_2$ అయ్యేటట్లు $\dot{P} = \left\{\left(I_j, t_j\right)\right\}_{j=1}^{n}$ అనే ఎంపిక విభజనలో $u \in I_j$ అయితే $u \in \left[c_1 - \left\|\dot{P}\right\|, c_2 + \left\|\dot{P}\right\|\right]$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $I_j = \left[x_{j-1}, x_j\right]$ అనుకుంటే, $x_{j-1} \le u \le x_j,\ c_1 < t_j < c_2$

$x_{j-1} \le t_j \le x_j$ అవుతుంది.

$x_j - x_{j-1} \le \left\|\dot{P}\right\|$ కనుక $x_j \le x_{j-1} + \left\|\dot{P}\right\|$ అవుతుంది.

$$\Rightarrow \quad c_1 \le t_j \le x_j \le x_{j-1} + \left\|\dot{P}\right\| \Rightarrow c_1 - \left\|\dot{P}\right\| \le x_{j-1} \le u \quad \cdots \quad (1)$$

$$x_j - \left\|\dot{P}\right\| \le x_{j-1} \le t_j \le c_2 \text{ కనుక } u \le x_j < c_2 + \left\|\dot{P}\right\| \quad \cdots \quad (2)$$

(1), (2) నుండి, $u \in \left[c_1 - \left\|\dot{P}\right\|, c_2 + \left\|\dot{P}\right\|\right]$

18.8 సారాంశము:

ఎంపిక విభజన అంశంతో రీమాన్ సమాకలని నిర్వచనాన్ని పరిచయం చేయడమైనది. రీమాన్ సమాకలని ఏకైకత, రీమాన్ సమాకలన ప్రమేయాల పరిబద్ధత, ఋజు ధర్మం ఆవిష్కరింపబడినవి. అనేక ఉదాహరణలు విపులంగా చర్చించబడినవి.

18.9 సాంకేతిక పదాలు:

ఎంపిక విభజన

విభజన యొక్క విస్తృతి

రీమాన్ సమాకలనము

18.10 అభ్యాసములు:

1. $I = [0, 4]$ అంతరంలో క్రింది ఇవ్వబడిన విభజనల విస్తృతి గణించండి.

(a) $P_1 = \{0, 1, 2, 4\}$

(b) $P_2 = \{0, 2, 3, 4\}$

2. $0 \le x \le 4$ కి $f(x) = x^2$ అయితే

(a) $P_1 = \{0, 1, 2, 4\}$ విభజనలో

(i) ఎడమ చివరి బిందువులు ఎంపిక బిందువులు,

(ii) కుడి చివరి బిందువులు ఎంపిక బిందువులు.

అయితే రీమాన్ మొత్తము గణించండి.

(b) $P_2 = \{0, 2, 3, 4\}$ విభజనలో

(i) ఎడమ చివరి బిందువులు ఎంపిక బిందువులు,

(ii) కుడి చివరి బిందువులు ఎంపిక బిందువులు.

అయితే రీమాన్ మొత్తము గణించండి.

3. $f(x) = 2, \quad 0 \le x < 1$

$= 1, \quad 1 \le x \le 2$

అనే ప్రమేయము $f \in R[0, 2]$ అని చూపి $\int_0^2 f \, dx = 3$ అని నిరూపించండి.

4. $g(x) = 2, \quad 0 \le x < 1$

$= 1, \quad x = 1$

$= 3, \quad 1 < x \le 2$

అయితే $g \in R[0, 1]$ అని చూపి, $\int_0^2 g \, dx = 5$ అని నిరూపించండి.

5. అనుగమన సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి, ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కి, $1 \le i \le n$ కి $f_i \in R[a, b]$, $k_i \in R$ అయితే $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots\cdots\cdots + k_n f_n \in R[a, b]$ అని

$$\int_a^b \left(k_1 f_1 + \cdots\cdots + k_n f_n\right) dx = k_1 \int_a^b f_1\, dx + k_2 \int_a^b f_2\, dx + \cdots\cdots + k_n \int_a^b f_n\, dx$$

అని నిరూపించండి.

6. $[a, b]$ అంతరం పై నిర్వచించిన ప్రమేయాలు f, g లు $g \in R[a, b]$ మరియు ప్రతి $x \in$ కి $f(x) \le g(x)$ అయితే $f \notin R\ [a,\ b]$ అని చూపండి.

7. $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ ప్రమేయము, కొన్ని పరిమిత బిందువుల వద్ద తప్ప, మిగిలిన బిందువుల వద్ద $f(x) = 0$ అయితే $f \in \mathsf{R}\ [a, b]$ అని, $\int_a^b f\ dx = 0$ అని నిరూపించండి.

8. $f : [a, b] \to \mathsf{R}$, $g : [a, b] \to \mathsf{R}$ ప్రమేయాలు కొన్ని పరిమిత బిందువుల వద్ద తప్పితే మిగిలిన బిందువుల దగ్గర $f(x) = g(x)$ అయితే $f \in R\ [a,\ b] \Leftrightarrow g \in R\ [a, b]$ అనియు,

$\int_a^b f\ dx = \int_a^b g\ dx$ అని నిరూపించండి.

9. $0 \le\ a < b,\ f(x) = x^2,\ a \le x \le b$ అయి, $q_i = \sqrt{x_i^2 + x_i\ x_{i-1} + x_{i-1}^2}$ అయితే ఎంపిక విభజన $\dot{P} = \left\{\left(\left[x_{i-1},\ x_i\right],\ q_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ కి క్రింది ప్రవచనాలు నిరూపించండి.

(i) $0 \le x_{i-1} \le q_i \le x_i$

(ii) $f(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \dfrac{x_i^3 - x_{i-1}^3}{3}$

(iii) $S\left(f\ ,\ \dot{P}\right) = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$

(iv) $f \in R\,[a,\ b]$ అని $\int_a^b f\ dx = \dfrac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$

10. $f \in R[a, b], \quad a < c < b$

$g : [a+c, b+c] \to R$ ప్రమేయాన్ని $g(x) = f(x-c)$గా నిర్వచిస్తే $g \in R[a+c, b+c]$ అని,

$\int_a^b f\ dx = \int_{a+c}^{b+c} g(x)\ dx$ అని నిరూపించండి.

11. $f \in R[a, b]$ మరియు ప్రతి $x \in [a, b]$కి $|f(x)| \le M$ అయితే $\left|\int_a^b f\ dx\right| \le M(b-a)$ అని నిరూపించండి.

12. $[0, 3]$ అంతరంలో $\dot{P}$ ఎంపిక విభజన.

(a) $[0, 1]$ అంతరంలో $\dot{P}$ ఎంపిక విభజనలోని ఎంపిక బిందువులతో, U_1 అనేది ఉపాంతరాల సమ్మేళనం $\left[0, 1-\|\dot{P}\|\right] \subseteq U_1 \subseteq \left[0, 1+\|\dot{P}\|\right]$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అని నిరూపించండి.

(b) $[1, 2]$ అంతరంలో $\dot{P}$ ఎంపిక విభజనలోని ఎంపిక బిందువులతో U_2 అనేది ఉపాంతరముల సమ్మేళనము $\left[1+\|\dot{P}\|, 2-\|\dot{P}\|\right] \subseteq U_2 \subseteq \left[1-\|\dot{P}\|, 2+\|\dot{P}\|\right]$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అని నిరూపించండి.

13. $P = \left\{(I_j, t_j)\right\}_{j=1}^{n}$ అనేది $[a, b]$ అంతరంలో అనుబంధిత విభజన అనుకోండి. $a \le c_1 < c_2 \le b$ అయితే $\nu \in \left[c_1 + \|\dot{P}\|, c_2 - \|\dot{P}\|\right] \cap I_j$లో వుంటే, $t_j \in [c_1, c_2]$ అని నిరూపించండి.

14. $f(x) = 2, \ 0 \le x < 1$

$\quad\ = 1, \ 1 \le x \le 2$

అయితే $f \in R[0, 2]$ అనీ $\int_0^2 f\ dx = 3$ అని నిరూపించండి.

$g(x) = 2, \ 0 \le x < 1$

$g(1) = 3$

$g(x) = 1,\ 1 < x \le 2$

అయితే $g \in R[0,\ 2]$ అని $\int_0^2 g\ dx = 3$ అని నిరూపించండి.

15. $0 \le a < b,\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\ f(x) = x^2$

$t_i = \frac{1}{3}\left(x_i^2 + x_i\ \ x_{i-1} + x_{i-1}^2\right)$ అయితే

(a) $x_{i-1} \le t_i \le x_i$

(b) $\dot{P} = \left\{\left([x_{i-1},\ x_i],\ t_i\right)\right\}_{i=1}^{n},\ S(f\ ,\ \dot{P}) = \frac{b^3 - a^3}{3}$

(c) (ఉదాహరణ 18.6.2లోని విధంగానే చర్చించి)

$\int_a^b x^2\ dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$ అని నిరూపించండి.

18.11 నమూనా ప్రశ్నలు:

1. రీమాన్ సమాకలని నిర్వచించి, $f : [a,\ b] \to \mathsf{R}$ సమాకలని ఏకైకము అని నిరూపించండి.

2. $f \in \mathsf{R}[a,\ b]$ అయితే f పరిబద్ధం అని చూపండి.

3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ f(x) = 0,\ 0 \le x \le 1,\ x \ne \frac{1}{2}$ అయితే $f \in R[0,\ 1]$ అని $\int_0^1 f\ dx = 0$ అని నిరూపించండి.

4. $f \in R[a,\ b],\ g \in R[a,\ b]$ అయితే $f + g \in R[a,\ b]$ అని నిరూపించి

$\int_a^b (f + g)\ dx = \int_a^b f\ dx + \int_a^b g\ dx$ అని చూపండి.

5. $f(x) = 0,\ x$ అకరణీయ సంఖ్య

$= 1,\ x$ కరణీయ సంఖ్య

అయితే $f \notin R\,[0,1]$ అని ఋజువు చేయండి.

18.12 మాదిరి ప్రయోగాత్మక సమస్య - సాధన:

$0 < x < 1$ అయినప్పుడు $f(x) = 0,\ f(1) = 1$గా $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ నిర్వచితమైతే $f \in R\,[0,1]$ మరియు $\int_0^1 f\ dx = 0$ అని చూపుము.

నిర్వచనం - $f \in R\,[0,1]$: $[a, b]$ **ఎంపిక విభజన:**

$x_0, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$లు $[a, b]$ లోని బిందువులు $a = x_0 < \cdots < x_n = b$,

$x_{i-1} \le t_i \le x_i\ (1 \le i \le n)$ అయితే $\dot{P} = \left\{\left(\left[x_{i-1}, x_i\right], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$, $[a, b]$ ఎంపిక విభజన అంటాము.

కనిష్టం $\left\{\left(x_i - x_{i-1}\right)/1 \le i \le m\right\}$, $\dot{P}$ విస్తృతి అంటాము.

$$S\left(f\ ,\dot{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \text{ అని వ్రాస్తాము.}$$

రీమాన్ సమాకలనీయత, సమాకలని ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$, $\left\|\dot{P}\right\| < \delta(\in)$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజనకీ $\left|\ S\left(f\ ,\dot{P}\right) - A\right| < \in$ అయ్యేటట్లుగా ఒక వాస్తవ సంఖ్య A వ్యవస్థితమైతే $[a, b]$ మీద f రీమాన్ సమాకలనీయమనీ, f రీమాన్ సమాకలని A అనీ అంటాము, $A = \int_a^b f\ dx$ అని వ్రాస్తాము.

సాధన: $\dot{P} = \left\{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\right\}$, $t_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$, $[0,\ 1]$కి ఒక ఎంపిక విభజన అయితే f నిర్వచనాన్ని బట్టి $0 < t < 1$ అయినప్పుడు $f(t) = 0$ కాబట్టి

$$S\left(f\ ,\dot{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = f\left(t_n\right)\left(x_n - x_{n-1}\right)$$

$= x_n - x_{n-1}$ ($t_n = x_n = 1$ అయినప్పుడు) లేదా

$= 0$ (అనగా $t_n < 1$ అయినప్పుడు)

$\in > 0, \| \dot{P} \| < \in$ అయితే $x_n - x_{n-1} < \in$ కాబట్టి $S\left(f, \dot{P}\right) < \in$

అందుచేత $\left| S\left(f, \dot{P}\right) \right| \leq x_n - x_{n-1} \leq \| \dot{P} \| < \in$

అందుచేత $\in > 0$ అయినప్పుడు $\delta(\in) = \in$గా ఎంచుకొనగా $\| \dot{P} \| < \delta(\in) = \in$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజనకీ $\left| S\left(f, \dot{P}\right) - 0 \right| < \in.$

కాబట్టి $f \in R[0, 1]$ మరియు $\int_0^1 f \, dx = 0$

పాఠ్యభాగ రచయిత

C. సంధ్య

పాఠము - 19

రీమాన్ సమాకలనీయత

19.1 లక్ష్యం:

$f:[a, b] \rightarrow R$ ప్రమేయాల సమాకలనీయతకి సంబంధించిన కొన్ని ఘటనలు, వీటి ఉపయోగంతో సమాకలనీయ ప్రమేయాలలో తరగతులను గుర్తించి, ప్రదేశాన్ని చిన్న ఉపాంతరములుగా విడగొట్టి, ప్రమేయాల సమాకలనీయతను చర్చించాము.

19.2 అంశాలక్రమము:

19.3 ఉపోద్ఘాతము:

ఈ పాఠ్యాంశములో రీమాన్ సమాకలనీయత నియమాలు చర్చిస్తాము. కోషీ నియమాలు, స్క్వీజ్ సిద్ధాంతములను కూలంకషంగా చర్చించి, వాటిని ప్రయోగించి, ఎంపిక విభజనలో సమాకలనీయ నియమాలను గూర్చి చర్చించాము. కొన్ని చోట్ల ఈ సిద్ధాంతముల అన్వయము చాలా క్లిష్టంగా వుంటుంది. అటువంటి పరిస్థితిలో వాటికి తుల్యమైన ప్రవచనములు, నిరూపణలతో అవసరం లేకుండా ప్రతిపాదించాము. ఇందులో సోపాన ప్రమేయములు, అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు, ఏకదిష్టప్రమేయాల సమాకలనీయతని ఆవిష్కరించడమైనది. సమాకలన ప్రమేయాల సంకలన ధర్మాల నిరూపణలో, అంతరాలు విభజించి, వాటి సమ్మేళనాలను వివరించాము. సమాకలనంలో ప్రమేయాల లబ్ధం, ప్రమేయాల ప్రతిక్షేపణలు గురించి కొన్ని సిద్ధాంతములు చర్చించాము. స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలలో, అభ్యాసములో కొన్ని సమాకలనీయ ధర్మాలు చర్చించాము.

19.4 సమాకలనీయ నియమాలు:

19.4.1 రీమాన్ సమాకలతకి కోషీ సిద్ధాంతము: $f : [a, b] \to R$ ప్రవేయము. $f \in R[a, b] \Leftrightarrow$ ప్రతి $\in > 0$ అనురూపంగా $[a, b]$కి $\dot{P}, \dot{Q}$లు అసంబంధిత విభజనలు $\|\dot{P}\| < \eta_\in$, $\|\dot{Q}\| < \eta_\in$ అయినప్పుడల్లా $\left|S(f, \dot{P}) - S(f, \dot{Q})\right| < \in \cdot \cdot \cdot (1)$ అయ్యేటట్లు $\eta_\in > 0$ వ్యవస్థితం.

ఉపపత్తి: $\Leftrightarrow$, $f \in R[a, b]$ అనుకుందాము. నిర్వచనాన్ని అనుసరించి ప్రతి $\in > 0$, అనురూపంగా $\eta_\in$, $[a, b]$లోని ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ కి, $\|\dot{P}\| < \eta_\in$ అయినపుడు $\left|S(f, \dot{P}) - \int_a^b f\, dx\right| < \in/2$ అయ్యేటట్లు $\eta_\in > 0$ వ్యవస్థితం.

$[a, b]$కి $\dot{P}, \dot{Q}$ అనే ఎంపిక విభజనల విస్తృతి $< \eta_\in$, మరియు $L = \int_a^b f\, dx$ అయితే $\left|S(f, \dot{P}) - S(f, \dot{Q})\right|$

$$= \left|S(f, \dot{P}) - L + L - S(f, \dot{Q})\right|$$

$$\le \left|S(f, \dot{P}) - L\right| + \left|S(f, \dot{Q}) - L\right| < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

విపర్యయము: $\Leftrightarrow$ ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\eta_\in > 0, \dot{P}, \dot{Q}$ ఎంపిక విభజనలు వీటి విస్తృతి $< \eta_\in$ అయినప్పుడల్లా $\left|S(f, \dot{P}) - S(f, \dot{Q})\right| < \in \cdot \cdot \cdot (2)$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది అనుకొందాము.

$n \in \mathbb{N}$, $\in = \frac{1}{n}$ అనుకుంటే, (2) తృప్తిరిచే విధంగా $\eta_n > 0$, $\dot{P}, \dot{Q}$లు ఎంపిక విభజనలు వాటి విస్తృతులు $< \eta_n$ అయినప్పుడు (2) జరిగేటట్లుగా వ్యవస్థితం.

δ_n = కనిష్టం $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n\}$ అనుకుందాము.

$\Rightarrow$ ప్రతి $1 \le i \le n+1$కి $\delta_{n+1} \le \eta$, కనుక $\delta_{n+1} \le \delta_n$

$\|\dot{P}_n\| < \delta_n$ అయ్యేటట్లు $[a, b]$కి ఎంపిక విభజన $\dot{P}_n$ తీసుకుందాము.

$\in > 0$, $N > \frac{1}{\in}$ అయ్యే సహజ సంఖ్య N తీసుకుంటే,

$m > n > N \Rightarrow \delta_m < \delta_n < \delta_N$ కాబట్టి $\|\dot{P}_m\| < \delta_n < \delta_N$, $\|\dot{P}_n\| < \delta_n \le \delta_N$

$\in = \frac{1}{N}$ కి (2) అనువర్తింపజేస్తే, $m > n \ge N$ అయినప్పుడు

$$\left| S\left(f , \dot{P}_m\right) - S\left(f , \dot{P}_n\right)\right| < \frac{1}{N} < \in$$

$\therefore$ $\left\{S\left(f , \dot{P}_n\right)\right\}$ అనేది R లో కోషీ అనుక్రమము.

$A = \lim\limits_{n} S\left(f , \dot{P}_n\right)$ అనుకుందాము.

$\in > 0$ కి అనురూపంగా, $[a, b]$ ఎంపిక విభజన $\|\dot{P}\| < \eta_\in$ అయినప్పుడల్లా $\left|S\left(f , \dot{P}\right) - A\right| < \in$ అయ్యేటట్లు $\eta_\in > 0$ వ్యవస్థితం అవుతుందని నిరూపిస్తే, $f \in R[a, b]$ అని, $\int_a^b f \; dx = A$ అని నిరూపణ అవుతుంది.

$\lim\limits_{n} S\left(f , \dot{P}_n\right) = A$ కనుక $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $N > \frac{2}{\in}$ ప్రతి $n \ge N$ కి

$\left|S\left(f , \dot{P}_n\right) - A\right| < \frac{\in}{2}$ అయ్యేటట్లుగా వుంటుంది $\cdots$ (3)

$\eta_\in = \delta_N$ అనుకుందాము. $[a, b]$కి P అనేది ఎంపిక విభజన, P విస్తృతి $< \eta_\in$ అయితే

$\|\dot{P}\| < \delta_N$ మరియు $\|\dot{P}_N\| < \delta_N$ కాబట్టి (2) నుండి

$$\left|S\left(f , \dot{P}\right) - S\left(f , \dot{P}_N\right)\right| < \frac{1}{N} < \frac{\in}{2} \quad \cdots \quad (4)$$

$\|\dot{P}\| < \eta_\in$, $\left|S\left(f , \dot{P}\right) - A\right|$

$$= \left|\left\{S\left(f , \dot{P}\right) - S\left(f , \dot{P}_N\right)\right\} + \left\{S\left(f , \dot{P}_N\right) - A\right\}\right|$$

$$\le \left|S\left(f , \dot{P}\right) - S\left(f , \dot{P}_N\right)\right| + \left|S\left(f , \dot{P}_N\right) - A\right|$$

$$< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

19.4.2 స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము: $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ అనుకుందాము. $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \in > 0$ కి అనుగుణంగా $\alpha_\in$, $W_\in$ ప్రమేయమాలు.

(i) $[a, b]$ మీద సమాకలనీయం (ii) ప్రతి $x \in [a, b]$కి $\alpha_\in(x) \le f(x) \le W_\in(x)$

(iii) $\int_a^b (w_\in - \alpha_\in)\, dx = 0$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతాయి.

ఉపపత్తి: $f \in R[a, b]$ అనుకుందాము.

$\in > 0$ కి, $\alpha_\in = w_\in = f$ అని అనుకుంటే, $\alpha_\in$, $w_\in$ ప్రమేయాలు (i), (ii) మరియు (iii)ను తృప్తిపరుస్తాయి.

విపర్యయము: ప్రతి $\in > 0$ కి, (i), (ii), (iii) నియమాలను పాటించేటట్లు $\alpha_\in$, $w_\in$లు వ్యవస్థితం అవుతాయని అనుకుందాము.

$\alpha_\in \in R[a, b]$ కనుక

$\in > 0$ కి అనురూపంగా δ_1, $\|\dot{P}\| < \delta_1$ అయినప్పుడు

$$\left| S(\alpha_\in, \dot{P}) - \int_a^b \alpha_\in\, dx \right| < \in/3 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$ అయ్యేటట్లుగా వ్యవస్థితం అవుతుంది.

అదే విధంగా $[a, b]$కి $\dot{Q}$ ఎంపిక విభజన $\|\dot{Q}\| < \delta_2$ అయినప్పుడల్లా

$$\left| S(w_\in, \dot{Q}) - \int_a^b w_\in\, dx \right| < \in/3 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$ అయ్యేటట్లు $\delta_2 > 0$ వ్యవస్థితం.

$(1) \Rightarrow \|\dot{P}\| < \delta_1$ అయినప్పుడల్లా

$$\int_a^b \alpha_\in\, dx - \in/3 < S(\alpha_\in, \dot{P}) < \int_a^b \alpha_\in\, dx + \in/3$$

$(2) \Rightarrow \left\|\dot{Q}\right\| < \delta_2$ అయినప్పుడల్లా

$$\int_a^b w_\in dx - \in/3 < S\left(w_\in, \dot{Q}\right) < \int_a^b w_\in \, dx + \in/3$$

$\delta_\in =$ కనిష్ఠం $\{\delta_1, \delta_2\}$, $[a, b]$కి $\left\|\dot{P}\right\| < \delta_\in$ అయ్యేటట్లు $\dot{P}$ అనే ఎంపిక విభజన అనుకుందాము.

ప్రతి $x \in [a, b]$కి $\alpha_\in(x) \le f(x) \le w_\in(x)$ కనుక $S\left(\alpha_\in, \dot{P}\right) \le S\left(f, \dot{P}\right) \le S\left(w_\in, \dot{P}\right)$

$$\Rightarrow \int_a^b \alpha_\in \, dx - \in/3 \le S\left(\alpha_\in, \dot{P}\right) \le S\left(f, \dot{P}\right) \le S\left(w_\in, \dot{P}\right) < \int_a^b w_\in dx + \in/3$$

$$\Rightarrow \int_a^b \alpha_\in \, dx - \in/3 < S\left(f, \dot{P}\right) < \int_a^b w_\in \, dx + \in/3 \quad \cdots \quad (3)$$

ఇపుడు $[a, b]$కి $\dot{Q}$ ఎంపిక విభజన విస్తృతి $< \delta_\in$ తీసుకుంటే

$$\int_a^b \alpha_\in \, dx - \in/3 < S\left(f, \dot{Q}\right) < \int_a^b w_\in \, dx + \in/3 \quad \cdots \quad (4)$$

(3), (4) నుండి $\left\|\dot{P}\right\| < \delta_\in$, $\left\|\dot{Q}\right\| < \delta_\in$ అయినప్పుడల్లా

$$\left|S\left(f, \dot{P}\right) - S\left(f, \dot{Q}\right)\right| < \int_a^b \left(w_\in - \alpha_\in\right) dx + \in/3 < \in/3 + \in/3 + \in/3 = \in \qquad ((iii) \text{ నుండి})$$

$\therefore$ కోషీ నిబంధన నుండి $f \in R[a, b]$

19.4.3 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు:

(a) $g : (0, 3) \to \mathrm{R}$ ప్రమేయము

$g(x) = 2, \ 0 \le x \le 1$

$= 3, \ 1 < x \le 3$ అని నిర్వచిస్తే

కోషీ నిబంధనలు ఉపయోగించి $f \in R[0, 3]$ అని నిరూపించండి.

(b) కోషీ సిద్ధాంతమునుపయోగించి డిరిష్లే ప్రమేయము, సమాకలనీయము కాదని నిరూపించండి.

(c) $f : [a, b] \to R, \quad f \notin R \ [a, b]$

$\Leftrightarrow$ ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కి, $\ell im \|\dot{P}_n\| = \ell im \ \|\dot{Q}_n\| = 0$ అయ్యే విధంగా ఎంపిక విభజనలు $\dot{P}_n, \ \dot{Q}_n$ ఉన్నప్పటికీ ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కి $\left|S\left(f, \dot{P}_n\right) - S\left(f, \dot{Q}_n\right)\right| \geq \in_0$ అయ్యే విధంగా $\in_0 > 0$ వ్యవస్థితం అవుతుంది అని చూపండి.

(d) $H(x) = x + 1, \ x \in [0, 1], \ x$ అకరణీయ సంఖ్య

$= 0$ మిగిలిన x విలువకు

అయితే $H \notin R \ [0, 1]$ అని నిరూపించండి.

(e) $H(x) = k, \ x = \dfrac{1}{k}, \ k \in \mathbb{N}$

$= 0, \ 0 \leq x \leq 1, \ x \neq \dfrac{1}{k}$ ఏదైనా $k \in \mathbb{N}$ అని నిర్వచిస్తే $H \notin R \ [0, 1]$ అని నిరూపించండి.

19.4.4 పరిబద్ధ ప్రమేయాల సమాకలనీయత నియమము: పరిబద్ధ ప్రమేయము $f : [a, b] \to R$ సమాకలనీయతకు కొన్ని ప్రతిపాదనలు ఉపపత్తి లేకుండా ఇక్కడ చేస్తాము.

సిద్ధాంతము: $f : [a, b] \to R$ ప్రమేయము పరిబద్ధము అనుకుంటే, క్రింది ప్రవచనములు తుల్యములు.

(a) $f \in R\,[a, \ b]$

(b) ప్రతి $\in > 0$ అనురూపంగా $[a, b]$కి విభజన $P_\in$, $\dot{P}_1, \dot{P}_2$ ఎంపిక విభజనలు ఇవి రెండూ $P_\in$ ఉపాంతరములను కలిగి వుంటే,

$$\left|S\left(f, \dot{P}_1\right) - S\left(f, \dot{P}_2\right)\right| < \in$$

(c) $P_i \ \{a = x_0 < \cdots\cdots\cdots < x_n = b\}, \ I_j = \left[x_{j-1}, \ x_j\right],$

$M_j =$ క.ఎ.హ. $\left\{f(x) / x \in \left[x_{j-1}, \ x_j\right]\right\},$

$m_j =$ గ.ది.హ. $\left\{ f(x) / x \in \left[x_{j-1}, x_j \right] \right\}$,

$[a, b]$ విభజన $P = \{I_j\}_{j=1}^{n}$ కి డోలన మొత్తము

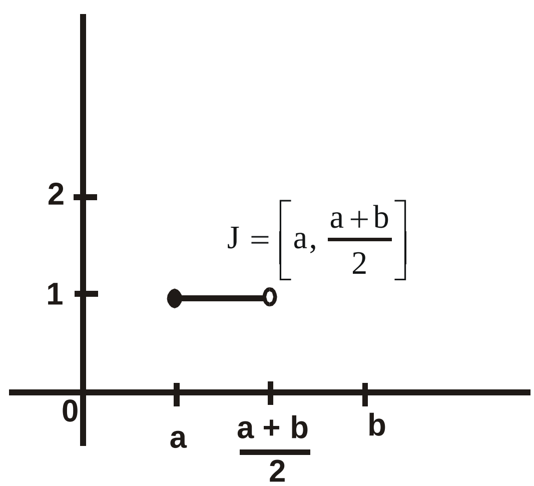
$O(f, P) = \sum_{j=1}^{n} \left(M_j - m_j\right)\left(x_j - x_{j-1}\right)$ అని వ్రాయండి.

ప్రతి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $P_\in = \{I_j\}_{j=1}^{n}$

$O(f, P_\in) < \in$ అయ్యేటట్లుగా లభ్యం కావలె.

19.5 సోపాన ప్రమేయముల సమాకలనీయత:

19.5.1 నిర్వచనము:



$f : [a, b] \to R$ ప్రమేయము. $J \subseteq [a, b]$ ఏదైనా అంతరము.

$f(x) = 1, \ x \in J$

$= 0, \ x \in [a, b] \setminus J$ అని నిర్వచిస్తే

f ని ప్రాథమిక సోపాన ప్రమేయము అంటారు.

దీనిని ϕ_J తో సూచిస్తారు.

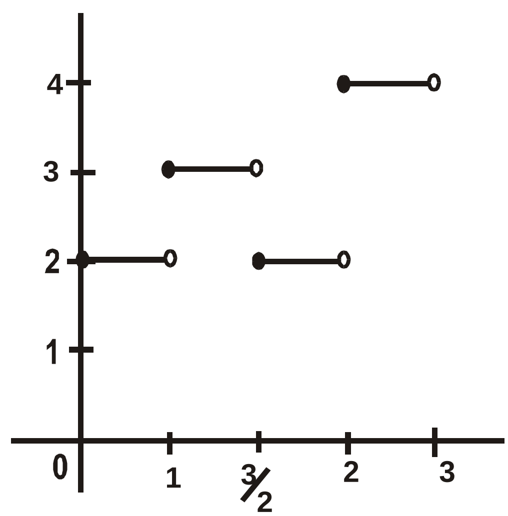
గమనిక: అంతరం J లో రెండు చివరి బిందువులు లేదా ఏదైనా ఒక చివరి బిందువు లేదా రెండూ వుండకపోవచ్చు. $J = \{c\}$ అయినా కావచ్చును.

నిర్వచనము: $f : [a, b] \to R$ ప్రమేయము

f వ్యాప్తిలో పరిమిత విభిన్న విలువలు వుండి, పరిమిత సంఖ్య కలిగిన ఉపాంతరాలలో ఈ విలువలు నిర్వచింపబడితే f ని సోపాన ప్రమేయము అంటారు.

19.5.2 ఉదాహరణలు:

(1) $f : [0, 3] \to R$ ప్రమేయాన్ని



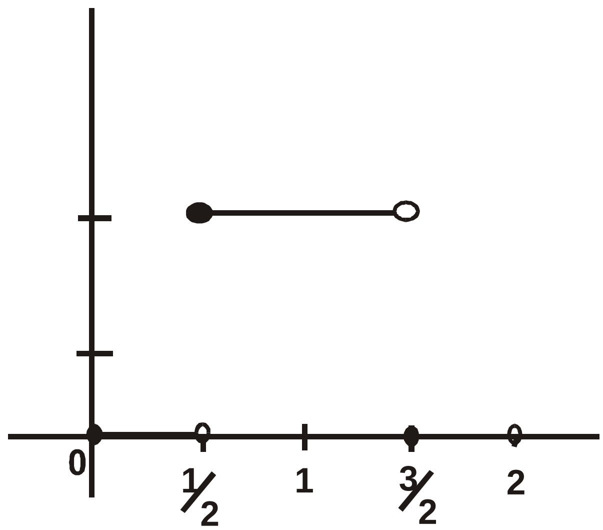
$$f(x) = 2, \ 0 \le x \le 1$$
$$= 3, \ 1 < x \le 3/2$$
$$= 2, \ 3/2 < x \le 2$$

$= 4, \ 2 < x \le 3$ అని నిర్వచిస్తే f ని సోపాన ప్రమేయము అని అంటారు.

(2) $[0, 2]$ అంతరంలో f ని

$f(x) = 0, \ 0 \le x < 1/2$ లేదా $3/2 \le x \le 2$

$= 1, \ \frac{1}{2} \le x < 3/2$ అని నిర్వచిస్తే ఇది సోపాన ప్రమేయము. కానీ ప్రాథమిక సోపాన ప్రమేయము కాదు.



గమనిక: సోపాన ప్రమేయానికి వ్యాప్తి పరిమిత సమితి కాని విపర్యయము నిజము కాదు అనగా ప్రమేయానికి వాస్తవ పరిమిత సమితి అయి ఉన్నంత మాత్రాన ఆ ప్రమేయము సోపాన ప్రమేయము కాకపోవచ్చు.

ఉదాహరణకు $[0,\ 1]$ అంతరంలో f ప్రమేయాన్ని

$$f(x) = 0,\ x \in \left\{ 1/n\ :\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$= 1$, మిగిలిన వాస్తవ విలువలకు ప్రతి xకి $f(x) = 0$ లేదా 1.

కాని, $f^{-1}\{0\} = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$ సమితి మరియు $[0,1]$ దాని పూరక సమితులు, అంతరాలు కాని, అంతరాల సమ్మేళనము కాని కాదు.

19.5.3 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: ప్రతి సోపాన ప్రమేయాన్ని ప్రాథమిక సోపాన ప్రమేయాల ఋజు సంయోగంగా వ్రాయవచ్చును.

19.5.4 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $[a,\ b]$ అంతరంలో f సోపాన ప్రమేయాన్ని, $a \le c \le b$, c స్థిరాంకము

$f(x) = 1,\ x = c$

$= 0,\ x \ne c$ అని నిర్వచిస్తే $f \in R[a,\ b]$ అని, $\int_a^b f\ dx = 0$ అని నిరూపించండి.

19.5.5 లెమ్మా: $[c,\ d] \subseteq [a,\ b],\ \alpha \neq 0.\ \ f : [a,\ b] \to \mathrm{R}$ ప్రమేయము

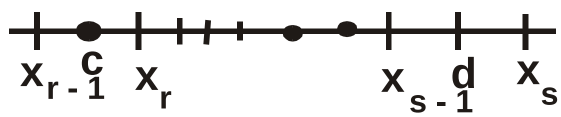
$$f(x) = \alpha,\ c \le x \le d$$

$$= 0,\ [a,\ b] \setminus [c,\ d]$$

అని నిర్వచిస్తే $f \in R[a,\ b]$ మరియు $\int_a^b f\ dx = \alpha(d - c)$

ఉపపత్తి: $[a,\ b]$కి $\dot{P} = \left\{\left([x_{i-1},\ x_i],\ t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ అనే ఎంపిక విభజనలో ఉపాంతరాలను

$x_{r-1} < c \le x_r < x_{s-1} \le d < x_s$ అనుకుంటే



$$S(f\ ,\dot{P}) = f(t_r)(x_r - x_{r-1}) + \alpha(x_{s-1} - x_r) + f(t_s)(x_s - s_{s-1})$$

ఆని సులభముగా చూడవచ్చు. $f(t_r),\ f(t_s)$ విలువలను ఈ క్రింది విధాలుగా తీసుకోవచ్చును.

$$f(t_r) = 0,\ \ x_{r-1} \le t_r < c$$

$$= \alpha,\ c \le t_r \le x_r$$

$$f(t_s) = \alpha,\ \ x_{s-1} \le t_3 \le d$$

$$= 0,\ d < t_s \le x_s$$

అందువలన

$$S(f\ ,\dot{P}) = \begin{cases} \text{(i)} & \alpha(x_s - x_r), & f(t_r) = 0,\ f(t_s) = \alpha \\ \text{(ii)} & \alpha(x_{s-1} - x_r), & f(t_r)\ \ 0,\ f(t_s) = 0 \\ \text{(iii)} & \alpha(x_s - x_{r-1}), & f(t_r) = \alpha = f(t_s) \\ \text{(iv)} & \alpha(x_{s-1} - x_{r-1}), & f(t_r) = \alpha,\ f(t_s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S\left(f\ ,\dot{P}\right)=\begin{cases}(i) & \alpha(d-c)\ +\ \alpha\left(x_s-d-x_r+c\right)\\(ii) & \alpha\left(d-c\right)\ +\ \alpha\left(x_{s-1}-d+c-x_r\right)\\(iii) & \alpha\left(d-c\right)\ +\ \alpha\left(x_s-d+c-x_{r-1}\right)\\(iv) & \alpha\left(d-c\right)\ +\ \alpha\left(x_{s-1}-d+c-x_{r-1}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)-\alpha(d-c)\right|\le|\alpha|\left(\left(x_s-s_{s-1}\right)+\left(x_r-x_{r-1}\right)\le 2\,|\alpha|\,\left\|\dot{P}\right\|\right)$$

$\in>0$ అనుకుంటే, $\left\|\dot{P}\right\|<\in\!/_2\,|\alpha|$ అయినప్పుడల్లా

$$\left|S\left(f\ ,\dot{P}\right)-\alpha\left(d-c\right)\right|<\in$$ అవుతుంది.

ఇది ప్రతి $\in>0$ కి ఇది వర్తిస్తుంది.

$$f\in R\left[a,\ b\right] \text{ మరియు } \int_a^b f\ dx=\alpha\left(d-c\right)$$

19.5.6 లెమ్మా: $a\le c<d\le b,\ J=[c,d]$ అనుకొందాం. అప్పుడు $\phi_J\in R\left[a,b\right]$ మరియు $\int_a^b\phi_J\ dx=d-c$.

ఉపపత్తి: $\left[a,\ b\right]$ అంతరంలో J ఉపాంతరాన్ని $c<d$ కి $\left[c,d\right],\ \left[c,d\right),\left(c,d\right],\ \left(c,d\right)$ రూపాలలో చూడవచ్చు. లెమ్మా 19.5.5లో $J=\left[c,d\right]$ అయితే లెమ్మా నిరూపించబడింది.

$J_0=\left(c,\ d\right]$ అనుకుందాము.

$P=\left\{a=x_0<x_1<\ \cdots<x_n=b\right\}$ విభజనలో $t_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ ఎంపిక బిందువులతో $\dot{P}$ అనే ఎంపిక విభజన ఉంది అనుకుందాము.

$$\Rightarrow\left|S\left(\phi_J,\dot{P}\right)-S\left(\phi_{J_0},\dot{P}\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\phi_J\left(t_i\right)-\phi_{J_0}\left(t_i\right)\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \phi_J(t_i) - \phi_{J_0}(t_i) \right| \left(x_i - x_{i-1} \right)$$

ఏదైనా $x \in [a, b]$కి,

$$\phi_J(x) - \phi_{J_0}(x) = 0, \ x \neq c$$

$$= 1, \ x = c$$

$$\Rightarrow \left| S\left(\phi_J, \dot{P}\right) - S\left(\phi_{J_0}, \dot{P}\right) \right| \leq \left\| \dot{P} \right\|$$

$\phi_J \in R \ [a, \ b]$ కనుక

ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $\delta > 0, \ 0 < \delta < \in\!/_2$ కి, $\left\| \dot{P} \right\| < \delta$ అయ్యేటట్లు $\dot{P}$ అనే ఎంపిక విభజనకి

$\left| S\left(\phi_J, \dot{P}\right) - \int_a^b \phi_J \ dx \right| < \in\!/_2$ అవుతుంది.

పైన నిర్దేశించిన ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ కి

$$\left| S\left(\phi_{J_0}, \dot{P}\right) - \int_a^b \phi_J \ dx \right|$$

$$\leq \left| S\left(\phi_{J_0}, \ \dot{P}\right) - S\left(\phi_J, \dot{P}\right) + S\left(\phi_J, \dot{P}\right) - \int_a^b \phi_J \ dx \right|$$

$$\leq \left| S\left(Q_{J_0}, \dot{P}\right) - S\left(Q_J, \dot{P}\right) \right| + \left| S\left(Q_J, \dot{P}\right) - \int_a^b Q_J \, dx \right|$$

$$< \left\| \dot{P} \right\| + \in\!/_2 < \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

$\Rightarrow Q_{J_0} \in R \ [a, b]$ మరియు $\int_a^b Q_{J_0} \ dx = \int_a^b Q_J \ dx = d - c$

19.5.7 సిద్ధాంతము: $\phi : [a, b] \to \mathsf{R}$ సోపాన ప్రమేయము అయితే $\phi \in R[a, b]$

ఉపపత్తి: ϕ సోపాన ప్రమేయము కనుక, ϕ ని ప్రాథమిక సోపాన ప్రమేయాల ఋజు సంయోగంగా వ్రాయగలము. కనుక, $c_i \le d_i,\ 1 \le i \le m$ కి, c_i, d_i అంత్య బిందువులుగా కల J_i ఉపాంతరాలతో

$\therefore\ \phi = k_1\phi_{J_1} + k_2\phi_{J_2} + \cdots + k_m\phi_{J_m}$ అని వ్రాయవచ్చును.

$\therefore\ \phi_{J_i} \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b \phi_{J_i}\, dx = d_i - c_i$

$\Rightarrow \phi \in R[a, b]$ మరియు $\int_a^b \phi\, dx = \sum_{i=1}^{m} k_i \int_a^b \phi_{J_i}\, dx = \sum_{i=1}^{m} k_i (d_i - c_i)$

19.5.8 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ ప్రమేయము మరియు $[a, b]$కి $\dot{P}$ ఏదైనా ఎంపిక విభజన అనుకుందాము. $[a, b]$ పై ఒక సోపాన ప్రమేయము ϕ, $\int_a^b \phi\, dx = S(f, \dot{P})$ అయ్యేటట్లు వుంటుందని నిరూపించండి.

19.6 ఇతర సమాకలనీయ ప్రమేయాల తరగతులు:

19.6.1 సిద్ధాంతము: $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అయితే $f \in R[a, b]$

ఉపపత్తి: $[a, b]$ సంవృతాంతరంలో అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము కనుక ఇది $[a, b]$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

కాబట్టి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $\delta > 0, |x - y| < \delta$ అయినప్పుడల్లా $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\in}{b-a}$ అయ్యేటట్లు వుంటుంది.

ప్రతి i కి, $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ అయ్యేటట్లు $[a, b]$ అంతరాన్ని n సమాన భాగాలుగా విభజిస్తూ $P = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ విభజనను తీసుకుందాము.

f ప్రమేయము $[x_{i-1}, x_i]$ ఉపాంతరములో అవిచ్ఛిన్నం కనుక పరిబద్ధము మరియు f కి అత్యల్ప, అత్యధిక విలువలు ఉంటాయి.

అనగా $u_i,\ v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ బిందువులు $x_{i-1} \le t \le x_i$ అయ్యే ప్రతి t_i కి $f(u_i) \le f(t) \le f(v_i)$ అగునట్లు వ్యవస్థితం $x_{i-1} \le t \le x_i$ కి అయితే $\alpha_\in(t) = f(v_i)$ మరియు $w_\in(t) = f(v_i)$ అని మరియు $\alpha_\in(b) = f(u_n)$ మరియు $w_\in(b) = f(v_n)$ అని వ్రాయండి. $\alpha_\in,\ w_\in$ అనేవి సోపాన ప్రమేయములు కనుక అవి రీమాన్ సమాకలనీయాలు.

$[a, b]$లో ప్రతి t కి $\alpha_\in(t) \le f(t) \le w_\in(t)$

$$\Rightarrow \int_a^b (w_\in - \alpha_\in)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \left(f(v_i) - f(u_i)\right)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\in}{b-a}(b-a) = \in$$

స్క్వీజ్ సిద్ధాంతం ప్రకారము $f \in R[a,\ b]$

19.6.2 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: సిద్ధాంతము 19.6.1ని పరిబద్ధ ప్రమేయాల సమాకలమీయత సూత్రాలని ఉపయోగించి నిరూపించండి.

19.6.3 సిద్ధాంతము: $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ ఏకదిష్ట ప్రమేయం అయితే $f \in R[a,\ b]$

ఉపపత్తి: $f(a) = f(b)$ అయితే ప్రతి $x \in [a, b]$కి $f(x) = f(a)$

$$\Rightarrow\ f \in R[a,\ b]$$

$f(a) \ne f(b)$ అని f ఏకదిష్ట ఆరోహణ ప్రమేయం అనుకుందాం.

$\in > 0,\ \delta = \dfrac{\in}{f(b) - f(a)}$, $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ ఏదైనా విభజన, $\|\dot{P}\| = \delta$ అనుకుందాము.

$$\left.\begin{array}{c} 1 \le i \le n \\ x_{i-1} \le t \le x_i \end{array}\right\} \text{కి,} \quad \begin{array}{c} \alpha_\in(t) = f(x_{i-1}) \\ w_\in(t) = f(x_i) \end{array} \quad \text{అని}$$

$\alpha_\in(b) = f(b)$ మరియు $w_\in(b) = f(b)$ నిర్వచిస్తే

$\alpha_\in,\ w_\in$లు సోపాన ప్రమేయాలు కనుక అవి రీమాన్ సమాకలనీయాలు మరియు

$$a \le t \le b \text{ కి } \alpha_\in(t) \le f(t) \le w_\in(t)$$

$$\Rightarrow \int_a^b (w_\in - \alpha_\in)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \frac{\in}{f(b) - f(a)} \left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \in$$

$\therefore$ స్ట్బ్జ్ సిద్ధాంతాన్ని అనుసరించి $f \in R[a, b]$

19.6.4 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: పరిబద్ధ సమాకలనీయ ప్రమేయానికి సమాకలనీయతా సూత్రం ఉపయోగించి **19.6.3** సిద్ధాంతమును నిరూపించండి.

19.6.5 సిద్ధాంతము:

$f \in R[a, b]$ అయితే $f^2 \in R[a, b]$

ఉపపత్తి: $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ పరిబద్ధ ప్రమేయము

$\Rightarrow$ ప్రతి $x \in [a, b]$కి, $|f(x)| \le k$ అయ్యేటట్లు $k > 0$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$[a, b]$లోని x, y లకి

$$\left|f^2(x) - f^2(y)\right| = |f(x) - f(y)|\,|f(x) + f(y)|$$

$$\le |f(x) - f(y)| \left\{|f(x)| + |f(y)|\right\}$$

$$\le 2k\,|f(x) - f(y)|$$

$f \in R[a, b]$ కాబట్టి $\in > 0$ కి అనురూపంగా $P_\in = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$

అనే విభజన $M_i =$ క.ఎ.హ. $\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$; $m_i =$ గ.ది.హ. $\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

అనుకుంటే $O(f, P_\in) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\in}{2k}$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$M_i^1 =$ క.ఎ.హ. $\{f^2(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$m_i^1 =$ గ.ది.హ. $\left\{ f^2(x) / x \in [x_{i-1}, x_i] \right\}$ అయితే

$M_i^1 - m_i^1 =$ క.ఎ.హ. $\left\{ \left| f^2(x) - f^2(y) \right| / x, y \in [x_{i-1}, x_i] \right\}$

$\leq 2k$ క.ఎ.హ. $\left\{ \left| f(x) - f(y) / x, y \in [x_{i-1}, x_i] \right| \right\}$

$= 2k (M_i - m_i)$

$$O(f^2, P_\in) = \sum_{i=1}^{n} (M_i^1 - m_i^1)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq 2k \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = 2k\, O(f, P_\in) < \in$$

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి నిజము. కనుక $f^2 \in R[a, b]$

19.6.6 సిద్ధాంతము: $f \in R[a, b],\ g \in R[a, b]$ అయితే $(f\,g) \in R[a, b]$

ఉపపత్తి: $f \in R[a, b],\ g \in R[a, b]$

$\Rightarrow f + g \in R[a, b], f - g \in R[a, b]$

$\Rightarrow (f + g)^2 \in R[a, b],\ (f - g)^2 \in R[a, b]$

$$\Rightarrow \frac{(f+g)^2 + (f-g)^2}{4} \in R[a, b]$$

$\Rightarrow f\,g \in R[a, b]$

19.6.7 సిద్ధాంతము: $f \in R[a, b]$ అయితే $|f| \in R[a, b]$ మరియు $\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$

ఉపపత్తి: $f \in R[a, b]$

$\Rightarrow \in > 0$ కి అనుగుణంగా,

$O(f, P_\in) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \in$ అయ్యేటట్లు

$P_\in = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ అనే విభజన వ్యవస్థితం అవుతుంది.

ఇందులో $M_i =$ క.ఎ.హ. $\{|f(x)| / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$m_i =$ గ.దీ.హ. $\{|f(x)| / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$\Rightarrow M_i - m_i =$ క.ఎ.హ. $\{|f(x) - f(y)| / x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$M_i^1 =$ క.ఎ.హ. $\{|f(x)| / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$m_i^1 =$ గ.దీ.హ. $\{|f(x)| / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$\Rightarrow M_i^1 - m_i^1 =$ క.ఎ.హ. $\{|f(x)| - |f(y)| / x_{i-1} \le x, y \le x_i\}$

$\left||f(x)| - |f(y)|\right| \le |f(x) - f(y)|$ కనుక ప్రతి $1 \le i \le n$ కి $M_i^1 - m_i^1 \le M_i - m_i$ కనుక

$$O(f^1, P_\in) = \sum_{i=1}^{n}(M_i^1 - m_i^1)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \in$$

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి నిజము. కనుక $|f| \in R[a, b]$

ప్రతి $x \in [a, b]$కి

$-|f|(x) \le f(x) \le |f|(x)$ కనుక

$$-\int_a^b |f|\, dx \le \int_a^b f\, dx \le \int_a^b |f|\, dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f\, dx\right| \le \int_a^b |f|\, dx$$

19.6.8 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు:

(a) $f:[a, b] \to R$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము. ప్రతి $x \in [a, b]$కి $f(x) \geq 0$ మరియు $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ అయితే ప్రతి $x \in [a, b]$కి $f(x) = 0$ అని నిరూపించండి.

(b) $f:[a, b] \to R$ ప్రమేయంలో, ప్రతి $a < c \leq b$కి $f \in R[c, b]$ అయినప్పటికీ $f \notin R[a, b]$ అని ఉదాహరణతో వివరించండి.

(c) f పరిబద్ధ ప్రమేయము. ప్రతి $c \in [a, b]$కి, $f|_c : [c, b] \to R$ సమాకలనీయ ప్రమేయం అయితే $f \in R[a, b]$ అని నిరూపించి

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f_c\,dx = \int_a^b f\,dx$$ అని చూపండి.

(d) f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అయితే $\int_a^b f\,dx = (b-a)\,f(c)$ అయ్యేటట్లు $c \in [a, b]$ వ్యవస్థితం అని నిరూపించండి.

(e) $[a, b]$ మీద f, gలు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయములు. ప్రతి $x \in [a, b]$కి $g(x) > 0$ అయితే $\int_a^b f\,g\,dx = f(c)\int_a^b g\,dx$ అయ్యేటట్లు $c \in [a, b]$ వ్యవస్థితం అవుతుందని చూపండి.

(f) $[a, b]$ మీద f, gలు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయములు. $\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$ అయితే $f(c) = g(c)$ అయ్యేటట్లు $c \in [a, b]$ వ్యవస్థితం అని నిరూపించండి.

(g) $f:[a, b] \to R$ ప్రమేయము పరిబద్ధము మరియు $[a, b]$లో కొన్ని పరిమిత బిందువుల వద్ద f విచ్ఛిన్న ప్రమేయము అయితే $f \in R[a, b]$ అని నిరూపించండి.

19.7 సంకలన సిద్ధాంతములు:

19.7.1 సంకలన సిద్ధాంతము: $f:[a, b] \to R$ ప్రమేయము. $c \in (a, b)$, $[a, c]$కి పరిమితమైన f ప్రమేయాన్ని f_1 అని, $[c, b]$ పరిమితమైన f ప్రమేయాన్ని f_2 అని అనుకుందాము.

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f_1 \in R[a, c] \text{ మరియు } f_2 \in R[c, b]$$

ఈ సందర్భములో $\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx$

నిరూపణ: $\Leftarrow f_1 \in R[a, c], \Rightarrow f_2 \in R[c, b]$ అనుకుందాము.

$\int_a^c f_1\ dx = L_1$, $\int_c^b f_2\ dx = L_2$ అనుకుందాము. f_1, f_2లు సమాకలనీయం కనుక పరిబద్ధ ప్రమేయాలు.

$\Rightarrow$ ప్రతి xకి $|f(x)| \le M$ అయ్యేటట్లు $M > 0$ వుంటుంది.

$f_1 \in R[a, c]$, $f_2 \in R[c, b]$ కనుక $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $\dot{P}_1, \dot{P}_2$ అనే ఎంపిక విభజనలు, $\|\dot{P}_1\| < \delta_1$, $\|\dot{P}_2\| < \delta_2$ అయినప్పుడల్లా

$$\left.\begin{array}{l} \left|S(f_1, \dot{P}_1) - L_1\right| < \in/3 \\ \left|S(f_2, \dot{P}_2) - L_2\right| < \in/3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

అయ్యేటట్లు $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ వ్యవస్థితం అవుతాయి.

$\delta_{\in} = \delta =$ కనిష్ట $\{\delta_1, \delta_2, \in/6M\}$ అని $[a, b]$కి $\dot{P}$ అని ఎంపిక విభజన $\|\dot{P}\| < \delta$ అయ్యేటట్లు $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$, $a = x_0 \le t_1 \le x_1 \le t_2 \le \cdots \le x_n = b$గా తీసుకుందాము.

అపుడు, $1 \le k \le n$కి, $x_{k-1} \le c < x_k$ అయ్యేటట్లు ఏదైనా k తీసుకుందాము.

$[a, c]$లో $\dot{P}_1 = \{a = x_0 \le t_1 \le x_1 \le \cdots \le x_{k-2} \le t_{k-1} \le x_{k-1} \le t_k^1 = c\}$

$[c, b]$లో $\dot{P}_2 = \left\{ c = t_k^{11} < x_k \le t_{k+1} \le x_{k+1} \le \cdot \ \cdot \ \cdot \le x_n = b \right\}$

అనే రెండు ఎంపిక విభజనలు $\left\| \dot{P}_1 \right\| < \delta \le \delta^1, \ \left\| \dot{P}_2 \right\| < \delta \le \delta^{11}$ అయ్యేటట్లు తీసుకుంటే

$$S\left(f_1, \dot{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$S\left(f_1, \dot{P}_1\right) = \sum_{i=1}^{k-1} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) + f\left(c\right)\left(c - x_{k-1}\right)$$

$$S\left(f_2, \dot{P}_2\right) = \sum_{i=k+1}^{n} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) + f\left(c\right)\left(x_k - c\right)$$

$$\Rightarrow S\left(f, \dot{P}\right) - S\left(f_1, \dot{P}_1\right) - S\left(f_2, \dot{P}_2\right)$$

$$= f\left(t_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) - f\left(c\right)\left(x_k - c\right) - f\left(c\right)\left(c - x_{k-1}\right)$$

$$= \left(f\left(t_i\right) - f\left(c\right)\right)\left(x_k - x_{k-1}\right)$$

$$\Rightarrow \left| S\left(f, \dot{P}\right) - S\left(f_1, \dot{P}_1\right) - S\left(f_2, \dot{P}_2\right) \right|$$

$$= \left| f\left(t_k\right) - f\left(c\right) \right| \left(x_k - x_{k-1}\right)$$

$$\le \left(\left| f\left(t_k\right) \right| + \left| f\left(c\right) \right| \right) \ \left\| \dot{P} \right\|$$

$$< 2M \cdot \delta < \in\!/3 \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \quad (2)$$

$$\therefore \quad \left| S\left(f, \dot{P}\right) - L_1 - L_2 \right|$$

$$\le \left| S\left(f, \dot{P}\right) - S\left(f_1, \dot{P}_1\right) - S\left(f_2, \dot{P}_2\right) \right| + \left| S\left(f_1, \dot{P}_1\right) - L_1 \right| + \left| S\left(f_2, \dot{P}_2 - L_2\right) \right|$$

$< \in\!/3 + \in\!/3 + \in\!/3 = \in$ $\qquad$ ((1), (2)ల నుండి)

$\therefore \ f \in R\left[a, b\right]$ మరియు

$$\int_a^b f\ dx = L_1 + L_2 = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx$$

$(\Rightarrow)$ విపర్యయము

$f \in R[a,\ b]$ అనుకుందాము. $[a,\ b]$కి ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $\eta_{\in} > 0$, $[a,\ b]$కి $\dot{P}, \dot{Q}$ అనే ఎంపిక విభజనము $\|\dot{P}\| < \eta_{\in}$, $\|\dot{Q}\| < \eta_{\in}$ అయినపుడు $\left|S(f,\ \dot{P}) - S(f,\ \dot{Q})\right| < \in$ అయ్యేటట్లు $\eta_{\in}$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$[a,\ c]$లో $\dot{P}_1, \dot{P}_2$లు రెండు ఎంపిక విభజనలు $\|\dot{P}_i\| < \eta\ (i = 1,\ 2)$ అయ్యేటట్లు $[c,\ b]$లో $\dot{R}$, అనే అనుబంధిత విటభజన $\|\dot{R}_1\| < \eta$ అయ్యేటట్లు ఉన్నాయి అనుకుందాము.

$\dot{P}_1, \dot{R}_1$ విభజనల సంయుక్త (కలిపిన) ఎంపిక విభజన $\dot{P}$ అని, $\dot{P}_2, \dot{R}_1$ విభజనలు సంయుక్త (కలిసిన) ఎంపిక విభజన $\dot{Q}$ అని అనుకుందాము.

$$\Rightarrow \|\dot{P}\| < \eta,\ \|\dot{Q}\| < \eta$$

$$\therefore\ S(f,\ \dot{P}) = S(f_1,\ \dot{P}_1) + S(f_2,\ \dot{R}_1)$$

$$S(f,\ \dot{Q}) = S(f_1,\ \dot{P}_2) + S(f_2,\ \dot{R}_1)$$

$$\Rightarrow \left|S(f_1,\ \dot{P}) - S(f_1,\ \dot{P}_2)\right| = \left|S(f,\ \dot{P}) - S(f,\ \dot{Q})\right| < \in$$

$$\therefore\ f_1 \in R\ [a,\ c]$$

అదే విధంగా $f_2 \in R\ [c,\ b]$

మొదటి భాగంలో నిరూపణ నుండి

$$\int_a^b f\ dx = \int_a^c f_1\ dx + \int_c^b f_2\ dx$$

19.7.2 ఉప సిద్ధాంతము: $f \in R[a,\ b]$ మరియు $[c,\ d] \subseteq [a,\ b]$ అయినప్పుడు f ప్రమేయము $[c,\ d]$కి పరిమితమైతే $[c,\ d]$ మీద రీమాన్ సమాకలనీయం.

ఉపపత్తి: $f \in R\left[a, b\right],\ c \in \left[a, b\right], f/_{[c,\,b]} = f_1$ అనుకుంటే, $f_1 \in R\left[c, b\right]$

$d \in \left[c, b\right]$ కనుక $f/_{[c,\,d]} = f_2$ అయితే $f_2 = R\left[c, b\right]$

($f/_{[c,\,d]}$ అనే సంకేతం $\left[c, d\right]$కి పరిమితమైన f అని తెలియ చెప్తుంది.)

$\therefore$ $\left[c, d\right]$కి పరిమితమైన f రీమాన్ సంకలనీయము.

19.7.3 ఉప సిద్ధాంతము: $f \in R\left[a, b\right],\ a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ అయితే, ప్రతి ఉపాంతరము $\left[c_{i-1}, c_i\right]$కి f పరిమితం చేస్తే, అదే రీమాన్ సమాకలనీయం మరియు

$$\int_a^b f\ dx = \int_{c_0}^{c_1} f\ dx = \int_{c_1}^{c_2} f\ dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f\ dx$$

ఉపపత్తి: ఇది అనుగమన సూత్రాన్ని అనుసరించి నిరూపించగలము.

$n = 1$ అయితే 19.7.2 నుండి ఇది నిజము.

$n - 1$కి ఈ పై ప్రవచనము నిజము అనుకుంటే,

$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} = b$కి $f \in R\left[a, c_1\right]$ మరియు $f \in R\left[c_1, b\right]$ అవుతుంది.

అంతేకాక $\int_a^b f\ dx = \int_a^{c_1} f\ dx + \int_{c_1}^{c_{n-1}} f\ dx$ అవుతుంది.

అనుగమన సూత్రాన్ని అనుసరించి, $c_1,\ c_2, \cdots\cdots\cdots, c_n = b$ బిందువులకు $f \in R\left[c_{i-1}, c_i\right], 1 \le i \le n$

అనియు $\int_{c_1}^b f\ dx = \int_{c_1}^{c_2} f\,dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n = b} f\,dx$ అవుతుంది.

$$\therefore \int_a^b f\ dx = \int_{c_0}^{c_1} f\ dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n = b} f\ dx$$

19.7.4 నిర్వచనము: $f \in R[a,\ b]$ మరియు $a \le \alpha < \beta \le b$ అయితే $\int_{\beta}^{\alpha} f\ dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f\ dx$ మరియు

$\int_{\alpha}^{\alpha} f\ dx = 0$.

19.7.5 సిద్ధాంతము: $f \in R[a,\ b],\ \alpha, \beta, \gamma$ లు $[a, b]$ అంతరంలో ఏవైనా బిందువులైతే

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\ dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f\ dx + \int_{\gamma}^{\beta} f\ dx \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

అనగా పై మూడు సమాకలనాలతో ఏదైనా రెండు సమాకలనాలు నిజమైతే, మూడోది కూడా వర్తిస్తుంది.

ఉపపత్తి: (1) నిజము $\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f\ dx + \int_{\gamma}^{\alpha} f\,dx = 0$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f\ dx + \int_{\gamma}^{\alpha} f\ dx = L(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\therefore\ L(\beta, \alpha, \gamma) = L(\alpha, \gamma, \beta) = L(\gamma, \beta, \alpha) = -L(\alpha, \beta, \gamma)$$

దీని నుండి $f \in R(\alpha,\ \beta), f \in R(\beta, \gamma),\ f \in R(\alpha, \gamma)$ కనుక $\alpha < \beta < \gamma$ అయితే

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = -L(\beta, \alpha, \gamma)$$

$L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ కనుక

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\ dx + \int_{\beta}^{\gamma} f\ dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f\ dx = -\int_{\gamma}^{\alpha} f\ dx$$

మిగిలిన సందర్భాలలో నిరూపణ ఇదే విధంగా చేయాలి.

19.8 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు జవాబులు:

19.4.3:

(a) **సాధన:** $[0, 3]$ అంతరంలో $\dot{P}$ అనే ఎంపిక విభజన $\|\dot{P}\| < \delta$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ ఉందనుకుందాము. $\dot{P}$ ఎంపిక విభజనలో $[0, 1]$ అంతరంలో ఎంపిక బిందువులు కలిగి వుండేటట్లు $\dot{P}_1$ అనే $\dot{P}$ ఉప సమితికి ఎంపిక విభజనగా, $[1, 3]$ అంతరంలో $\dot{P}$ ఎంపిక బిందువుల విభజనలో ఎంపిక బిందువులు కలిగివుంటే $\dot{P}_2$ అనే $\dot{P}$ ఉపసమితికి ఒక ఎంపిక విభజనగా తీసుకుందాము.

$$\Rightarrow S\left(g\ ,\ \dot{P}\right) = S\left(g\ ,\ \dot{P}_1\right) + S\left(g\ ,\ \dot{P}_2\right) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

$\dot{P}_1$ ఎంపిక విభజనలో ఉపాంతరముల సమ్మేళనమును U_1గా అనుకుంటే 18వ పాఠంలోని అభ్యాసంలో 12వ లెక్కబట్టి $\left[0,\ 1 - \|\dot{P}\|\right] \subseteq U_1 \subseteq \left[0, 1 + \|\dot{P}\|\right]$

$\dot{P}_2$ ఎంపిక విభజనలో ఉపాంతరముల సమ్మేళనమును U_2 గా అనుకుంటే

$$\left[1 + \|\dot{P}\|,\ 2 - \|\dot{P}\|\right] \subseteq U_2 \subseteq \left[1 - \|\dot{P}\|,\ 2 + \|\dot{P}\|\right]$$

$$\therefore \quad 2\left(1 - \delta\right) \le S\left(g\ ,\ \dot{P}_1\right) \le 2\left(1 + \delta\right)$$

$$3\left(2 - \delta\right) \le S\left(g\ ,\ \dot{P}_2\right) \le 3\left(2 + \delta\right)$$

ఈ అసమతలను కలిపి (1)ని అన్వయిస్తే,

$$\delta - 5\delta \le S\left(g,\ \dot{P}\right) \le \delta + 5\delta_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

$\dot{Q}$ అనే ఎంపిక విభజన $\|\dot{Q}\| < \delta$ అయ్యేటట్లు తీసుకుంటే

$$8 - 5\delta \le S\left(g,\ \dot{Q}\right) \le 8 + 5\delta_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (3)$$

$\therefore (2), (3)$ నుండి $\left|S\left(g,\ \dot{P}\right) - S\left(g,\ \dot{Q}\right)\right| < 10\delta$

ప్రతి $\in > 0$ కి, $\delta < \in/10$ అయ్యేటట్లు తీసికుంటే $\|\dot{P}\| < \delta,\ \|\dot{Q}\| < \delta$ అయినప్పుడు $\left|S\left(g,\ \dot{P}\right) - S\left(g, \dot{Q}\right)\right| < \in$ అవుతుంది. $\eta_{\in} = \dfrac{\in}{10}$ గా ఎంపిక చేసికొంటాము.

(b) $[0, 1]$ మీద నిర్వచితమైన డిరిష్లే ప్రమేయము $x \in [0, 1]$, x అకరణీయ సంఖ్య అయితే $g(x) = 1$. $x \in [0, 1]$, x కరణీయ సంఖ్య అయితే $g(x) = 0$ ఇంతకు ముందే g రీమాన్ సమాకలనీయం కాదని నిరూపించాము.

కోషీ నియమాన్ని అన్వయించి ఇది నిరూపిస్తాము.

$P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_n = 1\}$ అనేది $[0,\ 1]$ అంతరం విభజనలో

$t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య, $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అనుకుందాము.

$\dot{P}_1 = \left\{ \left([x_{i-1}, x_i],\ t_i \right) \right\}_{i=1}^{n}$; $\dot{P}_2 = \left\{ \left([x_{i-1}, x_i],\ s_i \right) \right\}_{i=1}^{n}$ ని ఎంపిక విభజనలు తీసుకుందాము.

అపుడు $S(g,\ \dot{P}_1) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right) = 1$

$$s(g,\ \dot{P}_2) = \sum_{i=1}^{n} g(s_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$$

$\therefore \left| S(g,\ \dot{P}_1) - S(g,\ \dot{P}_2) \right| = 1$

P అనేది యాదృచ్ఛిక విభజన కనుక $\|\dot{P}_1\| = \|\dot{P}_2\| = \|\dot{P}\|$ కూడా యాదృచ్ఛికం.

ఇప్పుడు $0 < \in < 1$ అయితే కోషీ నియమం వర్తించదు అని స్పష్టం.

$$g \notin R\,[0,\ 1]$$

(c) $(\Rightarrow)$ $f \notin R\,[a, b]$ అనుకుందాము. కోషీ నియమాన్ని పాటించదు.

$\Rightarrow$ ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కి, $\delta = 1/n$ కి అనుగుణంగా $\in_0 > 0$ కి, $\|\dot{P}_n\| < 1/n$, $\|\dot{Q}_n\| < 1/n$ అయినప్పుడు $\left| S(f\ ,\dot{P}_n) - S(f\ ,\dot{Q}_n) \right| \geq \in_0$ అవుతుంది.

$\Leftarrow$ పై నియమం వర్తించేట్లు f ప్రమేయం ఉందనుకుందాము.

ఏదైనా $\delta > 0$ కి అనుగుణంగా $\frac{1}{N} < \delta$ అయ్యేటట్లు $N \in \mathbb{N}$ వ్యవస్థితం అవుతుంది. ఈ $\delta > 0$ కి, $N \in \mathbb{N}$ కి, $\dot{P}_N$, $\dot{Q}_N$ అనే ఎంపిక విభజనలు $\| \dot{P}_N \| < \delta, \ \| \dot{Q}_N \| < \delta$ అయినప్పుడు

$\left| S\left(f , \dot{P}_N\right) - S\left(f , \dot{Q}_N\right) \right| \geq \in_0$

$$\therefore \ f \notin R\left[a, b\right]$$

(d) $n \in \mathbb{N}$ కి $\dot{P}_n = \left\{\left(\left[\frac{j-1}{n}, \ \frac{j}{n}\right], \ t_j\right)\right\}_{j=1}^{n}$, $\dot{Q}_n = \left\{\left(\left[\frac{j-1}{n}, \ \frac{j}{n}\right], \ s_j\right)\right\}_{j=1}^{n}$ అనే ఎంపిక విభజనలు

$t_j = \frac{j}{n}, s_j \in \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, s_j కరణీయ సంఖ్యగా ప్రతి n కి, $\| \dot{P}_n \| = \| \dot{Q}_n \| = \frac{1}{n}$ అనుకుంటే

$S\left(H, \dot{P}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n} + 1\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^n}$ మరియు $S\left(H, \dot{Q}_n\right) = 0 \cdots$ ప్రతి n కి

$\left| S\left(H, \dot{P}_n\right) - S\left(H, \dot{Q}_n\right) \right| > 2.$

$$\therefore \ H \notin R\ [0, 1]$$

(e) **మొదటి పద్ధతి:** H ప్రమేయము అపరిబద్ధము కనుక $H \notin a\,[0, 1]$.

రెండవ పద్ధతి: $P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ \cdots \ < \frac{n}{n} = 1\right\}$ అనేది $[0, 1]$ విభజన అనుకుందాము.

$0 < a < \frac{1}{n}$ అని, a కరణీయ సంఖ్య అనుకుందాము. ప్రతి $1 \leq i \leq n$ కి $t_1 = \frac{1}{n}, \ t_i = a + \frac{i-1}{n}$ అనుకుందాము.

$\Rightarrow t_1$ అకరణీయ సంఖ్య, $t_2, t_3, \cdots, t_n$ లు కరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయి మరియు ప్రతి n కి $\frac{i-1}{n} < t_i \leq \frac{i}{n} \cdot P_n$ విభజనకి ఇవి ఎంపిక బిందువులుగా $\dot{P}_n$ అనుకుంటే,

ప్రతి n కి $S\left(H, \dot{P}_n\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \quad P_n$ P_n విభజనలో

$s_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ బిందువులను, ఎంపిక బిందువులుగా $\dot{Q}_n$ అనే ఎంపిక విభజనలో s_i కరణీయ సంఖ్య కనుక

$$S\left(H, \dot{Q}_n\right) = 0$$

మరియు $n \to \infty$ అయితే $\left\|\dot{P}_n\right\| = \left\|\dot{Q}_n\right\| = \left\|\dot{P}_n\right\| = 1/n \to 0$

కాని ప్రతి n కి $\left|S\left(H, \dot{P}_n\right) - S\left(H, \dot{Q}_n\right)\right| = 1$

$$\therefore\ H \notin R\,[0, 1]$$

19.5.3 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:

సాధన: $f:[a, b] \to \mathsf{R}$ ప్రమేయము $c_1, c_2, \cdots, c_n$ విలువలు కలిగిన సోపాన ప్రమేయం అనుకుందాము.

$E_i = \left\{ x \in [a,b] / f(x) = c_i \right\}, \quad x \in E_i \Leftrightarrow f(x) = c_i$ అయ్యేటట్లు $1 \le i \le n$ ప్రతి i కి, $x \in E_i$, $E_i \subseteq [a, b]$ అయ్యే ఉప సమితిని నిర్వచిద్దాము. అనగా $E_i = f^{-1}\left(\{ c_i \}\right)$.

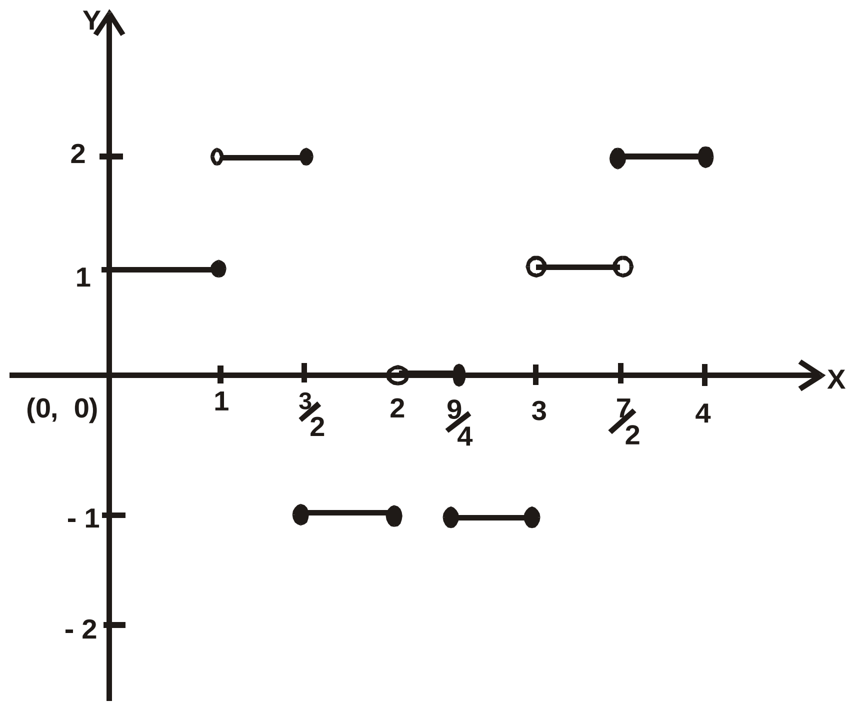
సోపాన ప్రమేయం నిర్వచనం ప్రకారము, ప్రతి E_i పరమిత వియుక్త అంతరాల సమ్మేళనంగా తీసుకోవచ్చు. అనగా $E_i = J_{i_1} \cup J_{i_2} \cup \cdots \cup J_{i_{n_i}}$ అవుతుంది.

$$\therefore\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=}^{n_i} c_i\ \phi_{J_{i_j}}$$

సోదాహరణ వివరణ: $f:[0,\ 4] \to \mathsf{R}$ ని

$$f(x) = 1,\ 0 \le x \le 1, \text{ లేదా } 3 < x < 7/2$$
$$= 2, 1 < x \le 3/2 \text{ లేదా } 7/2 \le x \le 4$$
$$= -1, 3/2 < x \le 2 \text{ లేదా } 9/4 < x \le 3$$

$= 0,\ 2 < x \le 9/4$ లేదా $\frac{9}{4} < x \le 3$ గా నిర్వచిద్దాము. దీని రేఖా చిత్రం క్రింది పటంలో చిత్రించాము.



$$E_1 = \left\{ x/f(x) = 1 \right\} = [0, 1] \cup \left(3, \tfrac{7}{2}\right)$$

$$E_2 \quad \left\{ x/f(x) = 2 \right\} = \left(1, \tfrac{3}{2}\right] \cup \left[\tfrac{7}{2}, 4\right]$$

$$E_3 = \left\{ x/f(x) = -1 \right\} = \left(\tfrac{3}{2}, 2\right] \cup \left(\tfrac{9}{4}, 3\right]$$

$$E_4 = \left\{ x/f(x) = 0 \right\} = \left(2, \tfrac{9}{4}\right]$$

$$f = \phi_{[0,1]} + \phi_{\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)} + 2\left[\phi_{\left(1, \frac{3}{2}\right]} + \phi_{\left[\frac{7}{2}, 4\right]}\right] - \phi_{\left(\frac{3}{2}, x\right]} - \phi_{\left(\frac{9}{4}, 3\right]}$$

19.5.4 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:

సాధన: $[a, b]$ అంతరానికి $P = \left\{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < c \le x_i < \cdots < x_n = b \right\}$ ఏదైనా విభజన మరియు $x_{i-1} \le c \le x_i$ అనుకుందాము.

$1 \le j \le n$ కి, $t_j \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$ ఎంపిక బిందువు అనుకుందాము.

$\Rightarrow f\left(t_j\right) = 0,\ j \notin \{i-1, i\}$

$\Rightarrow c = x_{i-1}$ లేదా $c \ne x_{i-1}$ అవుతుంది.

$c = x_{i-1}$ అయితే,

$(1)\ \ t_{i-1} = c = t_i \quad \left(\Rightarrow f\left(t_{i-1}\right) = f\left(t_i\right) = 1\right)$

$(2)\ \ t_{i-1} = c \ne t_i \quad \left(\Rightarrow f\left(t_{i-1}\right) = 1,\ f\left(t_i\right) = 0\right)$

$(3)\ \ t_{i-1} \ne c = t_i \quad \left(\Rightarrow f\left(t_{i-1}\right) = 0,\ f\left(t_i\right) = 1\right)$

$c \ne x_{i-1}$ అయితే,

$(4)\ \ c = t_i \quad \left(\Rightarrow f\left(t_i\right) = 1\right)$

$(5)\ \ c \ne t_i \quad \left(\Rightarrow f\left(t_i\right) = 0\right)$ అనేవి $t_i,\ t_{i-1}$కు అవకాశమున్న విలువలు అవుతాయి.

$(4), (5)$ సందర్భాలలో $f\left(t_{i-1}\right) = 0$

$$\begin{aligned}
\therefore\ S\left(f, \dot{P}\right) &= f\left(t_{i-1}\right)\left(x_{i-1} - x_{i-2}\right) + f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\
&= x_i - x_{i-2} && \text{(సందర్భము (1))} \\
&= x_{i-1} - x_{i-2} && \text{(సందర్భము (2))} \\
&= x_i - x_{i-1} && \text{((3), (4) సందర్భాలలో)} \\
&= 0 && \text{((5)వ సందర్భము)}
\end{aligned}$$

$\therefore$ అన్ని సందర్భాలలో $\left|S\left(f, \dot{P}\right)\right| = \left|S\left(f, \dot{P}\right) - 0\right| = S\left(f, \dot{P}\right) \le 2\left\|\dot{P}\right\|$

$\left\|\dot{P}\right\| < \in/2$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభజనకి $\left|S\left(f, \dot{P}\right) - 0\right| < \in$

$\Rightarrow f \in R\left[a, b\right]$ మరియు $\int_a^b f\,dx = 0$

గమనిక: పై ఉదాహరణ నుండి సమాకలన ప్రమేయము ఏదైనా బిందువు వద్ద ప్రమేయము విలువను మార్చినా, సమాకలని విలువ మారదు.

19.5.8 ఉపపత్తి: $a = x_0 \le t_1 \le x_1 \le t_2 \le x_2 \le \cdots \le t_n \le x_n \le b$ అయ్యేటట్లు

$\dot{P} = \left\{\left(\left[x_{i-1}, x_i\right], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ అనే ఎంపిక విభజనకి $S\left(f\ , \dot{P}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$ అవుతుంది.

$J_i = \left[x_{i-1}, x_i\right]$ అనుకుంటే $\int_a^b \phi_{J_i}\ dx = \left(x_i - x_{i-1}\right)$

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \phi_{J_i}$$

$\therefore$ ϕ అనే సోపాన ప్రమేయానికి, $\int_a^b \phi\ dx = \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \int_a^b \phi_{J_i}\ dx$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = S\left(f\ , \dot{P}\right)$$

19.6.2 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: **(19.6.1కి రెండవ నిరూపణ)**

సిద్ధాంతము: $\left[a, b\right]$ మీద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అయితే $f \in R\left[a, b\right]$

నిరూపణ: $\left[a, b\right]$ అంతరంలో f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అనగా $\left[a, b\right]$లో f ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నం.

$\therefore$ ప్రతి $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $\delta > 0$, ప్రతి $x, y \in \left[a, b\right]$కి $\left|x - y\right| < \delta$ అయినప్పుడల్లా

$\left|f\left(x\right) - f\left(y\right)\right| < \dfrac{\in}{2\left(b-a\right)}$ అయ్యేటట్లు $\delta > 0$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$n > \dfrac{b-a}{\delta}$ అయ్యేటట్లు $n \in \mathbb{N}$ అని

అపుడు $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} < \delta$ అయ్యేటట్లు

$P_{\in} = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ అనే విభజన వుందనుకుందాము.

$1 \le i \le n$ కి, $M_i =$ క.ఎ.హ. $\{ f(x) / x_{i-1} \le x \le x_i \}$

$$m_i = \text{గ.ది.హ. } \{ f(x) / x_{i-1} \le x \le x_i \}$$

అనేవి $[x_{i-1}, x_i]$ అంతరంలో f కి హద్దులు అనుకుంటే,

$$M_i - m_i = \text{క.ఎ.హ. } \{ |f(x) - f(y)| / x_{i-1} \le x, y \le x_i \}$$

$$\le \frac{\in}{2(b-a)} \text{ అవుతుంది.}$$

$$\therefore \ O(f, P_{\in}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \frac{\in}{2(b-a)}(b-a)$$

$$= \frac{\in}{2} < \in$$

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి వాస్తవము

$$\therefore \ f \in R[a, b]$$

19.6.4 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న: **19.6.3**కి రెండవ నిరూపణ

సిద్ధాంతము: $f : [a, b] \to R$ ఏకదిష్ట ప్రమేయం అయితే, $f \in R[a, b]$.

నిరూపణ: f ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము అనుకుందాము.

$f(a) = f(b)$ అయితే, f స్థిర ప్రమేయము కాబట్టి $f \in R[a, b]$

$f(a) < f(b)$ అనుకుందాము.

$\in > 0$, $n > (b-a)\dfrac{(f(b) - f(a))}{\in}$ అయ్యేటట్లు $n \in \mathbb{N}$ కి,

$x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ అయ్యేటట్లు $P_{\in} = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \}$ అనే విభజన తీసుకుందాము.

f ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమం కనుక $f(x_{i-1}) \le f(x) \le f(x_i)$ అవుతూ

M_i = క.ఎ.హ. $\left\{ f(x) / x_{i-1} \le x \le x_i \right\} = f(x_i)$ మరియు

m_i = గ.ది.హ. $\left\{ f(x) / x_{i-1} \le x \le x_i \right\} = f(x_{i-1})$ ఉంటాయి.

$$\Rightarrow O(f, P_{\in}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ f(x_i) - f(x_{i-1}) \right\}$$

$$= \frac{b-a}{n} \left(f(b) - f(a) \right) < \in$$

ఇది ప్రతి $\in > 0$ కి వాస్తవము.

$$\therefore f \in R[a, b]$$

19.6.8 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న:

(a) **నిరూపణ:** $c \in [a, b]$కి $f(c) > 0$ అనుకుంటే, $\delta > 0$కి,

$[c - \delta, c + \delta]$ అంతరంలో x విలువకు $f(x) > 0$ అవుతుంది.

(c వద్ద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అయితే $\delta > 0$కి $x \in (c - \delta, c + \delta)$ అంతరంలో $f(x)$, $f(c)$లు ఒకే సంజ్ఞ కలిగి వుంటాయి.)

f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం కనుక $x \in [c - \delta, c + \delta]$ అయితే $f(x) \ge f(u)$ అయ్యేటట్లు $u \in [c - \delta, c + \delta]$ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$$o = \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx \ge f(u)\,2\delta > 0$$

ఇది విరుద్ధం. $\therefore\ f(x) = 0,$ ప్రతి $x \in [a, b]$కి f a, bల వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కనుక $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow$ ప్రతి $x \in [a, b]$కి $f(x) = 0$.

(b) $f : [0, 1] \to R$ కింది విధంగా నిర్వచిద్దాం.

$0 < f(x) \le 1$ అయితే $f(x) = \dfrac{1}{x},\ f(0) = 0$.

(c) **సాధన:** $[a, b]$లో f పరిబద్ధము కనుక ఒక స్థిర ధన సంఖ్య M, ప్రతి xకి $|f(x)| < M$ అయ్యేటట్లు వ్యవస్థితము.

$\in > 0$ మరియు $a < c < b$ అనుకొనుము.

$f \in R[c, b]$ కనుక, $R\ [c, b]$లోని ప్రమేయాలు $\alpha_c,\ W_c$

(i) $[c, b]$లోని ప్రతి xకి $\alpha_c(x) \le f(x) \le W_c(x)$ మరియు

(ii) $\displaystyle\int_a^b (W_c - \alpha_c) < \frac{\in}{2}$

అగునట్లు వ్యవస్థితాలు.

$c \le x \le b$ అయినప్పుడు $\alpha(x) = \alpha_c(x)$ మరియు $W(x) = W_c(x)$ అని $a \le x < c$ అయినప్పుడు $\alpha(x) = -M$ మరియు $W(x) = M$ అని నిర్వచింపుము.

$[a, c]$లో $\alpha(x) = -M \le f(x) \le M = W(x)$

$[c, b]$లో $\alpha(x) = \alpha_c(x) \le f(x) \le W_c(x) = W(x)$

కాబట్టి $[a, b]$లో $\alpha(x) \le f(x) \le W(x)$

$[a, c]$లో $\alpha(x),\ W(x)$లు స్థిర ప్రమేయాలు కాబట్టి సమాకలనీయాలు

కాబట్టి $\alpha(x), W(x) \in R\ [a, c]$

$[c,\ b]$లో $\alpha = \alpha_c, W = W_c$ కాబట్టి $\alpha, W \in R\,[c,\ b]$.

అందుచేత $\alpha,\ W \in R\,[a,\ b]$ మరియు

$$\int_a^b (W-\alpha) = \int_a^c (W-\alpha) + \int_c^b (W-\alpha)$$

$$< 2M\,(c-a) + \in/2$$

$$< \frac{\in}{2} + \frac{\in}{2} = \in$$

కావాలంటే c ని $a < c <$ కనిష్ఠం $\left\{ a + \frac{\in}{4M}, b \right\}$ అగునట్లు ఎంచుకోవాలి.

$\lim\limits_{c \to a+} \int_c^b f\ dx = \int_a^b f\ dx$ అని నిరూపించడానికి $a < c < b$ అయితే $\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx$ అనే సిద్ధాంతము ఉపయోగిద్దాము.

దీని నుంచి $\left| \int_a^b f - \int_c^b f \right| = \left| \int_a^c f \right| \le \int_a^c |f| \le M\,(c-a)$

$\in > 0$ అయితే $a < c <$ కనిష్ఠం $\left\{ a + \frac{\in}{M}, b \right\}$గా c ని ఎంచుకొంటే

$$\left| \int_a^b f - \int_c^b f \right| < \in$$

అందుచేత $\int_a^b f = \lim\limits_{c \to a+} \int_c^b f$.

(d) **నిరూపణ:** $f(x_o) =$ గ.ది.హ. $\{ f(x)/a \le x \le b \}$,

$f(x_1) =$ క.ఎ.హ. $\{ f(x)/a \le x \le b \}$

$\Rightarrow$ ప్రతి $x \in [a, b]$కి $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x_0)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x_1)\,dx$$

$$\Rightarrow f(x_0) \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le f(x_1)$$

మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాన్నించి $c \in [a, b],\ f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

(e) **నిరూపణ:** $f(x_0) =$ గ.ది.హ. $\{f(x)/x \in [a, b]\}$

$f(x_1) =$ క.ఎ.హ. $\{f(x)/x \in [a, b]\}$

$\Rightarrow$ ప్రతి $x \in [a, b]$కి $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$

$$\Rightarrow f(x_0)\,g(x) \le f(x)\,g(x) \le f(x_1)g(x), \qquad (\because g(x) > 0)$$

$$\Rightarrow f(x_0)\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f\ g\ dx \le f(x_1)\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow f(x_0) \le \frac{\int_a^b f\ g\ dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le f(x_1) \qquad \left(\because \int_a^b g(x)\,dx > 0\right)$$

$\Rightarrow c \in [a, b],\ \dfrac{\int_a^b f\ g\ dx}{\int_a^b g\ dx} = f(c)$ వ్యవస్థితం.

(f) **నిరూపణ:** ప్రతి $x \in [a, b]$కి $h(x) = f(x) - g(x)$ అనుకుందాము.

$$h(x) \text{ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం } \Rightarrow \int_a^b h\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b h(x)\,dx = 0$$

ఏదైనా x_1కి, $h(x_1) < 0$,ఏదైనా x_2కి $h(x_2) > 0$ అయితే మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతము అనుసరించి (x_1, x_2) లో ఒక c, $h(c) = 0$ అగునట్లు వుంటుంది. $[a, b]$ మీద h అవిచ్ఛిన్నం కాబట్టి $[a, b]$ లోని ప్రతి xకి $h(x) > 0$ అనుకుంటే, ప్రతి xకి, $h(x) \geq h(x_0) > 0$ అయ్యేటట్లు $x_0 \in [a, b]$ ఉంటుంది.

$$\Rightarrow 0 = \int_a^b h(x)\,dx \geq \int_a^b h(x_0)\,dx = h(x_0)(b-a) > 0$$

ఇది అసంభవం. ప్రతి $x \in [a, b]$కి, $h(x) \not> 0$

అదే విధముగా ప్రతి $x \in [a, b]$, $h(x) \not< 0$

$\therefore$ కనుక ఒక xకి, $h(x) > 0$ మరియు ఒక yకి $h(y) < 0$ అందుచేత x, yల మధ్య ఒక zకి $h(z) = 0$, అనగా $f(z) = g(z)$.

(g) **నిరూపణ:** ముందుగా $[a, b]$లో f కి ఒకే ఒక విచ్ఛిన్నతా బిందువు వున్న సందర్భం పరిగణిద్దాము. $a \leq c \leq b$, c వద్ద f విచ్ఛిన్నమనీ ఇతరత్రా అవిచ్ఛిన్నమనీ అనుకొనుము. $[a, b]$ మీద f పరిబద్ధ ప్రమేయం కాబట్టి $[a, b]$లోని ప్రతి xకి $|f(x)| < M$ అగునట్లు ఒక ధన సంఖ్య M వుంటుంది.

$a \leq u < c < v \leq b$ అగునట్లు u, v లను ఎంపిక చేసుకోండి. $a = c$ అయితే $u = a$, $c = b$ అయితే $v = b$ తీసుకుంటాము.

$[a, u]$, $[v, b]$ అంతరాలలో f అవిచ్ఛిన్నం కాబట్టి $\in > 0$ అయితే $[a, u]$ విభజన $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = u\}$, $[v, b]$ విభజన

$P_2 = \{ v = y_0 < y_1 < \cdots y_n = b \}$ విభజన, $O[f, P_1] < \frac{\in}{3}$, $O(f, P_2) < \frac{\in}{3}$ అగునట్లు వుంటాయి.

$P = P_1 \cup P_2 = \{ a = x_0 < \cdots < x_m = v = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b \}$

$[a, b]$కి విభజన. $[u, v]$లో f క.ఎ.హ. M_1, గ.దిహ. m_1 అయితే $[u, v]$లోని ప్రతి xకి $-M \le m_1 \le f(x) \le M_1 \le M$ కాబట్టి $M_1 - m_1 \le 2M$ అందుచేత

$$O(f, P) = O(f, P_1) + (M_1 - m_1)(v - u) + O(f, P_2)$$

$$< \frac{\in}{3} + 2M(v - u) + \frac{\in}{3}$$

ఇప్పుడు u, vల ఎంపిక $v - u < \frac{\in}{6\,M}$ అగునట్లుగా చేస్తే

$$O(f, P) < \frac{\in}{3} + \frac{\in}{3} + \frac{\in}{3} = \in$$

ఇది ప్రతి $\in$కి వర్తిస్తుంది కాబట్టి $f \in R[a, b]$

సార్వత్రిక సందర్భంలో అంటే $[a, b]$లో f విచ్ఛిన్నతా బిందువుల సంఖ్య ఒకటి కన్నా ఎక్కువ అయినప్పుడు $c_1, \cdots, c_n$ లు f విచ్ఛిన్నతా బిందువులనీ $a \le c_1 < c_2 < \cdots < c_n \le b$ అని అనుకోండి. ఈ సందర్భంలో

$$a = u_0 \le c_1 < u_1 < c_2 < u_2 < \cdots < u_{n-1} < c_n \le b \text{ అగునట్లు}$$

$u_1, \cdots, u_{n-1}$ ఎంపిక చేసుకొనవచ్చును. $[u_{i-1}, u_i]$ అంతరంలో f పరిబద్ధమూ, ఒకేఒక విచ్ఛిన్నతా బిందువు c_i వుండుట వలన $f \in R[u_{i-1}, u_i]$ ఇప్పుడు ఈ కింది సిద్ధాంతం ఉపయోగిద్దాము. $a < c_1 < \cdots < c_{n-1} < b$ ప్రమేయం f,

$[a\ c_1], [c_1, c_2], \cdots, [c_{n-1}\ c_n]$ల పై రీమాన్ సమాకలనీయమైతే $f \in R[a, b]$ మరియు

$\int_a^b f\,dx = \int_a^{c_1} f\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f\,dx + \cdots\cdots\cdots + \int_{c_n}^{b} f\,dx$ ప్రతి iకి $f \in R[u_{i-1}, u_i]$ కాబట్టి పై సిద్ధాంతం నుంచి $f \in R[a, b]$.

19.9 సారాంశము:

ఈ పాఠ్యాంశములో రీమాన్ సమాకలనీయ ప్రమేయాలకు కోషీ నియమం, స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము, ఏకదిష్ట ప్రమేయము గురించి చర్చించగలిగాము. సోపాన ప్రమేయమునుపయోగించి స్క్వీజ్ సిద్ధాంతము నుండి అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయాలు, ఏకదిష్ట ప్రమేయాలు సమాకలనీయములు రాబట్టాము. నిరూపణ లేకుండా క.ఎ.హ. మరియు గ.ది.హ. లనుపయోగించి సమాకలనీయం యొక్క వేరొక నిర్వచనాన్ని ఈ పాఠ్యాంశములో పొందుపరిచాము. సోపాన ప్రమేయమును ఉయోగించకుండా, అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము, ఏకదిష్ట ప్రమేయముల సమాకలనీయత నిరూపించబడినది. సమాకలనం యొక్క సంకలన ధర్మాలు చర్చించడమైనది.

19.10 సాంకేతిక పదాలు:

ప్రాథమిక సోపాన ప్రమేయము

సోపాన ప్రమేయము

19.11 అభ్యాసములు:

1. $\alpha(x) = -x,\ w(x) = x,\ f$ డిరిష్లే ప్రమేయము

$f(x) = 0,\ x \in [0, 1],\ x$ అకరణీయ సంఖ్య

$=1,\ x \in [0, 1],\ x$ కరణీయ సంఖ్య అని నిర్వచిస్తే,

(a) ప్రతి $x \in [0, 1]$కి $\alpha(x) \le f(x) \le w(x)$

(b) $\alpha \in R[0, 1],\ w \in R[0, 1]$

(c) $n \in \mathbb{N},\ P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n} \right\},\ t_i = \frac{1}{i}$ మరియు $1 \le i \le n$కి

$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ అంతరంలో s_i ఏదైనా కరణీయ సంఖ్య,

$\dot{P}_n = \{ P_n\ t_1, t_2, \cdots t_n \},\ \dot{Q}_n = \{ P_{n_1}, s_1, \cdots, s_n \}$ ఎంపిక విభజనల

$S(f, \dot{P}_n),\ S(f, \dot{Q}_n)$ రాబట్టండి.

(d) $f \in R[0, 1]$ అవుతుందా?

2. $f \in R[a, b]$, $a < x \le b$ కి $g(x) = f(x)$ అయితే $g \in R[a, b]$ అని, $\int_a^b f\, dx = \int_a^b g\, dx$ అని నిరూపించండి.

3. $f \in R[c, d]$, $[c, d] \subseteq [a, b]$, $a \le x < c$ కి $g(x) = M$, $d < x \le b$ కి $g(x) = M'$, $c \le x \le d$ లోకి $g(x) = f(x)$ అయితే $g \in R[a, b]$.

4. $S(f, \dot{P})$ రీమాన్ మొత్తము $\int_a^b \phi\, dx = S(f, \dot{P})$ అయ్యేటట్లు ϕ సోపాన ప్రమేయము ఉంటుందని చూపండి.

(సూచన - $\dot{P} = \left\{\left([x_{i-1}, x_i], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ ఎంపిక విభజనకి $[x_{i-1}, x_i]$లో $\phi(t) = f(t_i)$ మరియు $\phi(b) = f(b)$ అని నిర్వచించాలి.)

5. $f(x) = 0, \quad 0 \le x < \frac{1}{2}$ లేదా $\frac{1}{2} < x \le 1$

$= 1, \quad x = 1/2$ అయితే

$f \in R[0, 1]$ అని $\int_0^1 f\, dx = 0$ అని నిరూపించండి.

6. $f : [a, b] \to R$ ప్రమేయము. $\dot{P} = \left\{\left([x_{i-1}, x_i], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ ఎంపిక విభజన.

$t \in [x_{i-1}, x_i]$కి, $\phi(t) = f(t_i)$ అయ్యేటట్లు ϕ సోపాన ప్రమేయము అయితే

$\int_a^b \phi(t)\, dt = S(f, \dot{P})$

7. $g(x) = \sin 1/x$, $x \ne 0$, $g(0) = 1$ అయితే $g \in R[0, 1]$ అని నిరూపించండి.

(సూచన - g విచ్ఛిన్నత కనుగొనండి)

8. $f \in R\ [-a, a]$ అనుకుందాము.

(a) f సరి ప్రమేయము, అనగా ప్రతి x కి $f(x) = f(-x)$

$\dot{P}_1 = \{0 \le t_1 \le x_1 \le t_2 \le x_2 \le \cdots \le t_n \le x_n = a\}$

$\dot{P}_2 = \{-a \le -t_n \le -x_{n-1} \le \cdots \le -x_1 \le t_1 \le 0\}$ అనే ఎంపిక విభజనతో

$S(f, \dot{P}_1) = S(f, \dot{P}_2)$ అని నిరూపించండి.

9. $f \in R\ [-a, a]$, f బేసి ప్రమేయము అనగా ప్రతి x కి $f(-x) = -f(x)$ అయితే

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

10. $f \in R\ [c, d]$, $[c, d] \subseteq [a, b]$ మరియు

$g(x) = f(x), \ c \le x \le d$

$= -M, \ a \le x < c$

$= M, \ d < x \le b$ అయితే $g \in R\ [a, b]$ అని నిరూపించండి.

11. $f : [a, b] \to \mathsf{R}, \ \dot{P}_n = \{([x_{i-1}, x_i], t_i = x_{i-1})\}_{i=1}^{n}$

$\dot{Q}_n = \{([x_{i-1}, x_i], s_i = x_i)\}_{i=1}^{n}$ ప్రతి i కి, $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ అయ్యేటట్లు ఎంపిక విభజనలు

$[a, b]$ లో f ఏకదిష్ట ఆరోహణ అనుక్రమము అనుకుంటే,

(a) $f(a)(b-a) \le S(f, \dot{P}_n) \le S(f, \dot{Q}_n) \le f(b)(b-a)$ అని చూపండి.

(b) $0 \le S(f, \dot{Q}_n) - S(f, \dot{P}_n) \le (f(b) - f(a))\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$

సూచన - $\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(b) - f(a)$

12. $[-a, a]$ అంతరంలో f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అయితే $\int_{-a}^{a} f\left(x^2\right) dx = 2\int_{0}^{a} f\left(x^2\right) dx$ అని చూపండి.

సూచన - $g(x) = f\left(x^2\right)$ అయితే, $g(x) = g(-x)$

13. $[-1, 1]$ అంతరంలో f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము

$$\int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_{0}^{\pi} f(\sin x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\, dx$$

సూచన - రీమాన్ మొత్తాలను సరి చూడండి.

14. $f : [a, b] \to \mathsf{R}$ అవిచ్ఛిన్నం, ప్రతి x కి $f(x) \geq 0$

$$M_n = \left(\int_{a}^{b} f^n\, dx\right)^{1/n}$$ ప్రతి $n \in \mathbb{N}$ కి

$M =$ క.ఎ.హ. $\{ f(x)/0 \leq x \leq 1\}$

అయితే $\ell im\ M_n = M$ అని నిరూపించండి.

19.13 సాధనతో మాదిరి ప్రయోగాత్మక ప్రశ్న:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ అకరణీయము} \\ -1 & x \text{ కరణీయము} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$ మరియు $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\right\}$

$t_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $s_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, t_i అకరణీయము మరియు s_i కరణీయము అయినపుడు

$\dot{P}_n = \left\{\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$, $\dot{Q}_n = \left\{\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], s_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ అనుకొనుము.

$S(f, \dot{P}_n) = 1$ మరియు $S(f, \dot{Q}_n) = -1$ అని చూపుము.

$f \notin R[0,1]$ అని చూపుము. $|f| \in R[0, 1]$ అని కూడా చూపుము.

నిర్వచనము:

ఈ క్రింది నియమముతో $A \in R$ వ్యవస్థితమైతే $f : [a, b] \to R$ ను రీమాన్ సమాకలనీయము అంటారు.

ప్రతి $\in > 0$ కు, $[a, b]$లో ప్రతి ఎంపిక విభాజనము $\dot{P}$ కు $\|\dot{P}\| < \eta, \left|S(f, \dot{P}) - A\right| < \in$ అయ్యేటట్లుగా $\eta > 0$ వ్యవస్థితము.

$a = x_0 \le t_1 \le x_1 \le t_2 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le t_n \le x_n = b$ కి

$\dot{P} = \left\{\left(\left[x_{i-1}, x_i\right], t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$,

$\|\dot{P}\| = \max\left\{(x_i - x_{i-1}) / 1 \le i \le n\right\}$

సంఖ్య A ని $[a, b]$ పై f యొక్క రీమాన్ సమాకలని అని అంటారు మరియు $A = \int_a^b f \, dx$ లేదా $A = \int_a^b f$ గా సూచిస్తాము.

$[a, b]$ పై f రీమాన్ సమాకలనీయము అయితే $f \in R[a, b]$ అని వ్రాస్తాము.

ఉపయోగించిన ఫలితము:

$f \in R[a, b]$ కావడానికి ఆవశ్యక, పర్యాప్త నియమము ప్రతి $\in > 0$ కి, $[a, b]$లో ప్రతి ఎంపిక విభాజనములు $\dot{P}$ మరియు $\dot{Q}$ కు $\|\dot{P}\| < \eta$ మరియు $\|\dot{Q}\| < \eta, \left|S(f, \dot{P}) - S(f, \dot{Q})\right| < \in$ అయ్యేటట్లుగా $\eta > 0$ వ్యవస్థితము.

సాధన:

$n \in \mathbb{N}$ కు $\dot{P}_n$ మరియు $\dot{Q}_n$ లు ప్రశ్నలో ఇవ్వబడినవి.

$$S(f, \dot{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 1 \text{ మరియు}$$

$$S(f, \dot{Q}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} -(x_i - x_{i-1}) = -1$$

అందువలన $\left|S\left(f, \dot{P}_n\right) - S\left(f, \dot{Q}_n\right)\right| = \left|1 - (-1)\right| = 2$

$\left\|\dot{P}_n\right\| = \frac{1}{2} = \left\|\dot{Q}_n\right\|$ $\left(\because \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n} \; \forall \; i\right)$

ప్రతి $\delta > 0$ కు $\frac{1}{n} < \delta$ అయ్యేటట్లుగా $n \in \mathbb{N}$ ను తీసుకొనవచ్చును.

కాని $\left|S\left(f, \dot{P}_n\right) - S\left(f, \dot{Q}_n\right)\right| = 2 > \in$

అందువలన $f \notin R\,[0, 1]$

$\left|f(x)\right| = 1 \; \forall \; x \in [0, 1]$

కాబట్టి $|f| \in R\,[0, 1]$

పాఠ్యభాగ రచయిత

C. సంధ్య

పాఠము - 20

కలన గణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము

20.1 లక్ష్యము:

వివిధ తరగతుల ప్రమేయాలకు సంబంధించి, సమాకలనము, అవకలనము, పరస్పర విలోమ పరిక్రియలుగా ఈ పాఠంలో సమన్వయ పరచటం జరిగింది. దీనికి సంబంధించి రెండు ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలను నిరూపిస్తాము. నిశ్చిత సమాకలని గణనం సులభం చేయడానికి అవసరమైన రీతిలో ప్రతిక్షేపణ సిద్ధాంతములను వివరించండి జరిగింది.

20.2 అంశాలక్రమము:

20.3 ఉపోద్ఘాతము:

సమాకలనం చదివే ప్రారంభంలో సమాకలనము, అవకలనాన్కి రెండు విలోమ పరిక్రియగా, సమాకలనాన్ని ప్రత్యవకలనంగా పరిచయం చేయడం అనేది అలవాటు. ఒక ప్రమేయాన్ని సమాకలనం చేయగా వచ్చే ప్రమేయాన్ని పరిణామాన్ని (resultant) అవకలనం చేస్తే, మొదటి సమాకలనం చేయక ముందున్న ప్రమేయాన్ని పొందగలము. ఈ విధమైన పరిక్రియ కొన్ని రకాల ప్రమేయాలకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది. ఈ పాఠంలో కొన్ని ప్రాథమిక సిద్ధాంతాల ద్వారా ఈ పరిక్రియను వివరించడం జరిగింది. మొదటి ప్రాథమిక సిద్ధాంతములో అవకలజాన్ని సమాకలనం చేయడానికి సంబంధించి, రెండవ ప్రాథమిక సిద్ధాంతములో ప్రత్యవకలజాన్ని అవకలనం చేయడం గూర్చి చర్చిస్తాము.

20.4 కలన గణితపు ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (మొదటి రూపము):

20.4.1 నిర్వచనము: $[a, b]$ అంతరంలో F, f లు వాస్తవ ప్రమేయాలు. $a \le x \le b$ అయినప్పుడు $F^1(x) = f(x)$ అయితే F ని f కి ప్రత్యవకలజం లేదా f పూర్వగము అని అంటాము.

ఉదాహరణ: (i) $\cos x$ పూర్వగము $\sin x$

$\sin x$ ప్రత్యవకలజము $-\cos x$

(ii) $\frac{x^2+3}{2}, \frac{x^2+5}{2}$ లు 'x' ప్రత్యవకలజము

20.4.2 ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (మొదటి రూపము): $[a, b]$ అంతరంలో పరిమిత సమితి E అనుకుందాము.

f, ϕ లు $[a, b]$ అంతరంలో వాస్తవ ప్రమేయములు

a) $[a, b]$ అంతరంలో ϕ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము

b) $x \in [a, b] \setminus E$ అయితే $\phi^1(x) = f(x)$

c) $f \in R[a, b]$ అయితే $\int_a^b f \ dx = \phi(b) - \phi(a)$ అవుతుంది.

ఉపపత్తి: $\in > 0$ అనుకుందాము.

$f \in R[a, b]$ కనుక, $\in > 0$ కి అనుగుణంగా $[a, b]$కి $\dot{P}$ అనుబంధిత విభజన, $\|\dot{P}\| < \delta_\in$ అయినపుడు

$\left| S(f, \dot{P}) - \int_a^b f \right| < \in$ అయ్యేలా $\delta_\in > 0$ వ్యవస్థితం అవుతుంది $\cdot \ \cdot \ \cdot$ (1)

$E = \{a, b\}$ సందర్భాన్ని తీసుకుందాము.

$\dot{P} = \left\{\left(\left[x_{j-1}, x_j\right], u_j\right)\right\}_{j=1}^{n}$ అనే అనుబంధిత విభజన $\|\dot{P}\| < \delta_\in$ ప్రతి $u_j, \left[x_{j-1}, x_j\right]$ మీద మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాన్ని తృప్తిపరుస్తుందనీ అనగా $u_0 \cdot \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$ మరియు $\phi(x_j) - \phi(x_{j-1}) = \phi'(u_j)(x_j - x_{j-1})$ అని అనుకుందాము.

$$\Rightarrow \ \phi(b)-\phi(a) = \sum_{j=1}^{n}\left(\phi\left(x_j\right)-\phi\left(x_{j-1}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\phi'\left(u_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f\left(u_j\right)\left(x_j-x_{j-1}\right) = S\left(f\ ,\dot{P}\right)$$

$\therefore$ (1) నుండి $\left|\phi(b)-\phi(a)-\int_a^b f \ dx\right| < \in$

ప్రతి $\in > 0$ కి ఇది జరుగుతుంది కాబట్టి

$$\int_a^b f \ dx = \phi(b)-\phi(a)$$

E లో ఇంతకంటే ఎక్కువ బిందువులు వుండే సందర్భాన్ని స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న 20.7లో పరిగణన చేయబడింది.

20.4.3 ఉదాహరణలు:

(a) $[a, b]$లోని ప్రతి x కి $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ అయితే $F'(x)=x$

$F'(x)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము కనుక $[a, b]$లో రీమాన్ సమాకలనీయం $E=\phi$ ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని అనువర్తించగా $\int_a^b x \ dx = F(b)-F(a)$

$$= \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

(b) $x\,;[a, b]$ లో వుంటే $G(x)=\tan^{-1}x$ అని వ్రాయండి.

(i) ప్రతి x కి $G^1(x)=\frac{1}{1+x^2}$ మరియు

(ii) $[a, b]$ అంతరంలో $G^1(x)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము కనుక రీమాన్ సమాకలనీయం $E=\phi$తో ప్రాథమిక సిద్ధాంతము ప్రకారము,

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = G(b) - G(a)$$

$$= \tan^{-1} b - \tan^{-1} a$$

(c) $[-10, 10]$ అంతరంలో $A(x) = |x|$ అయితే $[-10, 0]$ అంతరంలో $A^1(x) = -1$, $(0, 10]$ అంతరంలో $A^1(x) = 1$ మరియు $x = 0$ వద్ద $A^1(x) = 0$.

ఇది sgn ప్రమేయం - $\quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$

$[-10, 10] \setminus \{0\}$ అంతరంలో $A^1(x) = \operatorname{sgn}(x)$ అవుతుంది.

సిగ్న ప్రమేయం సోపాన ప్రమేయం కనుక ఇది $[-10, 10]$ అంతరంలో రీమాన్ సమాకలనీయము.

$\therefore$ ప్రాథమిక సిద్ధాంతమును అనుసరించి $(E = \{0\})$

$$\int_{-10}^{10} \operatorname{sgn}(x)\, dx = A(10) - A(-10) = 10 - 10 = 0$$

(d) $[0, b]$ అంతరంలో $H(x) = 2\sqrt{x}$ అయితే,

(i) $[0, b]$ అంతరంలో $H(x)$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము

(ii) $x \in (0, b]$ అయితే $H^1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(iii) $(0, b]$ అంతరంలో $H'(x)$ పరిబద్ధం కాదు.

$H'(0)$ ఏ విధంగా నిర్వచించినప్పటికీ, $H'(x) \notin R[0, b]$ కాబట్టి ప్రాథమిక సిద్ధాంతము 20.4.2 అనువర్తించదు.

20.5 ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (రెండవ రూపము):

20.5.1 నిర్వచనము: $f \in R[a, b]$ అయితే $[a, b]$లోని ప్రతి z కి $F(z) = \int_a^z f$ అని నిర్వచించి Fని a ఆధార బిందువుగా f కి అనిశ్చిత సమాకలని అంటాము.

20.5.2 సిద్ధాంతము: $[a, b]$ అంతరంలో, పైన నిర్వచించిన అనిశ్చిత సమాకలని F అవిచ్ఛిన్నము. ప్రతి x కి $|f(x)| \le M$ అయితే $[a, b]$లోని ప్రతి w, zలకి $|F(z) - F(w)| \le M|z - w|$

ఉపపత్తి: సమాకలన సంకలన సిద్ధాంతము ప్రకారము $z, w \in [a, b], w \le z$ లకి

$$F(z) = \int_a^z f = \int_a^w f + \int_w^z f = F(w) + \int_w^z f$$

$$\Rightarrow \int_w^z f = F(z) - F(w) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

$$\lim_{z \to w} (F(z) - F(w)) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to w} F(z) = F(w)$$

$\Rightarrow$ అనిశ్చిత సమాకలని $F, [a, b]$ అంతరంలో అవిచ్ఛిన్నము. ప్రతి $x \in [a, b]$కి, $|f(x)| \le M$

$\Rightarrow$ ప్రతి xకి $-M \le f(x) \le M$

$f \in R[a, b], \; w \le z, \; z, w \in [a, b]$ అయితే $f \in R[w, z]$

$$\Rightarrow -M(z - w) \le \int_w^z f \le M(z - w)$$

$$\Rightarrow \left| \int_w^z f \right| \le M(z - w)$$

(1)వ సమీకరణం నుండి $|F(z) - F(w)| \le M(z - w)$

20.5.3 కలన గణితంలో ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (రెండవ రూపము): $f \in R[a, b]$, $c \in [a, b]$ బిందువు వద్ద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అనుకుంటే, 20.5.1లో నిర్వచించిన అనిశ్చిత సమాకలని 'c' బిందువు వద్ద అవకలనీయము మరియు $F'(c) = f(c)$.

ఉపపత్తి: $c \in [a, b]$ బిందువు వద్ద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము. కాబట్టి $c \in [a, b]$ అంతరంలో f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము.

$\Rightarrow$ ఇచ్చిన $\in > 0$ అనురూపంగా $c \le x < c + \eta_\in$ అయినప్పుడల్లా $f(c) - \in < f(x) < f(c) + \in$ అయ్యేటట్లు $\eta_\in > 0$ వ్యవస్థితం.

$h \in (0, \eta_\in)$, a, c $c+h \in [a, b)$ అయితే సమాకలన సంకలన సిద్ధాంతము ప్రకారము

$f \in R[a, b] \Rightarrow f \in R[a, c], f \in R[c, c+h]$ మరియు $f \in R[a, c+h]$

$$F(c+h) = \int_a^{c+h} f = \int_a^c f + \int_c^{c+h} f = F(c) + \int_c^{c+h} f$$

$$\Rightarrow F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f$$ $c \le x < c + \eta_\in$ అయితే

$f(c) - \in < f(x) < f(c) + \in$ కాబట్టి

$$\int_c^{c+h} (f(c) - \in) \le \int_c^{c+h} f(x) \le \int_c^{c+h} (f(c) + \in)$$

$$\Rightarrow h(f(c) - \in) < \int_c^{c+h} f < h(f(c) + \in)$$

$$\Rightarrow f(c) - \in < \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f < f(c) + \in$$

$$\Rightarrow f(c) - \in < \frac{1}{h}\left[F(c+h) - F(c)\right] < f(c) + \in$$

$$\Rightarrow -\in < \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) < \in$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| < \in$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \left[\frac{F(c+h) - F(c)}{h} \right] = f(c)$$

$$\Rightarrow \quad F'(c) = f(c)$$

$\Rightarrow [a, b]$ అంతరంలో ప్రతి బిందువు c వద్ద అనిశ్చిత సమాకలని కుడి అవకలనీయం. అదే విధంగా $(a, b]$ అంతరంలో ప్రతి బిందువు వద్ద అనిశ్చిత సమాకలని ఎడమ అవకలనీయం $[a, b]$ అంతరంలో ప్రతి బిందువు వద్ద అనిశ్చిత సమాకలనీయ ప్రమేయము అవకలనీయము.

20.5.4 సిద్ధాంతము: $[a, b]$ అంతరం మీద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అయితే 20.5.1 నిర్వచనం లోని అనిశ్చిత సమాకలని F, $[a, b]$ మీద అవకలనీయమని మరియు ప్రతి x కి $F'(x) = f(x)$.

ఉపపత్తి: f ప్రమేయము $[a, b]$ మీద అవిచ్ఛిన్నము కనుక $f \in R[a, b]$. సిద్ధాంతము 20.5.3 ప్రకారము F అవకలనీయమని $F'(x) = f(x)$ అని స్పష్టము.

20.6 రీమాన్ సమాకలనిలో మరికొన్ని సిద్ధాంతములు:

20.6.1 ప్రతిక్షేపణ సిద్ధాంతము: $J = [\alpha, \beta]$ అంతరం, $\phi : J \to R$ అవిచ్ఛిన్న అవకలనీయ ప్రమేయము అనుకుందాము.

$\phi(J)$ సమితిని ఉప సమితిగా కలిగిన $I = [a, b]$ అంతరం మీద f అవిచ్ఛిన్న వాస్తవ ప్రమేయము అయితే

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\, dx$$

నిరూపణ: $[a, b]$ పరిబద్ధ పరివృతాంతరము మీద f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము కనుక $F(w) = \int_a^w f(x)\, dx$ అనే ప్రమేయము $[a, b]$ అంతరంలో అవకలనీయము మరియు ప్రతి w కి $F'(w) = f(w)$, $a \le \alpha \le w \le \beta \le b$ అయితే, $\psi(w) = F(\phi(w))$ అనే ప్రమేయం గొలుసు సూత్రం ప్రకారం

$$\psi'(w) = F'(\phi(w))\, \phi'(w) = (f \circ \phi)(w)\, \phi'(w) = ((f \circ \phi) \cdot \phi')w = (w)$$

ϕ' ప్రమేయ అవిచ్ఛిన్నత నుండి ϕ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము అవుతుంది. f, ϕ అవిచ్ఛిన్నం కనుక $f \circ \phi$ సంయుక్త ప్రమేయము కూడా అవిచ్ఛిన్నం. అదే విధంగా వీటి లబ్ధము $[\alpha, \beta]$ మీద అవిచ్ఛిన్నం $[\alpha, \beta]$ అంతరంలో F అవిచ్ఛిన్నం కాబట్టి ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని బట్టి

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \phi)\, \phi' = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\, \phi'(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi'(x)\, dx$$

$$= \psi(\beta) - \psi(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))$$

$$= F(b) - F(a) \qquad (b = \phi(\beta),\ a = \phi(\alpha) \text{ అనుకుంటే})$$

$$= \int_{a}^{b} F'(x)\, dx$$

$$= \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\, dx$$

ఉదాహరణలు:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$ సమాకలని గణిద్దాము.

$[1, 4]$ అంతరంలో $\phi(t) = \sqrt{t}$ అనుకుంటే, $\phi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$\phi'(t)$, $[1, 4]$ అంతరంలో అవిచ్ఛిన్నము $f(x) = 2\sin x$ అనుకుంటే, ఇచ్చిన సమాకలని $(f \circ \phi)\, f'$ రూపంలో వుంటుంది. కనుక పై సిద్ధాంతము **20.6.1** ప్రకారము

$$\left[\int_{1}^{2} 2\sin x\, dx = -2\cos x\right]_{i}^{2} = 2(\cos 2 - \cos 1)$$

(b) $[-1, 1]$ అంతరంలో $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $f \in R[-1, 1]$

$$x \geq 0 \text{ అయితే } \int_{-1}^{x} f(t)\, dt = \int_{-1}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{x} f(t)\, dt = x - 1$$

$$x < 0 \text{ అయితే } \int_{-1}^{x} f(t)\, dt = \int_{-1}^{x} (-1)\, dx = -x - 1$$

$\therefore$ అనిశ్చిత సమాకలని ఆధార బిందువు -1తో, $F(x) = |x| - 1$ కాని, '0' వద్ద $|x|$ అవకలనీయము కాదు. అందువల్ల $F(x)$, $x = 0$ వద్ద అవకలనీయము కాదు.

$\therefore [-1, 1]$ అంతరం మీద F, f యొక్క పూర్వగము కాదు.

(c) థోమే ప్రమేయము $h(x) = 0, \left(x \in R - Q \cap [0, 1]\right)$

$$= 1/n, \left(x \in Q \cap [0, 1],\ x = \frac{m}{n}\right)$$

అని నిర్వచిస్తే $[0, 1]$లోని ప్రతి xకి

$$H(x) = \int_{0}^{x} h(t)\, dt = 0 \text{ కాబట్టి } [0, 1]\text{లో } H'(x) = 0$$

x అకరణీయ సంఖ్య అయితే $H'(x) \neq h(x)$

$\therefore [0, 1]$ అంతరం మీద $H(x)$, 'h'కి ప్రత్యవకలజం కాదు.

20.6.2 విభాగ సమాకలనం Integration by parts): $f = F'$, $g = G'$ వ్యవస్థితం అయ్యేట్లు F మరియు G అనే అవకలనీయ ప్రమేయాలు, $[a, b]$ మీద సమాకలనీయం అయితే

$$\int_{a}^{b} f\, G\, dx = F(b)\, G(b) - G(a)\, F(a) - \int_{a}^{b} F\, g\, dx$$

ఉపపత్తి: $[a, b]$ అంతరంలో F, G లు అవకలనీయాలు కనుక

ప్రతి xకి $(F\,G)^1(x) = F(x)\, G'(x) + F^1(x)\, G(x)$

$$= F(x)\, g(x) + f(x)\, G(x)$$

F, G అవిచ్ఛిన్నాలు మరియు $f, g \in R[a, b]$ కనుక, $f\, G = F'\, G$ మరియు $F\, g = F\, G'$లు $[a, b]$ మీద సమాకలనీయాలు.

ప్రాథమిక సిద్ధాంతం నుండి

$$F(b)\ G(b) - F(a)\,G(a) = \int_a^b (F\,G)'dx$$

$$= \int_a^b f\ G dx + \int_a^b F\,g\ dx$$

$$\therefore \int_a^b f\ G\ dx = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b F\,g\ dx$$

20.6.3 శేష సహిత టేలర్ సిద్ధాంతం: $[a, b]$ అంతరం మీద $f, f', f'', \cdots, f^{(n+1)}$లు $[a, b]$ మీద వ్యవస్థితమై $f^{(n+1)} \in R\,[a, b]$ అయితే

$$f(b) = f(a) + (b-a)\,f'(a) + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n \quad \text{ఇచ్చట}$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt$$

ఉపపత్తి: $[a, b]$ అంతరం మీద

$$F(t) = \int_{(n+1)}^{(n)} (t),\ G(t) = \frac{(b-t)^n}{n\,!}$$ ప్రమేయాలు అవకలనీయాలు.

$$F'(t) = f(t),\ G'(t) = \frac{-(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$ ప్రమేయాలు $[a, b]$ అంతరంలో సమాకలనీయాలు. **20.6.2**

సిద్ధాంతములోని విభజన సమాకలనీయం ద్వారా

$$R_n = \int_a^b F'G\ dt = F(b)\ G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b F\,G'\ dt$$

కాబట్టి $R_n = f^{(n)}(b)\dfrac{(b-b)^n}{n!} - f^{(n)}(a)\dfrac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}\,dt$

$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)\,(b-t)^{n-1}\,dt$$

ఈ పద్ధతి అవలంభించి కుడి వైపున వున్న సమాకలని గణనం కొనసాగించి చివరికి

$$R_n = \frac{-f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} - \cdots - f(a) + f(b)$$ అని చూపగలము.

అందుచేత $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \dfrac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n$

20.7 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు:

(a) యాదృచ్ఛిక పరిమిత సందర్భంలో మొదటి ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (మొదటి రూపము)తో E పరిమితి అయిన సందర్భానికి వివరించండి.

(b) $x \in [a, b],\ n \in \mathbb{N},\ F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ అయితే

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$ అని ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (మొదటి రూపాన్ని) ఉపయోగించి రాబట్టండి.

(c) $g(x) = x,\ |x| \geq 1$

$= -x,\ |x| < 1$

$G(x) = \dfrac{1}{2}\left|x^2 - 1\right|$ అయితే

G అవకలనీయం, $x = \pm 1$ వద్ద తప్పితే $g(x) = G'(x)$ అవుతుందని నిరూపించండి.

$\int_{-2}^{3} g(x)\,dx = G(3) - G(-2) = 5/2$ అని ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని (మొదటి రూపము) నుండి రాబట్టండి.)

(d) $f:[a,b]\to \mathsf{R},\ c\in \mathsf{R}$ అనుకొనుము.

(i) $[a,b]$ అంతరం మీద f ప్రత్యవకలజం $\phi:[a,b]\to \mathsf{R}$ అయితే, $\phi_c(x)=\phi(x)+c$ కూడా f కి ప్రత్యవకలజమని నిరూపించండి.

(e) విపర్యయంగా $[a,b]$ అంతరం మీద ϕ_1,ϕ_2 లు f ప్రత్యవకలజములు అయితే, ప్రతి $x\in[a,b]$కి, $\phi_1(x)=\phi_2(x)+c$ అయ్యేట్లు $c\in \mathsf{R}$ ఉంటుందని చూపండి.

(f) $f\in R[a,b], c\in[a,b]$ అయితే ప్రతి $z\in[a,b]$కి, $F_c(z)$ ప్రమేయాన్ని $F_c(z)=\int_c^z f(t)\,dt$ అనే అనిశ్చిత సమాకలని c ఆధార బిందువుగా నిర్వచిస్తే $F_a(z)-F_c(z)=F_a(c)$ అవుతుందని నిరూపించండి.

(g) h థోమీ ప్రమేయము అయితే, $\int_0^1 h(x)\,dx=0$ అని రాబట్టడానికి కలన గణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (మొదటి రూపాన్ని) అనువర్తింపచేయగలమా?

(h) $F:[0,\infty)\to \mathsf{R}$ ప్రమేయము $F(x)=(n-1)\,x-\dfrac{(n-1)n}{2},\quad n-1\le x<n,\ n\in\mathbb{N}$ అనుకుందాము. $[0,\infty)$ అంతరంలో F అవిచ్ఛిన్నమని చూండి. F అవకలనీయమయ్యే బిందువులు వద్ద $F'(x)$ని కనుక్కోండి. మొదటి ప్రాథమిక సిద్ధాంతము ఉపయోగించి $\int_a^b [\,x\,]\,dx$ విలువను గణించండి. ఇక్కడ $[x]$, x ని మించని అతి పెద్ద పూర్ణాంకం.

(i) $[a,b]$ అంతరం మీద f వాస్తవ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము.
$v:[c,d]\to[a,b]$ ప్రమేయము అవకలనీయము అనుకుందాము.

$G(x)=\int_a^{v(x)} f(t)\,dt$ అయితే $G'(x)=f(v(x))\,v'(x)$ అని నిరూపించండి.

(j) కోషీ - బున్యాకోవిస్కీ - స్క్వార్జ్ అసమీకరణం $f, \; g \in R[a, b]$ అయితే

$$\left|\int_a^b f \; g \, dx\right|^2 \le \int_a^b f^2 \; dx \cdot \int_a^b g^2 \; dx$$ అని నిరూపించండి.

20.8 స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు జవాబులు:

20.7 (a) **సాధన:** $E = \{a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b\}$ అనే $[a, b]$కి ఉప సమితి అనుకుందాము. $F(x)$ ప్రమేయము E సమతి మీద అవకలనీయము అయినా, కాకపోయినప్పటికీ $F'(x) \ne f(x)$ అనుకుందాము.

$$1 \le i \le m \text{ అయితే } f \in R[c_{i-1}, c_i]; \quad \int_{c_{i-1}}^{c_i} f \; dx = [F(c_i) - F(c_{i-1})]$$

$$\int_a^b f \; dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f \; dx = \sum_{i=1}^{m} [F(c_i) - F(c_{i-1})] = F(b) - F(a)$$

(b) **సాధన:** $F(x)$ ప్రమేయము $[a, b]$ అంతరం మీద అవకలనీయము $x \in [a, b]$ అయితే

$f(x) = F'(x) = x^n$. $\quad (E = \phi) \quad f \in R[a, \; b]$.

$\therefore$ ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (మొదటి రూపము) ప్రకారము

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b x^n \; dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

(c) **సాధన:** $|x| > 1$ అయితే, $G'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{G(x+h) - G(x)}{h} = x = g(x)$

$|x| < 1$ అయితే, $G'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{G(x+h) - G(x)}{h} = -x = g(x)$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(1+h) - G(1)}{h} = \frac{1}{2h}\left\{(1+h)^2 - 1\right\} = 1$$

$$\lim_{h \to o^-} \frac{G(1-h)-G(1)}{h} = \frac{1}{2h}\left\{(1-h)^2 - 1\right\} = -1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{G(1-h)-G(1)}{h} \neq \lim_{h \to 0^-} \frac{G(1-h)-G(1)}{h}$$ కాబట్టి

'1' వద్ద G అవకలనీయం కాదు. ఇదే విధంగా $G(x)$ ప్రమేయము '-1' వద్ద అవకలనీయం కాదు. $g(x)$ ప్రమేయము $[-2, 3]$ అంతరంలో సమాకలనీయం కనుక ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (మొదటి రూపము) ప్రకారము

$$\int_{-2}^{3} g(x)\,dx = G(3) - G(-2) = 5/2$$

సాధన (d): $[a, b]$ మీద ϕ అవకలనీయం కనుక ϕ_c అవకలనీయం, $\phi_c^1(x) = \phi^1(x) = f(x)$ అందుచేత ϕ_c $[a, b]$ మీద f కి ప్రత్యవకలజం.

సాధన (e): ప్రతి x కి $\phi_1^1(x) = \phi_2^1(x) = f(x)$ కనుక $(\phi_1 - \phi_2)^1(x) = \phi_1^1(x) - \phi_2^1(x) = 0$ అందుచేత $\phi_1 - \phi_2$, R మీద స్థిర ప్రమేయం. $\phi_1 - \phi_2 = c$ అయితే ప్రతి x కి $\phi_1(x) = \phi_2(x) + c$.

సాధన (f): నిర్వచనాన్ని బట్టి $[a, b]$లోని ప్రతి z కి

$$F_a(z) = \int_a^z f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_a^z f(t)\,dt$$

$$= \int_a^c f(t)\,dt + F_c(z)$$

$$= F_a(c) + F_c(z)$$

కాబట్టి $F_a(z) - F_c(z) = F_a(c)$

సాధన (g): $h:[0,1]\to R$ థోమీ ప్రమేయము

$h(x)=0,$ (x కరణీయ సంఖ్య, $x\in[0,1]$ అయినప్పుడు)

$= 1/n,$ (x అకరణీయ సంఖ్య, $x\in[0,1],$ x సూక్ష్మ రూపం $x=\dfrac{m}{n}$ అయినప్పుడు)

$h(0)=1$

$x\neq 0$ అయితే ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య వద్ద $h(x)$ అవిచ్ఛిన్నం మరియు ప్రతి కరణీయ సంఖ్య వద్ద $h(x)$ విచ్ఛిన్నం మరియు $[0, 1]$ అంతరంలో ప్రతి బిందువు వద్ద h అవకలనీయం కాదు కాని

$H(x)=\int_0^x h(t)\,dt$ అయితే ప్రతి x కి $H(x)=0$ కనుక $H^1(x)=0$ కాబట్టి

$\int_0^1 H^1(x)\,dx=0$ అని మనకు తెలుసు. ఈ ఫలితాన్ని ప్రాథమిక సిద్ధాంతాన్ని బట్టి పొందలేము. ఎందుకనగా,

$H'(x)\neq h(x) \quad (x\in Q\cap[0, 1]).$

సాధన (h): $n\in\mathbb{N}$ అయినప్పుడు ప్రమేయం $F,$ $(n-1,\ n)$ అంతరం మీద అవకలనీయము మరియు $n-1<x<n$ అయినప్పుడు $f'(x)=n-1,$ n సహజ సంఖ్య అయితే

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(n+h)-F(n)}{h}=n,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(n+h)-f(n)}{h}=n-1$$

కాబట్టి n వద్ద F అవకలనీయం కాదు.

$a<b$ అవుతూ $[a, b]$ అనే ఏ అంతరంలోనైనా F అవకలనీయం కాని బిందువులు పరిమితం. కనుక కలన గణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతమును $f(x)=[x]$ ప్రమేయానికి అన్వయించవచ్చును. దీన్ని బట్టి

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b [x]\,dx=F(b)-F(a)$$

ఉదాహరణకి $\int_1^3 [x]\, dx = F(3) - F(1) = 3$

$$\int_{1/2}^{3/4} [x]\, dx = F\left(3/4\right) - F\left(1/2\right) = 0$$

సాధన (i): $H(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ అనుకుందాము.

f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయము కనుక H అవకలనీయము మరియు ప్రతి x కి $H'(x) = f(x)$,

$G(x) = H(v(x))$, H, v లు అవకలనీయం కనుక గొలుసు సూత్రమును అనుసరించి,

$$G'(x) = H'(v(x))\, v'(x) = f(v(x))\, v'(x)$$

(j) కోషీ - బున్ యాకోవిస్కీ - స్క్వార్జ్ అసమత $f,\ g \in R[a, b]$ అయితే

$$\left|\int_a^b f\ g\ dx\right|^2 \le \int_a^b f^2\ dx \cdot \int_a^b g^2\ dx$$ అని నిరూపించండి.

సాధన: $f,\ g \in R[a, b]$ కాబట్టి

$$\left|\int_a^b f\ g\right|^2 \le \left(\int_a^b |f\ g|\right)^2 \le \int_a^b f^2\ dx \int_a^b g^2\ dx$$

మొదటి అసమత స్పష్టము కనుక రెండవ అసమత నిరూపిస్తే చాలు.

$x \in [a, b]$ అయితే R లోని ప్రతి t కి $(t\ f - g)^2\ (x) \ge 0$

$$\Rightarrow \int_a^b (t\ f - g)^2 (x)\ dx \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b t^2 f^2 + \int_a^b g^2\, dx - 2\int_a^b t\, f\, g\, dx \geq 0$$

$$\Rightarrow t^2 \int_a^b f^2\, dx - 2t\int_a^b fg\, dx + \int_a^b g^2\, dx \geq 0 \qquad (t \in R)$$

$$\int_a^b f^2 = 0 \text{ అయితే } 0 \leq \int_a^b |f\, g| \leq \frac{1}{2g}\int_a^b g^2$$

ఇది ప్రతి $t > 0$ కి వాస్తవము

$t \to \infty$ అయితే $\int_a^b |f\, g| = 0$ అవుతుంది.

$\int_a^b f^2 > 0$ అయితే $t = \dfrac{\int_a^b |f\, g|}{\int_a^b f^2}$; $A = \int_a^b f^2$, $B = \int_a^b |f\, g|$ మరియు $C = \int_a^b g^2$ అనుకుంటే

(1) నుండి $C - \dfrac{B^2}{A} \geq 0$ అనగా $AC - B^2 \geq 0$

కాబట్టి $\left(\int_a^b |f\, g|\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$

20.9 సారాంశము:

ఈ పాఠంలో గల సమాకలన ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలు రెండూ వాటి అనువర్తనాలు, విభాగ సమాకలన సూత్రం టైలర్ శేషం యిత్యాది అంశాలు క్షుణ్ణంగా అర్థం చేసికొన్న విద్యార్థులు సమాకలని పై మంచి అవగాహన కలిగి అనువర్తనాలపరంగా కొన్ని సులభ పద్ధతులు, సమాకలని గురించి మరికొంత లోతుకి పోగల సమర్థత పొందగలరు.

20.10 సాంకేతిక పదాలు:

సమాకలనానికి విభాగ పద్ధతి

టైలర్ శేషం

పూర్వగం, ప్రత్యవకలజం

20.11 అభ్యాసములు:

1. $B(x) = \frac{-1}{2}x^2, \ \ x < 0$

$= \frac{1}{2}x^2, \ \ x \geq 0$

ప్రమేయం అయితే ప్రతి xకి $B'(x) = |x|$ అని చూపి ప్రాథమిక సిద్ధాంతము ఉపయోగించి

$\int_a^b |x|\, dx = B(b) - B(a)$ అని నిరూపించండి.

2. $f \in R[a, b]$ మరియు $F(x) = \int_a^b f(t)\, dt$ ప్రతి $x \in [a, b]$గా నిర్వచిస్తే,

(a) $\int_c^x f(t)\, dt = F(x) - F(c)$ అని నిరూపించండి.

(b) $\int_x^b f(t)\, dt = F(b) - F(x)$ అని నిరూపించండి.

(c) ప్రతి $x \in [a, b], \ \ a \leq \sin x \leq b$ అయితే $\int_x^{\sin x} f(t)\, dt = F(\sin x) - F(x)$ అని నిరూపించండి.

3. $F(x) = \int_0^{x^2} (1 + t^3)^{-1}\, dt$ అయితే $F'(x) = 2x\,(1 + x^6)^{-1}$ అని నిరూపించండి.

4. $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t^2}\ dt$ అయితే $F'(x) = \sqrt{1+x^2} - 2x\sqrt{1+x^4}$ అని ఋజువు చేయండి.

(సూచన - స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్న 20.7. (i) ఉపయోగించండి.)

5. $f(x) = x,\ 0 \le x < 1$ లేదా $2 \le x \le 3$

$= 1,\ 1 \le x < 2$ అయితే

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x \le 1 \\ x - 1/2, & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{x^2+2x-5}{2}, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

అయితే f ప్రమేయము, 1, 2 బిందువుల దగ్గర తప్ప మిగిలిన బిందువు వద్ద అవకలనీయము అని, F ప్రమేయము, 1, 2 వద్ద అవకలనీయము కాదు అని నిరూపించండి.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ c > 0,\ f$ అవిచ్ఛిన్నము అయితే, $g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f(t)\ dt$ ప్రమేయము $\mathbb{R}$ మీద అవకలనీయము అని, $g'(x) = f(x+c) - f(x-c)$ అని నిరూపించండి.

7. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం మరియు ప్రతి x కి $\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt$ అయితే ప్రతి x కి $f(x) = 0$ అని నిరూపించండి.

8. ప్రతిక్షేపణ సిద్ధాంతమును వాడి దిగువ ఇచ్చిన సమాకలనులు కనుక్కోండి.

(a) $\int_0^1 t\left(\sqrt{1+t^2}\right) dt,\ \left(1+t^2 = u\right)$ (జు॥ $\frac{1}{3}\left(2^{3/2} - 1\right)$)

(b) $\int_0^2 t^2\left(1+t^3\right)^{-1/2} dt,\ \left(1+t^3 = u\right)$ (జు॥ $4/3$)

(c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\, dt, \ \left(\sqrt{t} = u - 1\right)$ (జ॥ $\frac{4}{3}\left(3^{3/2} - 2^{3/2}\right)$)

(d) $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt \ \left(\sqrt{t} = u\right)$ (జ॥ $2(\sin 2 - \sin 1)$)

20.12 నమూనా ప్రశ్నలు:

1. కలన గణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (మొదటి రూపము) ప్రవచించి నిరూపించండి.
2. $f \in R[a, b]$ అయితే $F(z) = \int_a^z f(t)\, dt$, f అనిశ్చిత సమాకలని అవిచ్ఛిన్నం అని నిరూపించండి.
3. కలన గణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (రెండవ రూపము) ప్రవచించి నిరూపించండి.
4. విభాగ సమాకలనాన్ని ప్రవచించి, సూత్రాన్ని రాబట్టండి.
5. $F(x) = \int_0^{x^n} \frac{dt}{1+t^3}$ అయితే $F'(x)$ని కనుగొనండి.
6. ప్రతి x కి, $\int_0^x f(t)\, dt = \int_x^1 f(t)\, dt$ మరియు $f : [0, 1] \to R$ అవిచ్ఛిన్నం అయితే ప్రతి x కి, $f(x) = 0$ అని నిరూపించండి.

20.13 మాదిరి ప్రయోగ ప్రశ్న - జవాబు:

సమస్య: $[0, 1]$ మీద $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt$ అని నిర్వచించిన, $F'(x)$ కనుగొనుము.

నిర్వచనాలు:

1. $F : [a, b] \to R$ ప్రమేయం, $a \le x \le b$, $\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}$ వ్యవస్థితమైతే x వద్ద F అవకలనీయమంటాము. $\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}$ ని $F'(x)$తో సూచిస్తాము. x వద్ద F అవకలజం

$F'(x)$ అంటాము. $[a, b]$ లోని ప్రతి x వద్ద F అవకలనీయమైతే $[a, b]$ మీద F అవకలనీయమంటాము.

2. $[a, b]$ అంతరాన్ని వరుస ఉపాంతరాలు $[x_{i-1}, x_i]$గా విభజించే $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots\cdots < x_n = b\}$ సమితిని $[a, b]$ విభాగమంటాము. $[a, b]$లో $t_1, \cdots, t_n$ బిందువులు, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ అయితే $P = \{[x_{i-1}, x_i]/t_i\}_{i=1}^{n}$ ఎంపిక విభాగము అంటాము. $\|\dot{P}\| =$ గరిష్టం $\{x_i - x_{i-1}/1 \le i \le n\}$ $\dot{P}$ విస్తృతి అంటాము.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ప్రమేయం $\dot{P} = \{[x_{i-1}, x_i]/t_i\}_{i=1}^{n}$ ఎంపిక విభాగమైతే $S(f, \dot{P}) = \sum_{j=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, $\dot{P}$ అనురూపంగా f రీమాన్ మొత్తం అంటాము. A ఒక వాస్తవ సంఖ్య.

ప్రతి ధన సంఖ్య $\in$కి అనురూపంగా $\delta(\in) > 0$, $\|\dot{P}\| < \delta(\in)$ అయ్యే ప్రతి ఎంపిక విభాగం $\dot{P}$ కి అనురూపమైన రీమాన్ మొత్తం $|S(f, \dot{P}) - A| < \in$ తృప్తిపరిస్తే $[a, b]$ మీద f రీమాన్ సమాకలనీయమంటాము. A ని $[a, b]$ మీద f రీమాన్ సమాకలని అంటాము. $\int_a^b f\,dx = A$ అని రాస్తాము.

సాధనలో ఉపయోగించే సిద్ధాంతం: $[c, d] \subseteq [a, b]$, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ అవిచ్ఛిన్నం. $v : [c, d] \to [a, b]$ అవకలనీయం అయినప్పుడు $G(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\,dt$ ప్రమేయం $[c, d]$ మీద అవకలనీయం.

$$G'(x) = \left|f(v(x))\right| v'(x)$$

సమస్యకి సాధన:

ఈ సందర్భంలో $[0, 1]$ మీద F, v_1, v_2, $F(t) = \sqrt{1+t^2}$, $v_1(t) = t^2$, $v_2(t) = t^3$గా నిర్వచించండి.

$v_1[0, 1] \subseteq [0, 1]$, $v_2[0, 1] \subseteq [0, 1]$ అని స్పష్టం.

$v_1^1(t) = 2t,\ v_2^1(t) = 3t^2$ పైన చెప్పిన సిద్ధాంతం నుండి

$$G_1(x) = \int_0^{x^2} F(t)\,dt = \int_0^{v_1(x)} F(t)\,dt$$ అవకలనీయం, $G_1^1(x) = F(v_1(x))\,v_1^1(x)$

కాబట్టి $G_1^1(x) = 2\sqrt{1+x^2}\ \ x$ ఇట్లే $G_2(x) = \int_0^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_0^{v_2(x)} F(t)\,dt$

అవకలనీయం $G_2^1\,(x) = 3\sqrt{1+x^2}\cdot x^2$

$$G(x) = \int_{x^3}^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt - \int_0^{x^3} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$= G_1(x) - G_2(x) \cdot G_1\,,\ G_2$ అవకలనీయం.

కాబట్టి G అవకలనీయం,

$$G'(x) = G'(x) - G_2^1(x) = 2x\ \sqrt{1+x^2} - 3x^2\ \sqrt{1+x^2}$$

$$= x\left\{2\sqrt{1+x^2} - 3x\sqrt{1+x^2}\right\}$$

$$\leq\ x\sqrt{1+x^2}\ (2-3x)$$

పాఠ్యభాగ రచయిత

C. సంధ్య

త్రి పరిమాణ జ్యామితి
ప్రశ్నల నిధి

పాఠము - 1

1. $x+2y+2z=19$ మరియు $4x-3y+12z+3=0$ తలముల మధ్య గురుకోణ సమద్వి ఖండన తలమునకు సమీకరణము కనుగొనుము.

2. $3x-2y+6z+2=0$ మరియు $-2x-y+2z+2=0$ తలముల మధ్య లఘు కోణ సమద్విఖండన తలమునకు సమీకరణము కనుగొనుము.

3. $3x-6y+2z+5=0$ మరియు $4x-12y+3z-3=0$ తలముల మధ్య కోణ సమద్వి ఖండన తలములు కనుగొనుము.

4. $x+2y+2z=9$ మరియు $4x-3y+12z+13=0$ తలముల మధ్య కోణ సమద్వి ఖండన తలములు కనుగొనుము.

5. $x-2y+2z+1=0,\quad 2x+3y-6z-1=0$ తలముల మధ్య లఘు కోణమును సమద్వి ఖండన చేయు తలమునకు సమీకరణము కనుగొనుము.

6. $14x-8y+13=0$ తలము $3x+4y-5z+1=0,\quad 5x+12y-13z=0$ తలముల మధ్య గురుకోణమును సమద్వి ఖండన చేయునని చూపుము.

7. $x+2y+2z-3=0,\ 3x+4y+12z+1=0$ తలముల మధ్య కోణములను సమద్వి ఖండన చేయు తలముల సమీకరణములు కనుగొనుము మరియు లఘు కోణమును సమద్వి ఖండన చేయుడానికి తెలియజేయుము.

పాఠము - 2

8. $3x+4y-6z+1=0$ తలము పైకి మూల బిందువు యొక్క లంబ పాదము మరియు లంబ దూరము కనుగొనుము.

9. $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ రేఖ పైకి $(3,-1,11)$ బిందువు యొక్క లంబ పాదము మరియు లంబ దూరమును కనుగొనుము.

10. $2x-3y+2z+3=0$ తలములో $(1,\ -2,\ 3)$ బిందువు యొక్క ప్రతి బింబమును కనుగొనుము.

11. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-6}{2}$ రేఖలో $(-2,\ 1,\ 3)$ బిందువు యొక్క ప్రతి బింబమును కనుగొనుము.

12. $x-2y+3z=4$ తలములో $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{4}$ రేఖ యొక్క ప్రతి బింబమును కనుగొనుము.

13. $x+y+z+2=0$ తలము దృష్ట్యా $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ రేఖ యొక్క ప్రతి బింబమును కనుగొనుము.

14. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-4}$ రేఖ పై $(-2,\ 2,\ -3)$ బిందువు యొక్క లంబ పాదము మరియు లంబరేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

15. $x+2y+3z+4=0=2x+3y+4z+5$ రేఖ పై $(0,\ 0,\ 0)$ బిందువు యొక్క లంబ పాదము మరియు లంబ రేఖ యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

16. $2x+y+z-7=0=4x+z-14$ రేఖ పై $(-2,\ 2,\ -3)$ బిందువు యొక్క లంబ పాదము మరియు లంబ రేఖ యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

17. $3x+2y-2z+17=0$ తలమునకు సమాంతరముగా తీసుకున్న రేఖ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-2}{3}$ పై $P(3,\ 8,\ 2)$ బిందువు నుండి దూరమును కనుగొనుము.

పాఠము - 3

18. $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ మరియు $x+y+2z-3=0=2x+3y+3z-4$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరమును కనుగొనుము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణమును కనుగొనుము.

19. $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0$ రేఖను కలిగి యుండి $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=1,\ y=0$ రేఖకు సమాంతరముగా ఉండే తలమునకు సమీకరణము $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$ అని చూపుము మరియు అత్యల్ప దూరము $2d$ అయితే $\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ అని నిరూపించుము.

20. OX, OY ల గుండా పోయే తలముల మధ్య కోణము . వాటి ఛేదన రేఖలు

$Z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)=x^2y^2\tan^2\alpha$ శంఖువు పై ఉండునని చూపుము.

21. దీర్ఘ ఘనము యొక్క కర్ణములు మరియు వాటిని ఛేదించని అంచుల మధ్య అత్యల్ప దూరములు

$\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}, \dfrac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}}, \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ అని చూపుము.

a, b, c లు అంచుల పొడవులు.

22. $y+z=0,\ z+x=0,\ x+y=0,\ x+y+z=a$ తలములతో ఏర్పడే చతుర్ముఖిలోని వ్యతిరేక అంచుల మధ్య అత్యల్ప దూరము $\dfrac{2a}{\sqrt{b}}$ అని చూపుము.

23. $\dfrac{x+3}{-4}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z}{2}$; $\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-7}{1}$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న సమీకరణమును కనుగొనుము.

24. $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{2}$ మరియు $5x-2y-3z+6=0;\ x-3y+2z-3=0$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరము మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

25. $2x+y-z=0,\ x-y+2z=0$ మరియు $x+2y-3z=4,\ 2x-3y+4z=5$ రేఖల మధ్య అత్యల్ప దూరమును మరియు అత్యల్ప దూరము ఉన్న రేఖా సమీకరణము కనుగొనుము.

పాఠము - 4

26. మూల బిందువు గుండాపోతూ నిరూకాక్షముల పై a, b, c అంతర ఖండాలు చేయు గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

27. $(1,-3,4),\ (1,-5,2),\ (1,-3,0)$ బిందువుల గుండాపోతూ మరియు కేంద్రము $x+y+z=0$ తలము పై గల గోళ సమీకరణమును కనుగొనుము.

28. ఒక తలము స్థిర బిందువు (a, b, c) గుండాపోవును మరియు అక్షములను A, B, C ల వద్ద ఖండించును. OABC గోళ కేంద్రము యొక్క బిదుపథము $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=2$ అని చూపుము.

29. k వ్యాసార్థము గల గోళము మూల బిందువు గుండాపోవును మరియు అక్షములను A, B, C లలో ఛేదించును. త్రిభుజము ABC యొక్క కేంద్రాభాసము $9\left(x^2+y^2+z^2\right)=4k^2$ గోళము పై ఉండునని చూపుము.

30. $(4, -1, 2), (0, -2, 3), (1, 5, -1), (2, 0, 1)$ బిందువుల గుండాపోయే గోళ సమీకరణమును కనుగొనుము.

31. $(1, -4, 3), (1, -5, 2), (1, -3, 0)$ బిందువుల గుండాపోతూ $x+y+z=0$ తలము పై కేంద్రము ఉన్న గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

32. ఒక తలము స్థిర బిందువు (a, b, c) గుండాపోవును. ఈ తలము పై మూల బిందువు యొక్క లంబ పాదము $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$ గోళము పై ఉండునని చూపుము.

33. $x^2+y^2+z^2=9,\ 2x+3y+4z=5$ వృత్తము గుండా మరియు $(1, 2, 3)$ బిందువు గుండాపోయే గోళ సమీకరణము వ్రాయుము.

34. $x^2+y^2+z^2=5,\ x+2y+3z=3$ వృత్తము గుండాపోతూ $4x+3y=15$ తలమును స్పర్శించే గోళము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

35. $x^2+y^2+z^2-y+2z=0,\ x-y+z-2=0$; $x^2+y^2+z^2+x-3y+z-5=0$, $2x-y+4z-1=0$ రెండు వృత్తములు ఒకే గోళము పై ఉండునని చూపుము మరియు దాని సమీకరణమును కనుగొనుము.

36. $x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5=0,\ 5y+6z+1=0$, $x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6=0,\ x+2y-7z=0$ రెండు వృత్తములు ఒకే గోళము పై ఉండునని నిరూపించుము మరియు దాని సమీకరణము కనుగొనుము. గోళమును $x+y+z=a\sqrt{3}$ తలము స్పర్శిస్తే $'a'$ విలువ కనుగొనుము.

37. $x^2+y^2+z^2-4,\ z=0$ వృత్తము గుండాపోతూ మరియు $x+2y+2z=0$ తలముచే 3 వ్యాసార్థము గల వృత్తములోఛేదింపబడే గోళ సమీకరణమును కనుగొనుము.

38. $x^2+y^2+z^2+7y-2z+2=0,\ 2x+3y+4z=8$ వృత్తము గురువృత్తము అయ్యే గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

39. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ తలము అక్షములను A, B, C ల వద్ద ఛేదించును. Δ ABC యొక్క పరివృత్తమును కనుగొనుము మరియు దాని కేంద్రమును కనుగొనుము.

40. $(-8, 5, 2), (-5, 2, 2), (-7, 6, 6), (-4, 3, 6)$ బిందువులు ఏక చక్రీయమని చూపుము.

పాఠము - 5

41. $x^2+y^2+z^2-3x+5y+7=0$ గోళమునకు $(3, 1, -1)$ బిందువు నుండి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవును కనుగొనుము.

42. $x^2+y^2+z^2+2x-10y-23=0$ గోళముతో $\frac{x+3}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-8}{-5}$ రేఖ యొక్క ఖండన బిందువులను కనుగొనుము.

43. $2x-2y+z+12=0$ తలము $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ గోళమును స్పృశించునని చూపుము మరియు స్పర్శ బిందువును కనుగొనుము.

44. $(1, 2, -2)$ బిందువు వద్ద $x^2+y^2+z^2+2x-6y+1=0$ గోళమును స్పర్శిస్తూ మూల బిందువు గుండా పోయే గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

45. $3x+2y-z+2=0$ తలమును $(1, -2, 1)$ వద్ద స్పర్శిస్తూ మూల బిందువు గుండాపోయే గోళ సమీకరణమును కనుగొనుము.

46. $2x+2y-z=0$ తలమునకు సమాంతరముగా $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$ గోళమునకు స్పర్శరేఖలు కనుగొనుము.

47. $(4, 1, 0), (2, -3, 4), (1, 0, 0)$ బిందువుల గుండాపోతూ $2x+2y-z=11$ తలమును స్పర్శించే గోళముల సమీకరణములు కనుగొనుము.

48. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-7=0$ గోళమునకు $6x-3y-23=0=3z+2$ రేఖలో ఛేదించే స్పర్శ తలములను కనుగొనుము.

49. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+6y+3z=14$ ముఖములు గల చతుర్ముఖిలో గోళము ఇమిడి ఉన్నది. ఆ గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

50. రేఖలు $y=mx,\ z=c,\ y=-mx,\ z=-c$ లను స్పర్శించే గోళముల యొక్క కేంద్రములు $mxy+cz\left(1+m^2\right)=0$ తలము పై ఉండునని చూపుము.

పాఠము - 6

51. $x^2+y^2+z^2-2x+3y-4z+6=0,\ 3x-4y+5z-15=0$ వృత్తము గుండాపోతూ $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+11=0$ గోళమును లంబముగా ఛేదించే గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

52. $(1,-2,1)$ వద్ద $3x+2y-z+2=0$ తలమును స్పర్శిస్తూ $x^2+y^2+z^2-4z+6y+4=0$ గోళాన్ని లంబముగా ఛేదించే గోళ సమీకరణమును కనుగొనుము.

53. $x^2+y^2+z^2+4y=0,\ x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+2=0,$ $x^2+y^2+z^2+3x-2y+8z+6=0,\quad x^2+y^2+z^2-x+4y-6z-2=0$ గోళముల మూల కేంద్రమును కనుగొనుము.

54. $x^2+y^2+z^2+3x+y+2z-2=0=x+3y-2z+1$ వృత్తము గుండాపోతూ

$x^2+y^2+z^2+x-3y-2=0$ గోళాన్ని లంబంగా ఛేదించే గోళ సమీకరణమును కనుగొనుము.

55. $x^2+y^2+z^2+x-3z-2=0,\ x^2+y^2+z^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+2=0$ గోళములను లంబముగా ఛేదిస్తూ

$(0,3,0),(-2,-1,4)$ బిందువుల గుండాపోయే గోళ సమీకరణము

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$ అని చూపుము.

56. $x^2+y^2+z^2-20x+30y-40z+29+\lambda(2x-3y+4z)=0$ సహాక్ష గోళ సరణి యొక్క అవధి బిందువులు కనుగొనుము.

57. $x^2+y^2+z^2+3x-3y+6=0,\ x^2+y^2+z^2-6y-6z+6=0$ గోళములచే నిర్ణయించబడిన సహాక్ష గోళ సరణి యొక్క అవధి బిందువులు కనుగొనుము.

58. $3x+4y-15=0$ తలమును స్పర్శిస్తూ, $x^2+y^2+z^2-5+\lambda(2x+y+3z-3)=0$ సహాక్ష గోళ సరణిలోని గోళ సమీకరణము కనుగొనుము.

59. సహాక్ష సరణిలోని అవధి బిందువుల గుండాపోయే ప్రతి గోళము ఆ సరణిలోని ప్రతి గోళమును లంబంగా ఛేదించునని నిరూపించుము.

60. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+6=0,\ x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+6=0$ గోళములచే నిర్ధారింపబడే సహాక్ష గోళ సరణి యొక్క అవధి బిందువులు కనుగొనుము.

61. $(-1, 2, 1),\ (-2, 1, -1)$ అవధి బిందువులు గల సహాక్ష గోళ సరణి సమీకరణమును కనుగొనుము మరియు ఉమ్మడి మూలాక్షము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

62. రెండు గోళములను లంబముగా ఛేదించే గోళము ఆ రెండింటిచే నిర్ధారింపబడే సహాక్ష సరణిలోని ప్రతి గోళమును లంబముగా ఛేదించునని చూపుము.

పాఠము - 7

63. ఈ క్రింది సమీకరణములు శంఖువును సూచిస్తాయని నిరూపించుము మరియు దాని శీర్షము కనుగొనుము.

$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 3yz + 12x - 11y + 6z + 4 = 0$

(జవాబు: శీర్షము $(-1, -2, -3)$)

64. $2y^2 - 8yz - 4zx - 8xy + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$

(జవాబు: శీర్షము $\left(-\frac{7}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$)

65. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 5yz - 6zx - 4xy + 8x - 19y - 2z - 20 = 0$

(జవాబు: శీర్షము $(1, -2, 3)$)

66. $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$ అయితే $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ శంఖువును సూచించునని నిరూపించుము.

67. $18x^2 + 7y^2 + 20z^2 - 12zx + 12yz + 2x - 22y - 6z + 7 = 0$ సూచించే తలము ఒకటికన్నా ఎక్కువ శీర్షములు గల శంఖువును సూచించునని నిరూపించుము.

పాఠము - 8

వ్యుత్క్రమ శంఖువులు

68. $2x^2+3y^2+4z^2+2yz+4zx+6xy=0$ శంఖువు యొక్క స్పర్శ తలములకు మూల బిందువు నుండి గీసిన లంబములు $11x^2+4y^2-3z^2+8yz-6zx-20xy=0$ శంఖువు పై ఉండునని నిరూపించుము.

69. $fyz+gzx+hxy=0$ శంఖువు యొక్క స్పర్శ తలములు

$f^2x^2+g^2y^2+h^2z^2-2ghyz-2hfzx-2fgxy=0$ శంఖువు యొక్క జనక రేఖలకు లంబముగా ఉంటాయని నిరూపించుము.

70. $x^2-y^2+2z^2-3yz+4zx-5xy=0$ శంఖువు యొక్క స్పర్శ తలములు

$17x^2+8y^2+29z^2+28yz-46zx-16xy=0$ శంఖువు యొక్క జనక రేఖలకు లంబముగా ఉంటాయని నిరూపించుము.

71. నిరూపక తలాలను స్పృశించే శంఖువు యొక్క సాధారణ సమీకరణము

$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2bcyz-2cazx-2abxy=0$ అని నిరూపించుము.

72. $ax^2+by^2+cz^2=0$ మరియు $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$ శంఖువులు వ్యుత్క్రమములని నిరూపించుము.

73. $3x^2+4y^2+5z^2+2yz+4zx+6xy=0$ వక్రము యొక్క స్పర్శతలములకు మూల బిందువు నుండి గీసిన లంబము $19x^2+11y^2+3z^2+6yz-10zx-26xy=0$ శంకువు పై ఉండునని నిరూపించుము.

74. $P(2,-3,5)$ శీర్షము అక్షములతో సమాన కోణములు చేయు అక్షము PQ మరియు శీర్షార్థ కోణము 30^0 గల లంబ వృత్తీయ శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము.

75. మూల బిందువు శీర్షము, $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ సరళరేఖ అక్షము, దాని శీర్ష కోణము 60^0 గల లంబ వృత్తీయ శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము.

(జవాబు: $19x^2+13y^2+3z^2-8xy-24yz-12zx=0$)

76. $(1, 2, 2), (2, 1, -2)$ మరియు $(2, -2, 1)$ బిందువుల గుండాపోయే వృత్తాన్ని ఛేదించునట్లు మూల బిందువు నుండి గీయబడిన సరళ రేఖలచే జనితమయ్యే లంబ వృత్తీయ శంఖువు సమీకరణము కనుగొనుము.

77. OX, OY, $x = y = z$ సరళ రేఖల గుండాపోయే శంఖువు యొక్క శీర్షార్థ కోణము α అయితే $\cos\ \alpha = \left(9-4\sqrt{3}\right)^{-1/2}$.

78. $3x = 2y = z$ సరళరేఖను అక్షముగా $33x^2 + 13y^2 - 95z^2 - 144yz - 96zx - 48xy = 0$ సమీకరణము వృత్తీయ శంఖువును సూచిస్తుందని చూపుము. శీర్షార్థ కోణమును కనుగొనుము.

(జవాబు: $\alpha = 60^0$)

79. శీర్షము $(1, -2, -1)$, శీర్షార్థ కోణము 60^0 మరియు అక్షము $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+1}{5}$ గల లంబ వృత్తీయ శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము.

(జవాబు: $7x^2 - 7y^2 - 25z^2 + 48xy + 80yz - 60zx + 22x + 4y + 17z + 78 = 0$)

80. $(1, 2, -3)$ శీర్షము, OY కి సమాంతరముగా అక్షము మరియు శీర్షార్థ కోణము 45^0 గల లంబ వృత్తీయ శంఖువు $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 6 = 0$ అని నిరూపించుము.

81. శీర్షము 0 గల నిరూపకాక్షములతో సమాన కోణములు చేయుచూ, 1, -2, 2లకు అనుపాతములో దిక్ కొసైన్‌లు కలిగి మూల బిందువు నుండి గీసిన సరళరేఖ గుండాపోయే శంఖువు యొక్క సమీకరణము వ్రాయుము.

(జవాబు: $4\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 9\left(yz + zx + xy\right) = 0$)

82. $(1, 1, 2)$ బిందువు గుండాపోతూ, మూల బిందువు వద్ద శీర్షము మరియు అక్షము $\frac{x}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{3}$ గల లంబ వృత్తీయ శంఖువు సమీకరణమును కనుగొనుము.

పాఠము - 9

83. వ్యాసార్థము 5 మరియు $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}$ అక్షము కలిగిన లంబ వృత్తీయ స్థూపము సమీకరణమును కనుగొనుము.

(జవాబు: $45x^2+40y^2+13z^2-12xy-36yz-24zx-1225=0$)

84. వ్యాసార్థము 3, $(1,-1,2)$ బిందువు గుండాపోతూ $2,-1,3$ లకు అనుపాతములో దిక్ కొసైన్‌లు కలిగిన అక్షము గల లంబ వృత్తీయ స్థూపము సమీకరణమును కనుగొనుము.

(జవాబు: $10x^2+13y^2+5z^2+6yz-12zx+4xy+8x+10y-2z-123=0$)

85. వ్యాసార్థము 2, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$ అక్షముగా గల లంబ వృత్తీయ స్థూపము సమీకరణమును కనుగొనుము.

(జవాబు: $5x^2+8y^2+5z^2-4yz-8zx-4xy+22x-16y-14z-10=0$)

86. వ్యాసార్థము 2, $(1,\ 2,3)$ గుండాపోతూ $2,-3,6$ లకు అనుపాతములో దిక్ కొసైన్‌లు కలిగిన అక్షము గల లంబ వృత్తీయ స్థూపము సమీకరణము కనుగొనుము.

(జవాబు: $45x^2+40y^2+13z^2+36yz-24zx+12xy-42x-280y-126z+294=0$)

87. $x-2=z,\ y=0$ అక్షము కలిగి, $(3,0,0)$ బిందువు గుండాపోయే లంబ వృత్తీయ స్థూపము సమీకరణము కనుగొనుము.

(జవాబు: $x^2+2y^2+z^2-2zx-4x+2z+3=0$)

88. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$ అక్షము కలిగి $(0,0,3)$ బిందువు గుండాపోయే లంబ వృత్తీయ స్థూపము సమీకరణము $10x^2+13y^2+5z^2-6yz-12zx-4xy-36x-18y+30z-135=0$ అని నిరూపించుము.

89. $x=2y=-z$ అక్షముగా, వ్యాసార్థము 4 కలిగిన లంబ వృత్తీయ స్థూపము సమీకరణము కనుగొనుము.

(జవాబు: $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+4yz+8zx-144=0$)

రచయితలు

G. నారాయణ, S.V.S. గిరిజ, B. రామిరెడ్డి.

వాస్తవ సంఖ్యా విశ్లేషణ

ప్రశ్నల నిధి

పాఠము - 10A

1. $n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}\ \ 0 \le r \le n$ అయితే $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$.

2. $k \in \mathbb{N}$ కు $2^k \in S$ అయ్యేటట్లుగా S, $\mathbb{N}$ లో ఉప సమితి అనుకొనుము మరియు సహజ సంఖ్య $n \ge 2$ కు $n \in S \Rightarrow n-1 \in S$. $S = \mathbb{N}$ అని చూపుము.

3. $K = \left\{ s + t\sqrt{2} \,\middle|\, \begin{matrix} s \in Q \\ t \in Q \end{matrix} \right\}$ అనుకొనుము.

   (i) $x_1 \in K,\ x_2 \in K \Rightarrow x_1 + x_2 \in K$ మరియు $x_1\ x_2 \in K$.

   (ii) $x \ne 0$ మరియు $x \in K$ అయితే $\frac{1}{x} \in K$ లను K తృప్తిపరుచునని చూపుము.

4. $r^2 = 3$ అయ్యేటట్లుగా అకరణీయ సంఖ్య ఉండదని చూపుము.

5. (i) $|x| + |x+1| < 3$

   (ii) $|x| + |y| = 2$

   (iii) $|x| - |y| \ge 2$ లను తృప్తిపరిచే అన్ని $x \in R$ లను కనుగొనుము.

6. క.ఏ.హ. $\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \,\middle|\, \begin{matrix} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$ కనుగొనుము.

7. $S = \left\{ s \in \mathbb{R} \mid s \ge 0 \quad \text{and} \quad s^2 < 3 \right\}$ అయితే ఈ క్రింది వాటిని నిరూపించుము.

   (i) S శూన్యేతరము

   (ii) S, 3 చే ఎగువ పరిబద్ధము

   (iii) $s \in S$ అయితే $s < s^1$ అయ్యేటట్లుగా $s^1 \in S$ వ్యవస్థితము.

   (iv) $s^2 > 3$ మరియు $s > 0$ అయితే $s^{1^2} > 3$ మరియు $s > s^1$ అయ్యేటట్లుగా $s^1 > 0$ వ్యవస్థితమని చూపుము.

8. $0 < x < 1$ మరియు $n \in \mathbb{N}$ అయితే $\left(1-x^2\right)^n \geq 1-nx^2$ అని చూపుము.

9. $\forall\ n \in \mathbb{N}$కు $a_n \in \{0, 2\}$ అయినపుడు $\{a_n\}$ అనుక్రమాల సమితి గణన సాధ్యమని చూపుము.

10. $S = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \text{ and } m \in \mathbb{N}\right\}$ అయితే $\inf S$ మరియు $\sup S$లను కనుగొనుము.

11. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{if} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{if} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

మరియు $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{if} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ అనుకొనుము.

(a) $\text{Sup}\left\{(f+g)(x) \mid 0 \leq x \leq 2\right\}$ మరియు (b) $\inf\left\{(f+g)(x) \mid 0 \leq x \leq 2\right\}$ కనుగొనుము.

(a) తో $\text{Sup}\left\{f(x) \mid 0 \leq x \leq 2\right\} + \text{Sup}\left\{g(x) \mid 0 \leq x \leq 2\right\}$ మరియు

(b) తో $\inf\left\{f(x) \mid 0 \leq x \leq 2\right\} + \inf\left\{g(x) \mid 0 \leq x \leq 2\right\}$ పోల్చుము.

12. $\text{lub}(A-B) = \text{lub } A - g\ell b$ అని చూపుము.

13. ఈ క్రింది అంతరాల అనుక్రమాలలో ఏవి కుదింపబడినవి.

(a) $n \in \mathbb{N}$కు $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, $I_n = \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$.

(b) $n \in \mathbb{N}$కు $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, $J_n = \left[1-\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right]$.

(c) $n \in \mathbb{N}$కు $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, $K_n = [2n, \infty)$.

14. ప్రతి ధన పూర్ణాంకము nకు $5^{2n+2} - 24n - 25$ అనునది 576 యొక్క గుణిజమని చూపుము.

($f(n+1) - f(n)$, $f(n) = 5^{2n+2} - 24n - 25$ తీసుకొనుము).

15. P ప్రధాన సంఖ్య అయితే ప్రతి ధన పూర్ణాంకము nకు $n^P - n$ అనునది P యొక్క గుణిజమని చూపుము. ($f(n) = n^P - n$గా $f(n+1) - f(n)$ తీసుకొనుము).

పాఠము - 11 మరియు 12

16. $a_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$ అనుకొనుము

(a) $\underset{n}{\text{Limit}}\ a_n$ ను కనుగొనుము.

(b) $n \geq \mathbb{N}$ కు $\dfrac{2n-1}{n+2} > 0 \cdot 01$ అయ్యేటట్లుగా ప్రతి చిన్న $N \in \mathbb{N}$ ను కనుగొనుము.

17. $n \in \mathbb{N}$ కు $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$, $b_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $c_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ అనుకొనుము.

(a) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ కు $b_n \leq a_n \leq c_n$ సత్యమా?

(b) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ కు $b_n \leq a_{2n-1} \leq c_n$ సత్యమా?

(c) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ కు $b_n \leq a_{2n-1} \leq c_n$ సత్యమా ? వివరించుము.

18. (17)లో వలె (a_n), (b_n), (c_n) లను నిర్వచించిరనుకొనుము. $\ell\text{im}\,(a_n)$, $\ell\text{im}\,(b_n)$ మరియు $\ell\text{im}\,(c_n)$ కనుగొనుము. స్క్వీజ్ సిద్ధాంతమును అనువర్తింపచేయవచ్చునా? వివరింపుము.

19. $A : \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots\cdots\cdots\right)$ అనుక్రమాన్ని తీసుకొనుము. A యొక్క 15వ పదమును కనుగొనుము.

A కు ఏకదిష్ట ఆరోహణ ఉపానుక్రమము మరియు ఏకదిష్ట అవరోహణ ఉపానుక్రమము ఉన్నవని చూపుము.

R లో $\ell\text{im}\ (A)$ వ్యవస్థితమవుతుందా? $\forall\ n$ కు $a_{2n} - a_{2n-1} > \dfrac{1}{3}$ చూపుము.

20. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ కు $a_n = \dfrac{1}{n}$ మరియు $b_n = \dfrac{2n-1}{2n}$ అనుకొనుము.

$n \geq 2$ కు $0 < a_{n+1} < a_n < b_n < b_{n+2} < 1$ అని చూపుము.

$\ell\text{im}\ a_n$ మరియు $\ell\text{im}\ b_n$ కనుగొనుము.

21. (a) $\underset{n}{\ell\text{im}}\ \dfrac{n}{3^n}$ (b) $\underset{n}{\ell\text{im}}\ n^{\frac{1}{n^2}}$ కనుగొనుము.

22. $n \in \mathbb{N}$ మరియు $n \geq 2$ కు $\frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2-1} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$ అని చూపుము.

$\lim\limits_{n} \frac{1}{(n+1)^2-1} = 0$ అని చూపుము.

23. $\frac{n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n} > \frac{4}{5}$ అయ్యేటట్లుగా అల్పతమ $n \in \mathbb{N}$ కనుగొనుము.

24. $\frac{2n-1}{n+2} > 1$ అయ్యేట్లుగా అల్పతమ $n \in \mathbb{N}$ కనుగొనుము.

25. $\lim\limits_{n} (n!)^{\frac{1}{n}}$ కనుగొనుము.

26. $\lim\limits_{n} \frac{\left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}}{n}$ కనుగొనుము.

27. $\frac{1}{2} < 1 + \frac{(-1)^n}{n} < \frac{5}{2}$ అయ్యేట్లుగా అల్పతమ n కనుగొనుము.

28. $n \in \mathbb{N}$ కు $x_n = \frac{1}{1+5n}$ అనుకొనుము. $n \in \mathbb{N}$. $C > 0$ కు $|x_n| \leq C\frac{1}{n}$ అయ్యేటట్లుగా అల్పతమ $n \in \mathbb{N}$ కనుగొనుము. $\lim\limits_{n} x_n = 0$ అవుతుందా? సమాధానమును సమర్థించుము.

29. $\lim\limits_{n} (2n)^{\frac{1}{n}} = 1$ అని చూపుము.

30. x_n మరియు y_n లు R లో అభిసరణము చెందకుండా $(x_n + y_n)$, R లో అభిసరణము చెందేటట్లుగా ఉదాహరణనిమ్ము.

31. $\lim x_n = x$ అయితే $\lim (x_n^2) = x^2$ అని చూపుము.

32. $\ell\text{im}_n \left(\frac{n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$ అని చూపుము. $\frac{n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n} > \frac{4}{5}$ అయ్యేటట్లుగా అల్పతమ $n \in \mathbb{N}$ కనుగొనుము.

33. $n \in \mathbb{N}$కు $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ అనుకొనుము.

(a) $\forall\ n$కు $0 < x_n < 1$ అని చూపుము.

(b) (x_n) అవరోహణము చెందునని చూపుము.

(c) $\ell\text{im}\ x_n$ కనుగొనుము.

34. $n \in \mathbb{N}$కు $x_n = (-1)^n$ అనుకొనుము.

(a) (x_n) ఏకదిష్టము కాదని చూపుము.

(b) అన్ని nలకు $|x_{n+1} - x_n| = 2$ అని చూపుము.

(c) $\mathbb{R}$లో $\ell\text{im}\ (x_n)$ వ్యవస్థితము కాదని చూపుము.

35. $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$గా నిర్వచింపబడిన అనుక్రమము (x_n) అనుకొనుము.

(a) (x_{2n}) ఏకదిష్ట ఆరోహణమని చూపుము.

(b) (x_{2n-1}) ఏకదిష్ట ఆవరోహణమని చూపుము.

(c) $\ell\text{im}\ x_{2n} = \ell\text{im}\ x_{2n-1}$ చూపుము.

(d) $\ell\text{im}\ x_n$ కనుగొనుము.

36. ఈ క్రింది అనుక్రమము అభిసరణీయము చెందదని చెప్పుటకు కనీసం రెండు కారణములు తెలుపుము.

$$\left\{\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

37. $A : \left\{0, 1, \frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, \cdots\cdots\right\}$ అనుక్రమము తీసుకొనుము.

(a) సాధారణ పదము a_n వ్రాయుము.

(b) A పరిబద్ధమని చూపుము.

(c) $\frac{1}{2}$ కు అభిసరించు ఉపానుక్రమము కనుగొనుము.

(d) అన్ని n లకు $|a_{n+1} - a_n| > \frac{1}{4}$ అని చూపుము.

(e) $\mathbb{R}$ లో $\ell im\ a_n$ వ్యవస్థితము కాదని చూపుము.

38. $n \in \mathbb{N}$ కు $y_1 = 1,\ y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 1)$ అనుకొనుము.

(a) అన్ని n లకు (y_n) ఏకదిష్ట అవరోహణము చెందునని మరియు $0 < y_n < 1$ అని చూపుము.

(b) $y = \ell im\ y_n$ వ్యవస్థితమని మరియు $y = \frac{1}{2}$ అని చూపుము.

39. $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ అనుకొనుము. అప్పుడు

(a) అన్ని n లకు $0 < x_n \le 2$ అని చూపుము.

(b) $x = \ell im\ x_n$ అయితే $x^2 - 2x - 1 = 0$ అని చూపుము.

40. $x_n = 1$ మరియు $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ అనుకొనుము.

(a) (x_n) ఏకదిష్ట ఆరోహణమని మరియు పరిబద్ధమని చూపుము.

(b) $\ell = \ell im\ x_n$ అయితే $\ell = 2$ అని చూపుము.

41. $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n^2}$ అనుకొనుము.

(a) $k \ge 2$ అయితే $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ అని చూపుము.

(b) అన్ని n లకు (a) నుండి $0 < x_n < 1-\frac{1}{n}$ కనుగొనుము.

(c) (x_n) ఏకదిష్ట ఆరోహణమని చూపించి (x_n) అభిసరిస్తుందని చూపుము.

42. $A = \{1, -1, 1, -1, 1, \cdots\cdots\}$ అనుకొనుము మరియు A యొక్క n వ పదము a_n అనుకొనుము.

A యొక్క ఉపానుక్రమము A_n అనుకొనుము $A_n = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\cdots\cdots\}$

అన్ని n లకు $A_n = 1$ మరియు $A_n = -1$ అని చూపుము.

43. (a) $\ell im\ x_n = 0$ అయితే $\ell im\ (-1)^n\ x_n = 0$ అని చూపుము.

(b) అన్ని n లకు $\ell im\ (-1)^n x_n = 0$ మరియు $x_n \geq 0$ అయితే $\ell im\ x_n = 0$ అని చూపుము.

44. $n > 2$ కు $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ మరియు $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n)$ అనుకొనుము.

(a) $x_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^{2n-1}}$

(b) $n \in \mathbb{N}$ అయితే $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}$ అని చూపుము.

45. $x_{n+1} = \frac{1}{7}\left(x_n^3 + 2\right)$ గా నిర్వచింపబడిన అనుక్రమము (x_n) సంకోచించునని పరిబద్ధమని చూపుము.

(a) $\ell = \ell im\ x_n$ అయితే $\ell^3 - 7\ell + 2 = 0$ అని చూపుము.

(b) $a_n > 0,\ \ell im\ a_n = 0$ అనుకొనుము $|x_{n+1} - a_n| < r\ a_n$, $\ell im\ a_n = 0$ అయితే (x_n) సంకోచితమని చూపుము.

46. ఈ క్రింది అనుక్రమాల యొక్క అభిసరణ లేక అపసరణను కనుగొనుము.

(a) $\left\{\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}\right\}$ (b) $\left\{\sin\sqrt{n}\right\}$

47. $\ell im_{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$ కాని $\left(\sqrt{n} + 1\right)$ అభిసరించదని చూపుము.

48. $C > 1$ అయితే $\ell im_{n} \cdot C^n = +\infty$ అని చూపుము.

49. $x_1 > 0$ మరియు $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ అనుకొనుము. (x_n) సంకోచిత మరియు పరిబద్ధమని చూపుము.

50. $(x_n), (y_n)$ మరియు (z_n) అనుక్రమాల అభిసరణీయతను పరీక్షింపుము.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n+n}$$

$$z_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

51. $c > 0$ మరియు b, c లు స్థిర సంఖ్యలుగా x_n, y_n లు $\left(\frac{x}{n}\right)^2 + bx - c = 0$ ద్వి ఘాత సమీకరణమునకు మూలాలు అయితే $\ell im\,(x_n)$ మరియు $\ell im\,(y_n)$ కనుగొనుము.

52. (a) $\ell im_{n} \dfrac{1-2+3-4+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$ కనుగొనుము.

(b) $\ell im_{n} \dfrac{(n+1)^{10}+(n+2)^{10}+\cdots\cdots\cdots+(n+100)^{10}}{n^{10}+10^{10}}$ కనుగొనుము.

పాఠము - 13

53. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ అభిసరించి మరియు $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots\cdots\cdots (n \in \mathbb{N})$ అయితే $\ell im\, R_n = 0$ అని చూపుము.

54. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$ అభిసరించునని చూపుము. శ్రేణి యొక్క మొత్తమును కనుగొనుము.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ అభిసరిస్తుంది మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ అభిసరిస్తుందని అనుకొనుము.

(a) ఒక శ్రేణి సంపూర్ణాభిసరణం చెందితే $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ సంపూర్ణాభిసరణం చెందుతుందని చూపుము.

(b) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots\cdots\cdots$ అభిసరిస్తుందని చూపుము.

కాని $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ అపసరిస్తుంది.

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\, n$ అభిసరించదు కాని $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\, n}{n^2}$ అభిసరిస్తుందని చూపుము.

57. (a_n) ధనాత్మక సంఖ్యల అనుక్రమము అనుకొనుము.

క్రింది అనంత శ్రేణులను తీసుకొనుము.

$A : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$B : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

A అభిసరణీయత $\Rightarrow$ B అభిసరణీయత అవుతుందా?

B అభిసరణీయత $\Rightarrow$ A అభిసరణీయత అవుతుందా?

58. ప్రతి యొక్క సందర్భములో ఉపపత్తి లేక ప్రతికూల ఉదాహరణనిమ్ము.

$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)}$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణీయతను చర్చించుము.

59. అన్ని n లకు $a_n > 0$ మరియు $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ అభిసరిస్తే, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ అభిసరిస్తుందని చూపుము.

(Hint: $a > 0, b > 0$ అయితే $2\sqrt{ab} \le a + b$)

60. $\sum a_n$ అభిసరించి మరియు ప్రతి n కి $a_n > 0$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ అభిసరిస్తుందని చూపుము.

(Hint: $a > 0, b > 0$ అయితే $2\sqrt{ab} \le a + b$)

61. $\frac{1}{1^P} + \frac{1}{3^P} + \frac{1}{5^P} + \cdots\cdots\cdots$ అభిసరించేటట్లుగా అన్ని $P > 0$ లను కనుగొనుము.

62. $\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \cdots\cdots\cdots$ శ్రేణి అభిసరణను పరీక్షించుము.

63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} a_n$, $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణను పరీక్షించుము.

64. $0 < x \le 1$ అయినపుడు (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణను చర్చింపుము.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^P} \cdot (P \in \mathbb{R})$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణను చర్చింపుము.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^P}{n!}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణను చర్చింపుము.

65. (a) $x > 0$ మరియు $y > 0$ అయితే $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(y+1)}$ యొక్క అభిసరణను చర్చింపుము.

(b) $0 < x < 1$ అయితే $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a + (n-1)d\right)x^n$, $a > 0$ మరియు $d > 0$ కు శ్రేణి యొక్క అభిసరణను చర్చింపుము.

66. $x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \frac{26}{28}x^5 + \cdots\cdots\cdots$ శ్రేణి యొక్క n వ పదమును కనుగొనుము మరియు

$0 < x \le 1$ అయినపుడు శ్రేణి అభిసరణను చర్చింపుము.

67. క్రింది వాటి అభిసరణను చర్చింపుము.

(a) $1+\frac{1}{2(\log\ 2)^{P}}+\frac{1}{3(\log\ 3)^{P}}+\cdots\cdots\cdots,$

(b) $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$, $0 < x \le 1$ అయినపుడు

పాఠము - 14

68. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|} & x \text{ కరణీయ సంఖ్య}\\ 0 & x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}\end{cases}$ అనుకొనుము

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ వ్యవస్థితమా? అయితే అవధి కనుగొనుము.

69. $g(x)=\begin{cases}0 & x \text{ కరణీయ సంఖ్య}\\ x^2 & x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}\end{cases}$ అనుకొనుము

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ వ్యవస్థితమా? అయితే అవధి కనుగొనుము.

70. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|} & x \text{ కరణీయ సంఖ్య}\\ 0 & x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}\end{cases}$ అనుకొనుము

$g(x)=\begin{cases}x^2 & x \text{ అకరణీయ సంఖ్య}\\ 0 & x \text{ కరణీయ సంఖ్య}\end{cases}$

gof = fog అవునో కాదో తెలుపుము.

$\lim\limits_{x\to 0} fog(x)$ మరియు $\lim\limits_{x\to 0} (gof)(x)$ వ్యవస్థితమైతే కనుగొనుము.

71. $f(x)=[2x]$ మరియు $g(x)=2[x]$ అనుకొనుము

f వ్యాప్తి మరియు g వ్యాప్తి కనుగొనుము.

x యొక్క ఏ విలువలకు $\lim\limits_{t \to x} f(t)$ వ్యవస్థితమా?

x యొక్క ఏ విలువలకు $\lim\limits_{t \to x} g(t)$ వ్యవస్థితమా

x యొక్క ఏ విలువలకు పై అవధులు సమానము?

72. $f(x) = [x]^{[x]}$, $x > 0$ అనుకొనుము. మరియు $[x]$ గరిష్ఠ పూర్ణాంకము $n \le x$ i.e., $n \le x < n+1$.

f వ్యాప్తి కనుగొనుము.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ కనుగొనుము.

73. $\lim\limits_{x \to 0} \text{Sin}\,\dfrac{1}{2x}$ మరియు $\lim\limits_{x \to 0} \text{Sin}\,\dfrac{2}{x}$ వ్యవస్థితము కాదని చూపుము. $\lim\limits_{x \to 0} \sin|x|$ వ్యవస్థితమవుతుందో లేదో తెలుపుము.

74. $\lim\limits_{x \to 0} x\,\text{Cos}\,\dfrac{1}{x} = 0$ మరియు $\lim\limits_{x \to 0} \text{Cos}\,\dfrac{1}{x}$ వ్యవస్థితము కాదని చూపుము.

75. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 f(x) = 0$ తీసుకొనుము. $\lim\limits_{x \to \infty} x f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ అని చూపుము.

76. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ అనుకొనుము. $0 < x < \delta$ కు $0 \le |f(x) - 2| < \dfrac{1}{4}$ అయ్యేటట్లుగా $\delta > 0$ కనుగొనుము.

77. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ కనుగొనుము.

78. $\mathbb{R}$ లో $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ వ్యవస్థితమైతే $V_\delta(a) - \{a\}$ లో f పరిబద్ధమయ్యేటట్లుగా $\delta > 0$ ఉంటుందని చూపుము.

79. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x} - x}{5x - 3\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ వ్యవస్థితమా? వివరించుము.

80. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$ అనుకొనుము. ఈ క్రిందివి సత్యమో, కాదో తెలుపుము.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(|x|) = L$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = |L|$

పాఠము - 15

81. $\mathbb{R}$ పై $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ మరియు $f(0) = a$ గా నిర్వచింపబడిన f ప్రమేయము 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నమయ్యేటట్లుగా f తెలుపుము.

82. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ అకరణీయ సంఖ్య} \\ -x, & x \text{ కరణీయ సంఖ్య} \end{cases}$

గా నిర్వచింపబడిన $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ప్రమేయం 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నము మరియు $x \neq 0$ వద్ద విచ్ఛిన్నము అని చూపుము.

83. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x > 0 \text{ అయితే} \\ 0 & \text{if} \quad x \leq 0 \text{ అయితే} \end{cases}$ అనుకొనుము

$\mathbb{R}$ పై f అవిచ్ఛిన్నమని చూపుము.

84. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ కరణీయ సంఖ్య} \\ -x^2 & x \text{ అకరణీయ సంఖ్య} \end{cases}$

f అవిచ్ఛిన్నమయ్యే అన్ని x విలువలు కనుగొనుము.

85. $f(x) = x - [x]$, $[x] \leq x < [x] + 1$ మరియు $[x]$ పూర్ణాంకము అయితే f యొక్క అవిచ్ఛిన్న బిందువులు కనుగొనుము.

86. $n \le a < n+1$ అయ్యేటట్లుగా n, a యొక్క గరిష్ట పూర్ణాంకము $[a]$, $g(x) = [2x]$గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము g యొక్క విచ్ఛిన్న బిందువులు కనుగొనుము.

87. $f(x) = \dfrac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$, $x \neq 0$ మరియు $f(0) = 1$ అనుకొనుము. 0 వద్ద f యొక్క అవిచ్ఛిన్నము చర్చించుము.

88. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ మరియు $f(0) = a$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము f, 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నమయ్యేటట్లుగా వాస్తవ సంఖ్య a ఉండదని చూపుము.

89. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ మరియు $g(x) = x^2$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయాలు f మరియు g ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నము కావని చూపుము.

90. $(0, 1)$ పై నిర్వచింపబడిన $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ ప్రమేయము f అవిచ్ఛిన్నము కాని ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నము కాదని చూపుము.

91. $$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < \dfrac{1}{4} \\ x, & \dfrac{1}{4} \le x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4}{5}, & \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$[0, 1]$లో f ఏకదిష్ట అవరోహణమని చూపుము. f యొక్క విచ్ఛిన్న బిందువులను కనుగొనుము.

92. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ఏకదిష్ట ఆరోహణము మరియు $[f(a), f(b)]$ లో ఉన్న అంతరము J అయితే $f^{-1}(J)$, $[a, b]$లోఅంతరమని చూపుము.

93. (a) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \le 1 \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$ ప్రమేయము $\mathbb{R}$లో అవిచ్ఛిన్నమయ్యేటట్లు $a \in \mathbb{R}$ కనుగొనుము.

(b) $f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & x \le \frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B, & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \text{Cos } x, & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$ అవిచ్ఛిన్నమయ్యేటట్లు R లో A, B లను కనుగొనుము.

94. $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ అయినపుడు $\lim_{x\to 0+} f(x)$ మరియు $\lim_{x\to 0-} f(x)$ కనుగొనుము.

95. $f(x)=\frac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ ప్రమేయానికి 0 వద్ద ఏకపక్ష అవధుల అస్థిత్వమును

96. $g(x)=2^{f(x)}$, $f(x)=\begin{cases} -\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ అనుకొనుము

f మరియు g యొక్క అవిచ్ఛిన్న బిందువులను తెలుపుము.

పాఠము - 16 మరియు 17

97. $f(x)=(x-3)^2(x-2)^3$ కి $[2,3]$ లో రోలె సిద్ధాంతమును సరి చూడుము.

98. $f(x)=(x-2)(x-3)$ అనుకొనుము. $f'(C)=0$ అయ్యేటట్లు $(2,3)$లో C కనుగొనుము.

99. $f(x)=\sin^{-1}x$ అనుకొనుము.

$\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{15} < f(0\cdot 6) < \frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}$ అని నిరూపించుము.

100. $\mathbb{R}$లో అన్ని x, y లకు $|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$ అయితే $x\in\mathbb{R}$ లకు f అవకలనీయము అని చూపుము. $f^1(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ కనుగొనుము. f గురించి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

101. $\mathbb{R}$ లో f అవకలనీయమని అనుకొనుము మరియు $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x+1) - f(x)$ కనుగొనుము.

102. $x > 0$ అయినపుడు మధ్యమ విలువ సిద్ధాంతమునుపయోగించి $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x)$ అని చూపుము.

103. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ మరియు $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ మరియు $f(0) = g(0) = 0$ అనుకొనుము. $0 < a < b$ అయినపుడు a మరియు b ల మధ్య హరాత్మక మధ్యమమును కనుగొనుము.

104. $f(x) = x^4$, x అకరణీయము మరియు $f(x) = 0$, x కరణీయము అనుకొనుము. $f^1(0)$ వ్యవస్థితమని చూపి, కనుగొనుము.

105. $\mathbb{R}$ లో f రెండుసార్లు అవకలనీయము అనుకొనుము మరియు $x \in \mathbb{R}$ అయితే $f(x) = f(-x)$. $f''(x) = f''(-x)$ అని చూపుము.

106. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అవకలనీయము అనుకొనుము మరియు $x \in \mathbb{R}$ కు $f^1(x) = f(x)$ మరియు $f(0) = 1$ అన్ని $x \in \mathbb{R}$ కు $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots\cdots\cdots$ అని చూపుము.

107. $x \in \mathbb{R}$ కు $e^x > 1 + x$ అని చూపుము.

108. $n \in \mathbb{N}$ అయితే $[1, \infty)$ లో $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ అవరోహణమని చూపుము.

$a > b > 0$ అయితే $(a-b)^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}$ అని చూపుము.

109. మధ్యమ విలువ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి $|\sin x - \sin y| \leq 1$ అని నిరూపించుము.

110. $f(x) = 2x^4 + x^4 \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ మరియు $f(0) = 0$ అనుకొనుము.

(a) 0 వద్ద f కి శుద్ధ కనిష్టత ఉండునని చూపుము.

(b) ప్రతి 0 సామీప్యములో f కు ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక విలువలు ఉంటాయని చూపుము.

111. $x \in \mathbb{R}$ కు $f(x) = |x|^3$ అనుకొనుము. $x \in \mathbb{R}$ కు $f'(x)$ మరియు $f''(x)$ వ్యవస్థితమని, $f'''(0)$ వ్యవస్థితము కాదని చూపుము.

112. $x > 0$ అయితే $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \le \sqrt{1+x} \le 1+\frac{x}{2}$ అని చూపుము.

113. $f(x) = \sin x$ అయితే x_0 అయినప్పుడు టేలర్ సిద్ధాంతములోని శిష్టపదము $n \to \infty$ కి x_0 అయినపుడు 0 కి అభిసరిస్తుందని చూపుము.

ఈ క్రింది అవధులను గణించుము:

114. $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

115. $\lim\limits_{x \to 0+} x^{2x}$

116. $\lim\limits_{x \to 0+} (2x)^x$

117. $\lim\limits_{x \to 0+} (1+x)^{\frac{2}{x}}$

118. $\lim\limits_{x \to 0+} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

119. $\lim\limits_{x \to 0+} (\sin x)^{2x}$

120. $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\sin 2x}$

121. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{e^x}$

122. $y = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ప్రమేయము $\left(1-x^2\right)y^1 - xy = 1$ సంబంధాన్ని తృప్తిపరచునని నిరూపించుము.

123. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$గా నిర్వచింపబడిన $f(x)$ ప్రమేయము

$2f(x) - xf^1(x) = \ln f^1(x)$ని తృప్తిపరచునని నిరూపించుము.

124. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ వక్రమునకు ప్రథమ నిరూపకము a తో వక్రము మీద బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణమును రాబట్టుము.

125. $X-$అక్షము మరియు $Y-$ అక్షము మధ్య $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ వక్రమునకు దాని పైని ఏదైనా బిందువు వద్ద

తీసుకున్న స్పర్శరేఖా ఖండము యొక్క పొడవు a అని నిరూపించుము.

126. ఈ క్రింది ప్రమేయములకు 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నత మరియు అవకలనీయత పరీక్షింపుము.

(i) $f(x) = \begin{cases} \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) = e^{-|x|}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

127. అవకలనములనుకనుగొనుటకు లెబ్నెట్జ్ సూత్రమును ఉపయోగించుము.

(i) $\left(e^x \sin x\right)^{(n)}$ (ii) $\left(x^3 \sin \alpha x\right)^n$

128. $y = (1-x)^{-\alpha} e^{-\alpha x}$ అయితే

$(1-x)\, y^1 = \alpha \times y$ మరియు $n \geq 1$కి $(1-x)\, y^{(n+1)} = (n+\alpha x) y^{(n)} - n\alpha y^{(n-1)}$ అని చూపుము.

129. $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ $(x > 1)$ అని చూపుము.

130. $x > 0$ అయితే $e^x > 1 + x$ అని చూపుము.

131. $x > \ln(1+x)$ $(x > 0)$ అని చూపుము.

132. $\sin x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{120} (x > 0)$ అని చూపుము.

133. $\sin x + \tan x > 2x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ అని చూపుము.

134. $f(x) = x^n + px + q$ ప్రమేయమునకు n సరి సంఖ్య అయితే రెండు వాస్తవ మూలాలు మరియు n బేసి

సంఖ్య అయితే మూడు వాస్తవ మూలాలు కంటే ఎక్కువ ఉండవని చూపుము.

135. $f(x) = x^3 + x$ ఏకదిష్ట ఆరోహణము మరియు $g(x) = \text{arc } \tan x - x$ ఏకదిష్ట అవరోహణమని చూపుము.

136. $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ అయితే $\frac{\tan y}{\tan x} > \frac{x}{y}$ అసమానతను నిరూపించుము.

137. f ఏకదిష్టమయ్యే అంతరములను కనుగొనుము.

(a) $y = x - e^x$, (b) $y = x^2 e^{-x}$, (c) $y = \frac{x}{\ln x}$, (d) $y = x + \cos x$.

138. అంత్య విలువలను కనుగొనుము.

(a) $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$ అంత్య విలువలు లేవు

(b) $y = ae^x + be^{-x}$ $(ab \ge 0)$ అంత్య విలువలు లేవు - ఆరోహణము

(c) $y = 2x^3 - 3x^2$, $x = 0$ వద్ద గరిష్ట విలువ 0

(d) $y = \ln\left(x^4 + 4x^3 + 30\right)$, $x = 0$ వద్ద కనిష్ట విలువ.

పాఠము - 18

139. $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ $t_1 = \frac{1}{8}$, $t_2 = \frac{3}{8}$, $t_3 = \frac{5}{8}$, $t_4 = \frac{7}{8}$ అనుకొనుము. P లోని ఎంపిక బిందువులు t_1, t_2, t_3, t_4 అయితే $\|\dot{P}\|$ మరియు $S(f, \dot{P})$ కనుగొనుము.

140. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{if } 1 \le x \le 2 \end{cases}$, $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}\right\}$

$t_i = \frac{2i-1}{8}$ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ మరియు $\dot{P} = \left\{\left(\left[\frac{i-1}{8}, \frac{i}{8}\right], t_i\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ అనుకొనుము.

$S(f, \dot{P})$ కనుగొనుము.

141. $[0,1]$ పై నిర్వచింపబడిన డిరిష్లే ప్రమేయము f అనుకొనుము.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ అకరణీయము } 0\le x\le 1\\ 0 & x \text{ కరణీయము } 0\le x\le 1\end{cases}$$

$\dot{P}=\left\{\left([x_{i-1}, x_i],\ t_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$, $\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\}$ అనుకొనుము.

మరియు $t_i\in[n_{i-1},\ n_i]$, t_i అకరణీయ సంఖ్య $S(f,\dot{P})=1$ అని చూపుము.

142. $f(x)=\begin{cases}0, & x=\dfrac{1}{3}\\[2ex] 1, & x\ne\dfrac{1}{3}\end{cases}$ అనుకొనుము

$\dot{P}=\{0=x_0<\cdots\cdots\cdots\cdots<x_n=1\}$, $x_i=\dfrac{i}{5}$ అయితే

$t_1=\dfrac{1}{5},\ t_2=\dfrac{1}{3},\ t_3=\dfrac{3}{5},\ t_4=\dfrac{4}{5},\ t_5=1$ విలువలకి $S(f,\dot{P})$ కనుగొనుము.

143. అన్ని $x\in[a,b]$లకు $f(x)=x$, $P=\{0, 1, 1.5, 2, 3.4, 4\}$ మరియు P యొక్క i వ ఉపాంతరములోని మధ్య బిందువు t_i అయితే పైన ఉన్న ఎంపిక బిందువులతో విభజనము $\dot{P}$కు $S(f,\dot{P})$ కనుగొనుము.

144. H థోమే ప్రమేయము అనుకొనుము మరియు ప్రతి $\in>0$ కి $E_{\in}=\left\{x\in[0,1]\Big/H(x)\ge\dfrac{\in}{2}\right\}$ అనుకొనుము.

(a) $E_{\frac{1}{2}}$ కనుగొనుము మరియు $E_{\frac{1}{2}}$ లో $x=\dfrac{m}{n}$ యొక్క హారముల సంఖ్య పరిమితమని చూపుము.

(b) $E_{\frac{1}{2}}$ లో మూలకాల సంఖ్య N అనుకొనుము, $\delta=\dfrac{1}{8N}$ అనుకొనుము.

(c) $n>\dfrac{1}{\delta}$ మరియు $\dot{P}=\left\{\left[\dfrac{i-1}{n},\ \dfrac{i}{n}\right],\ \dfrac{i}{n}\right\}_{i=1}^{n}$ అయితే $S(H,\dot{P}_n)$ను గణించుము.

145. $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1 \text{ మరియు } x \text{ అకరణీయ సంఖ్య} \\ \dfrac{1}{x} & 0 \le x \le 1 \text{ మరియు } x \text{ కరణీయ సంఖ్య} \end{cases}$

$n \in \mathbb{N}$ మరియు $P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots\cdots\cdots\cdots < \frac{n}{n} = 1\right\}$ మరియు $t_i = \frac{i}{n}$ $1 \le i \le n$, $\dot{P}_n$ అనుకొనుము. $t_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ ఎంపిక బిందువులతో $\dot{P}_n$ విభాజనము అనుకొనుము.

(1) $\lim\limits_{n} S\left(f, \dot{P}_n\right)$ కనుగొనుము, (2) $f \notin R[0,1]$ అని చూపుము.

146. $2 \le x \le 5$ అయితే $f(x) = x[x]$ అనుకొనుము. $f \in R[2, 5]$ అని చూపుము మరియు $\int_2^5 f dx$ కనుగొనుము.

పాఠము - 19

147. ఇచ్చిన $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ కి g ని $g(x) = f(x) + f(-x)$గా నిర్వచించిన g సరి ప్రమేయమని చూపుము. $f \in R[-1, 1]$ అయితే $g \in R[-1, 1]$ అని చూపుము.

$\int_{-1}^{1} g(x) dx = 2\int_0^1 \left(f(x) + f(-x)\right) dx$ అని చూపుము.

148. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ కరణీయము} \\ x & x \text{ అకరణీయము} \end{cases}$ అనుకొనుము

$0 < \in < 1$ అయితే $\alpha_{\in}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x \le \in \\ x & \text{if } \in \le x \le 1 \end{cases}$

మరియు $\beta_{\in}(x) = \begin{cases} \in & \text{if } 0 \le x \le \in \\ x & \text{if } \in \le x \le 1 \end{cases}$ అనుకొనుము.

(a) $0 \le x \le 1$ అయితే $\alpha_{\in}(x) \le f(x) \le \beta_{\in}(x)$ అని చూపుము.

(b) $\beta_{\in} - \alpha_{\in} \in R[0,1]$ అని చూపుము.

(c) $\int_0^1 (\beta_{\in} - \alpha_{\in})\, dx < \in$ అని చూపుము.

149. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \text{ మరియు } x \text{ అకరణీయ సంఖ్య} \\ 0 & x \in [0,1] \text{ మరియు } x \text{ కరణీయ సంఖ్య} \end{cases}$ అనుకొనుము

ఏ విభాజనము P కైనా $O(f, P) = 1$ అని చూపుము.

150. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,2] \cup [3,4] \\ 2, & x \in (2, 3) \end{cases}$

మరియు $g(x) = \begin{cases} 2 & 0 \le x \le 1 \\ 3 & 1 \le x \le 2.5 \\ -1 & 2.5 < x \le 3 \end{cases}$ అనుకొనుము.

(a) $f\ g$ ని ప్రాథమిక సోపాన ప్రమేయముల బుజు సంయోగముగా వ్రాయుము.

(b) $\int_0^3 (fg)dx$ కనుగొనుము.

151. ఈ క్రింది సోపాన ప్రమేయము f ని ప్రాథమిక సోపాన ప్రమేయముల బుజు సంయోగముగా వ్రాయుము.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{7}\right] \\ 2 & \text{if} \quad \frac{1}{2} \le x < \frac{2}{5} \text{ or } \frac{3}{7} \le x < \frac{4}{3} \\ 3 & \text{if} \quad x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{6}{7}, 1\right] \end{cases}$$

152. $\int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} c \sin c$ అయ్యేటట్లుగా $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ వ్యవస్థితమని చూపుము.

153. $n \in \mathbb{N}$ కు $f(x) = x^2,\ P_n = 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots\cdots\cdots < \frac{n}{n} = 1$ మరియు

$O(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$, $M_i = l.ub$ మరియు $m_i = g\ 1bf$ లు $[x_{i-1}, x_i]$

అంతరములో ఉంటే కనిష్ట $n \in \mathbb{N}$ కనుగొనుము. $n \geq N$ కి $O(f, P_n) < \in = \frac{1}{2}$

154. $f(x) = \frac{1}{2} J[0, 1] + \frac{2}{3} J[1, 2] - 5\, J[2, 3]$

మరియు $g(x) = \frac{2}{3} J\left[0, \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{3} J\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] + 4J\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ అనుకొనుము.

$J[c, d]\ (x) = 1,\ c \leq x \leq d,$

$= 0 \text{ if } x \notin [c, d]$

f + g ని ప్రాథమిక సోపాన ప్రమేయముల ఋజు సంయోగముగా వ్రాయుము.

155. $P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1\right\}.$

$\dot{P}_n = \left\{\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \frac{i}{n}\right), \frac{i}{n}\right\}_{i=1}^{n}$ $\dot{Q}_n = \left\{\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \frac{i}{n}\right), \frac{i-1}{n}\right\}$ అనుకొనుము.

$f(x) = x^2$ అయితే $0 \leq S(f, \dot{P}_n) - S(f, \dot{Q}_n) < \frac{1}{n}$ అయ్యేటట్లుగా $\in = \frac{1}{2}$ కు అనుబంధుగా $n \in \mathbb{N}$ వ్యవస్థితమని చూపుము.

156. $f(x) = x$ అయినపుడు $0 \leq S(f, \dot{P}_n) - S(f, \dot{Q}_n) < \frac{1}{n}$ అయ్యేటట్లుగా కనిష్ట n కనుగొనుము.

పాఠము - 20

157. $f(x)=\begin{cases} 1 & , 0 \le x < 1 \\ x+1 & , 1 \le x \le 2 \end{cases}$ అనుకొనుము

(a) $0 \le x \le 2$ అయితే $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ ను కనుగొనుము.

(b) F యొక్క అవకలనీయము కాని బిందువులను కనుగొనుము.

158. $\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^3}\,dt$ కనుగొనుము.

159. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^{\frac{1}{3}}}}{t^{2/3}}dt$ కనుగొనుము.

160. $F(x)=\int_0^{x^2}\frac{dt}{\left(2+t^3\right)}$ అయినపుడు $F'(x)$ను కనుగొనుము.

161. $F(x)=\int_{x^2}^{x}\sqrt{1+t^2}\,dt$ అయినపుడు $F'(x)$ను కనుగొనుము.

162. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$ అనుకొనుము. $\int_a^b |x|\,dx$ కనుగొనుము.

163. $g(x)=\begin{cases} x-1, & |x-1| \ge 1 \\ 1-x, & |x-1| < 1 \end{cases}$

మరియు $G(x)=\frac{1}{2}\left|x(x-2)\right|$ అనుకొనుము.

$\int_{-2}^{3} g\,dx$ ను G పదములలో కనుగొనుము.

164. క్రింది విధముగా నిర్వచింపబడిన వక్రమునకు అంత్య బిందువులను కనుగొనుము.

(a) $f(x)=\int_0^x \left(t^2-3t+2\right) dt$

(b) $f(x)=\int_0^x te^{-t^2}\, dt$

165. $\int_0^y e^t\, dt+\int_0^x \cos t\, dt=0$ గా నిర్వచించిన y యొక్క అవకలజమును కనుగొనుము.

166. $f(x)=\int_x^{2x} (\ell og\ x)^2\, dx$ యొక్క అవకలజమును కనుగొనుము.

167. x దృష్ట్యా క్రింది వాటి అవకలజములను కనుగొనుము.

(a) $f(x)=\int_2^{e^x} \frac{\ell og\ x}{x}\, dx$ (b) $f(x)=\int_{x^2}^{1} \ell og\ x\, dx$

168. $f(x)=\int_0^{2x} \frac{\sin x}{x}\, dx$ యొక్క అవకలజమునుకనుగొనుము.

రచయిత

I. రామభద్ర శర్మ